МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

НОРМАЛЬНАЯ ВЫСШАЯ ШКОЛА
(ПАРИЖ)

●

MOSCOW PEDAGOGICAL
STATE UNIVERSITY

ECOLE NORMALE SUPERIEURE
(PARIS)

DICTIONARY OF DISTANCES

Elena DEZA
Michel Marie DEZA

ELSEVIER

Amsterdam • Boston • Heidelberg • London • New York • Oxford
Paris • San Diego • San Francisco • Singapore • Sydney • Tokyo

Елена ДЕЗА Мишель Мари ДЕЗА

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ РАССТОЯНИЙ

МОСКВА НАУКА 2008

УДК 53(038)
ББК 22.3
Д26

Перевод с английского языка
В.И. Сычева

Деза Е.И., Деза М.-М.
Энциклопедический словарь расстояний / Елена Деза, Мишель-Мари Деза ; [пер. с англ. В.И. Сычева] ; Моск. гос. пед. ун-т ; Нормальная высш. шк., Париж. – М. : Наука, 2008. – с. – ISBN 978-5-02-036043-3 (в пер.).

В словаре приведены толкования терминов расстояние, мера, метрика, пространство и т.п., в применении к различным сферам науки и реальной жизни.
Для широкого круга специалистов.

По сети "Академкнига"

ISBN 978-5-02-036043-3

© Deza E., Deza M.-M., 2006
© ELSEVIER, 2006
© Деза Е.И., Деза М.-М., 2008
© Сычев В.И., перевод на русский язык, 2008
© Редакционно-издательское оформление.
Издательство "Наука", 2008

2 апреля 2006 г. исполнилось 100 лет со дня защиты французским ученым Морисом Фреше выдающейся докторской диссертации, в которой он впервые (в рамках систематического изучения функциональных операций) ввел абстрактное понятие метрического пространства.

Более 90 лет прошло также с публикации в 1914 г. Феликсом Хаусдорфом знаменитой книги "Основы теории множеств", в которой им была представлена теория топологического и метрического пространств.

Мы посвящаем данный Энциклопедический словарь светлой памяти этих великих математиков и их достойной жизни в тяжелые времена первой половины XX столетия.

Морис Фреше (1878–1973) ввел в обращение в 1906 г. термин *écart* (*полуметрика*)

Феликс Хаусдорф (1868–1942) ввел в обращение в 1914 г. термин *метрическое пространство*

Предисловие

Понятие *расстояния* является одним из основных во всей человеческой деятельности. В повседневной жизни расстояние обычно означает некоторую степень близости двух физических объектов или идей (т.е. длину, временной интервал, промежуток, различие рангов, отчужденность или удаленность), в то время как термин *метрика* зачастую используется как стандартное понятие меры или измерения. В нашей книге, за исключением двух последних глав, рассматривается математическое значение этих терминов, которое представляет собой абстракцию измерения. Математические понятия *метрики* (т.е. функции $d(x, y)$ из $X \times X$ в множество действительных чисел, удовлетворяющей условиям $d(x, y) \geqslant 0$ с равенством только при $x = y$, $d(x, y) = d(x, y)$ и $d(x, y) \leqslant \boldsymbol{d}(x, z) + d(z, y)$) и *метрического пространства* (X,d) были введен почти век назад М. Фреше (в 1906 г.) и Ф. Хаусдорфом (в 1914 г.) в качестве специального случая бесконечного топологического пространства. Упомянутое выше *неравенство треугольника* $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ можно найти уже у Евклида. Бесконечные метрические пространства появляются обычно как обобщения метрики $|x–y|$ на множестве действительных чисел. Основными их классами являются меры пространства (добавьте меру) и банаховы пространства (добавьте норму и полноту).

Однако, начиная с К. Менгера (который в 1928 г. ввел понятие метрического пространства в геометрию) и Л.М. Блюменталя (1953 г.), интерес как к конечным, так и к бесконечным метрическим пространствам резко повышается. Другой тенденцией стало то, что многие математические теории в процессе их обобщения стабилизировались на уровне метрического пространства.

Этот процесс продолжается и сейчас, в частности, применительно к римановой геометрии, действительному анализу, теории приближений.

Метрики и расстояния стали важным инструментом исследований в самых разных областях математики и ее приложений, включая геометрию, теорию вероятностей, статистику, теорию кодирования, теорию графов, кластерный анализ, анализ данных, распознавание образов, теорию сетей, математическую инженерию, компьютерную графику, машинное зрение, астрономию, космологию, молекулярную биологию и многие другие отрасли науки. Создание наиболее удобных метрик стало центральной задачей для многих исследователей. Особенно интенсивно ведутся поиски таких расстояний, в частности, в математической биологии, распознавании речи и образов, выборке информации. Нередки случаи, когда одни и те же метрики появляются независимо друг от друга в таких совершенно разных сферах, как, например, расстояние между словами и эволюционное расстояние в биологии, расстояние Левенштейна в теории кодирования и расстояние Хэмминга – с пропусками или хэммингово тасованное расстояние.

Накопленная информация о расстояниях настолько обширна и разрозненна, что работать с ней стало почти невозможно. Так, например, количество предлагаемых веб-сайтом "Google" вводимых данных по тематике "расстояние", "метрическое

пространство" и "метрика" превосходит 300 млн (т.е. около 4% общего объема вводимых данных), 12 млн и 6 млн соответственно, и это без учета всей печатной информации, циркулирующей вне сети Интернет, или того "невидимого" массива сведений, содержащихся в доступных для поиска базах данных. При этом вся эта обширная информация о расстояниях весьма разбросана по источникам, а в некоторых работах проблематика расстояний касается настолько специфических предметов, что говорить о ее доступности для неспециалистов не приходится.

В связи с этим многие исследователи, в частности сами авторы, стараются накапливать и хранить данные о расстояниях применительно к собственным сферам научной деятельности. В условиях растущей потребности в междисциплинарном источнике информации общего пользования о расстояниях и метриках авторы решили расширить свою личную коллекцию и создать на ее базе "Энциклопедический словарь расстояний". Дополнительные материалы были почерпнуты из изданий энциклопедического характера, в значительной мере из "Математической энциклопедии" ([EM98]), "Мира математики" ([Weis99]), "Планеты "Математика" ([PM]) и "Википедии" ([WFE]). Однако главным источником информации для словаря явилась специальная литература.

Помимо собственно расстояний авторы включили в книгу много родственных понятий (особенно в гл. 1) и парадигм, позволяющих применять практически малопонятные для неспециалистов термины, представленные в готовом для использования виде. Все это, а также появление некоторых расстояний в совершенно ином контексте может дать толчок новым исследованиям.

В наше время, когда чрезмерная специализация и терминологические барьеры ведут к разобщению исследователей, наш словарь выполняет скорее центростремительную и объединительную функции, обеспечивая доступность и более широкий обзор информации, но без скатывания к научной популяризации предмета. Это стремление соответствующим образом сбалансировать излагаемый материал предопределило структуру и стиль книги.

Данный справочник представляет собой специализированный энциклопедический тематический словарь. Он состоит из 28 глав в семи частях примерно одинакового объема. Названия частей преднамеренно даны приближенно в расчете на то, что читатель самостоятельно выберет тематику в зависимости от собственных интересов и компетентности. Так, например, части II, III и IV, V потребуют определенного уровня знаний соответственно в области чистой и прикладной математики, в то время как содержание части VII будет доступно любому неспециалисту.

Главы являются по существу перечнями тематик по различным областям математики или приложениям, которые могут читаться независимо друг от друга. При необходимости глава или раздел могут предваряться кратким введением – экскурсом по основным понятиям. Помимо таких предисловий описание характерных особенностей и областей применения расстояний дается в тексте скорее как исключение. Авторы старались, по мере возможности, упоминать тех, кто первым ввел то или иное определение расстояния, при этом предлагаемая обширная библиография имеет целью обеспечить удобный источник для быстрого поиска.

Каждая из глав компонуется таким образом, чтобы между ее разделами прослеживалась взаимосвязь. Все заголовки разделов и ключевые термины вынесены отдельно в предметный указатель (около 1500 пунктов) и обозначены жирным шрифтом, если только их значение не вытекает из контекста. Это облегчает поиск определений по тематике внутри главы и по алфавиту в самом указателе. Тексты введений и определения ориентированы на удобство для

читателя и максимально независимы друг от друга. Они остаются взаимосвязанными посредством обозначенных жирным шрифтом текстовых ссылок (по типу формата HTML с гиперссылками) на схожие определения.

Много интересных сведений представлено в этом биографическом справочнике расстояний "Кто есть кто". Примерами занятных терминов являются относящееся к вездесущему евклидову расстоянию выражение "как ворона летает" (т.е. по прямой линии), "метрика цветочного магазина" (кратчайшее расстояние между двумя точками с промежуточным посещением точки "цветочного магазина"), "метрика хода коня" на шахматной доске, "метрика гордиева узла", "метрика бульдозера", расстояние биотопа, "прокрустово расстояние", "метрика лифта", "почтовая метрика", хоп-метрика Интернета, квази-метрика гиперссылок WWW, "московская метрика", "расстояние собаковода".

Кроме абстрактных расстояний рассматриваются также расстояния с физическим содержанием (особенно в части VI). Они существуют в диапазоне от $1{,}6 \times 10^{-35}$ м (длина Планка) до $7{,}4 \times 10^{26}$ м (оцениваемые размеры наблюдаемой Вселенной, около 46×10^{60} длин Планка).

Количество метрик бесконечно и поэтому перечислить их все невозможно. Однако авторы были вдохновлены примером успешного составления тематических словарей по другим бесконечным перечням, в частности, целочисленным последовательностям, неравенствам, случайным процессам, а также атласов функций, групп, фуллеренов и т.п. Кроме того, обширность тематики зачастую вынуждала авторов излагать материал в лаконичной форме учебного пособия.

Этот словарь ориентирован в основном на научных работников, занимающихся исследованиями с проведением различных измерений, и в определенной мере на студентов, а также интересующихся наукой рядовых читателей.

Авторы попытались охватить, пусть даже не полностью, весь спектр прикладного использования понятия расстояния. Однако некоторые расстояния не нашли отражения в книге либо по причине нехватки места (из-за чрезмерной специфики или сложности предмета), либо по недосмотру авторов. В целом объем текста и сбалансированность содержания (т.е. определение целесообразной достаточности информации по той или иной теме) явились основной трудностью. Мы будем благодарны читателям, которые выскажутся за включение в словарь каких-либо пропущенных или дополнительных расстояний. В конце книги для личных заметок читателей на эту тему зарезервировано несколько чистых страниц.

Авторы выражают благодарность многим людям за оказанную при написании данного словаря помощь и в первую очередь Жаку Бейбедеру, Мэтью Дютуру, Эммануэлю Герре, Жаку Кулену, Джин Хо Кваку, Хироши Маэхара, Сергею Спекторову, Алексею Сосинскому и Цзяньцану Чжуангу.

Содержание

Предисловие .....

ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИКА РАССТОЯНИЙ

Глава 1. **Общие определения**

1.1 Базовые определения .....
1.2 Основные понятия, связанные с расстояниями и числовые инварианты .....
1.3 Общие расстояния .....

Глава 2. **Топологические пространства**

Глава 3. **Обобщения метрических пространств**

3.1 *m*-метрики .....
3.2 Неопределенные метрики .....
3.3 Топологические обобщения .....
3.4 За пределами чисел .....

Глава 4. **Метрические преобразования**

4.1 Метрики на том же множестве .....
4.2 Метрики на расширениях данного множества .....
4.3 Метрики на других множествах .....

Глава 5. **Метрики на нормированных структурах**

ЧАСТЬ II. ГЕОМЕТРИЯ И РАССТОЯНИЯ

Глава 6. **Расстояния в геометрии**

6.1 Геодезическая геометрия .....
6.2 Проективная геометрия .....
6.3 Аффинная геометрия .....
6.4 Неевклидова геометрия .....

Глава 7. **Римановы и Эрмитовы метрики**

7.1 Римановы метрики и их обобщения .....
7.2 Римановы метрики в теории информации .....
7.3 Эрмитовы метрики и их обобщения .....

Глава 8. **Расстояния на поверхностях и узлах**

8.1 Общие метрики на поверхностях .....
8.2 Внутренние метрики на поверхностях .....
8.3 Расстояния на узлах .....

Глава 9. **Расстояния на выпуклых телах, конусах и симплициальных комплексах**

9.1. Расстояния на выпуклых телах .....
9.2. Расстояния на конусах .....
9.3. Расстояния на симплициальных комплексах .....

ЧАСТЬ III. РАССТОЯНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

Глава 10. **Расстояния в алгебре**

10.1. Метрики на группах .....
10.2. Метрики на бинарных отношениях .....
10.3. Метрики решеток .....

Глава 11. **Расстояния на строках и перестановках**

11.1. Расстояния на строках общего вида .....
11.2. Расстояния на перестановках .....

Глава 12. **Расстояния на числах, многочленах и матрицах**

12.1. Расстояния на числах .....
12.2. Расстояния на многочленах .....
12.3. Расстояния на матрицах .....

Глава 13. **Расстояния в функциональном анализе**

13.1 Метрики на функциональных пространствах .....
13.2 Метрики на линейных операторах .....

Глава 14. **Расстояния в теории вероятностей**

14.1 Расстояния на случайных величинах .....
14.2 Расстояния на законах распределения .....

ЧАСТЬ IV. РАССТОЯНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Глава 15. **Расстояния в теории графов**

15.1 Расстояния на вершинах графа .....
15.2 Графы, определяемые в терминах расстояний .....
15.3 Расстояния на графах .....
15.4 Расстояния на деревьях .....

Глава 16. **Расстояния в теории кодирования**

16.1 Минимальное расстояние и его аналоги .....
16.2 Основные расстояния на кодах .....

Глава 17. **Расстояния и подобности в анализе данных**

17.1 Подобности и расстояния для числовых данных .....
17.2 Аналоги евклидова расстояния .....
17.3 Подобности и расстояния для бинарных данных .....
17.4 Корреляционные подобности и расстояния .....

Глава 18. **Расстояния в математической инженерии**

18.1 Расстояния в организации движения .....
18.2 Расстояния для клеточных автоматов .....
18.3 Расстояния в теории контроля .....
18.4 МОЕА расстояния .....

ЧАСТЬ V. РАССТОЯНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СФЕРЕ

Глава 19. **Расстояния на действительной и цифровой плоскостях**

19.1 Метрики на действительной плоскости . .....
19.2 Метрики на цифровой плоскости .....

Глава 20. **Расстояния диаграмм Вороного**

20.1 Классические расстояния Вороного .....
20.2 Расстояния Вороного на плоскости .....
20.3 Другие расстояния Вороного .....

Глава 21. **Расстояния в анализе образов и звуков**

21.1 Расстояния в анализе образов .....
21.2 Расстояния в анализе звуков .....

Глава 22. **Расстояния в Интернете и родственных сетях**

22.1 Сети, независимые от шкал .....
22.2 Семантические расстояния в сетевых структурах .....
22.3 Расстояния в Интернете и Веб-сети .....

ЧАСТЬ VI. РАССТОЯНИЯ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Глава 23. **Расстояния в биологии**

23.1 Генетические расстояния для данных о частоте генов .....
23.2 Расстояния для данных о ДНК .....
23.3 Расстояния для данных о белках .....
23.4 Другие биологические расстояния .....

Глава 24. **Расстояния в физике и химии**

24.1 Расстояния в физике .....
24.2 Расстояния в химии .....

Глава 25. **Расстояния в географии, геофизике и астрономии**

25.1 Расстояния в географии и геофизике .....
25.2 Расстояния в астрономии .....

Глава 26. **Расстояния в космологии и теории относительности**

26.1 Расстояния в космологии .....
26.2 Расстояния в теории относительности .....

ЧАСТЬ VII. РАССТОЯНИЯ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ

Глава 27. **Меры длины и шкалы**

27.1 Меры длины .....
27.2 Шкалы физических длин .....

Глава 28. **Нематематические и образные значения расстояния**

28.1 Расстояния, связанные с отчужденностью .....
28.2 Расстояния зрительного восприятия .....
28.3 Расстояния оборудования .....
28.4 Прочие расстояния .....

Литература .....

Предметный указатель .....

Часть I

МАТЕМАТИКА РАССТОЯНИЙ

Глава 1

Общие определения

1.1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Расстояние

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **расстоянием** (или **непохожестью**) на X, если для всех $x, y \in X$ выполняются условия:

1) $d(x, y) \geq 0$ (*положительная определенность*);

2. $d(x, y) = d(y, x)$ (*симметричность*);

3. $d(x, x) = 0$ (*рефлексивность*).

В топологии такая функция называется также симметрикой. Вектор от x к y, длина которого равняется $d(x, y)$, называется **перенесением**. Расстояние, равное квадрату метрики, называется *квадрансом*.

Для любого расстояния d функция, определяемая при $x \neq y$ как $D(x, y) = d(x, y) + c$, где $c = \max_{x, y, z \in X}(d(x, y) - d(x, z) - d(y, z))$, и $D(x, x) = 0$, является метрикой.

Пространство расстояний

Пространством расстояний (X, d) называется множество X, снабженное расстоянием d.

Подобность

Пусть X – произвольное множество. Функция $s : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **подобностью** на X, если s является *положительно определенной, симметричной*, и для любых $x, y \in X$ имеет место неравенство $s(x, y) \leq s(x, x)$, которое превращается в равенство тогда и только тогда, когда $x = y$.

Основными преобразованиями, дающими расстояние (непохожесть) d из подобности s, ограниченной 1 сверху, являются

$$d = 1 - s, \quad d = \frac{1 - s}{s}, \quad d = \sqrt{1 - s}, \quad d = \sqrt{2(1 - s^2)}, \quad d = \arccos s, d = -\ln s \text{ (см. гл. 4).}$$

Полуметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **полуметрикой** (или **псевдометрикой**) на X, если d является *положительно определенной, симметричной, рефлексивной*, и для любых $x, y, z \in X$ справедливо **неравенство треугольника**

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Для любого расстояния d равенство $d(x, x) = 0$ и **строгое неравенство треугольника** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ гарантируют, что d является полуметрикой.

Метрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой** на X, если для всех $x, y, z \in X$ выполняются условия:

1. $d(x, y) \geq 0$ (*положительная определенность*);
2. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (*аксиома тождественности самому себе*);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (*симметричность*);
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*неравенство треугольника*).

Метрическое пространство

Метрическим пространством (X, d) называется множество X, снабженное метрикой d.

Метрическая схема

Метрической схемой называется метрическое пространство с целочисленной метрикой.

Расширенная метрика

Расширенная метрика является обобщением понятия метрики: для d допустимо значение ∞.

Почти-метрика

Пусть X – произвольное множество. Расстояние d на X называется **почти-метрикой**, если неравенство

$$0 \leqslant d(x, y) \leq C(d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + \ldots + d(z_n, y))$$

выполнено, при некоторой константе $C > 1$, для всех различных $x, y, z_1, \ldots, z_n \in X$.

Метрика упрощенного пути

Пусть X – произвольное множество. Метрика d на X называется **метрикой упрощенного пути**, если для некоторого фиксированного $C > 0$ и для каждой пары точек $x, y \in X$ существует последовательность $x = x_0, x_1, \ldots, x_t = y$, для которой $d(x_{i-1}, x_i) \leq C$ при $i = 1, \ldots, t$, и

$$d(x, y) \geq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{t-1}, x_t) - C,$$

т.е. ослабленное неравенство треугольника $d(x, y) \leq \sum_{i=1}^{t} d(x_{i-1}, x_i)$ становится равенством с точностью до ограниченной ошибки.

Квазирасстояние

Пусть X – произвольное множество. Функция $s : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **квазирасстоянием** на X, если d является *положительно определенной* и *рефлексивной*.

Квазиполуметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **квазиполуметрикой** на X, если d является *положительно определенной* и *рефлексивной*, и для всех $x, y, z \in X$ справедливо о**риентированное неравенство треугольника**

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Квазиметрикой Альберта называется квазиполуметрика d на X со *слабой определенностью*: для всех $x, y \in X$ из равенства $d(x, y) = d(y, x)$ следует равенство $x = y$.

Слабой квазиметрикой называется квазиполуметрика d на X со *слабой симметрией*: для любых x, y X равенство $d(x, y) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $d(y, x) = 0$.

Квазиметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **квазиметрикой** на X, если для всех $x, y \in X$ имеет место неравенство $d(x, y) \geq 0$, которое становится равенством тогда и только тогда, когда $x = y$, и для всех $x, y, z \in X$ *справедливо* **ориентированное неравенство треугольника**

$$d(y, x) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Квазиметрическим пространством (X,d) называется множество X, снабженное квазиметрикой d.

Для любой квазиметрики d функции $\max\{d(x, y), d(y, x)\}$, $\min\{d(x, y), d(y, x)\}$ и $\dfrac{d(x,y)+d(y,x)}{2}$ являются (**эквивалентными**) метриками.

Неархимедовой квазиметрикой d называется квазирасстояние на X, которое удовлетворяет следующей усиленной версии ориентированного неравенства треугольника: для всех $x, y, z \in X$

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}.$$

$2k$-**гональное расстояние**

$2k$-*гональным расстоянием* называется расстояние d на X, удовлетворяющее $2k$-**гональному неравенству**

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leq 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} |b_i| = 2k$, и для всех различных элементов $x_1, ..., x_n \in X$.

Расстояние отрицательного типа

Расстоянием отрицательного типа называется расстояние d на X, которое является $2k$-гональным для любого $k \geq 1$, т.е. удовлетворяет **неравенству отрицательного типа**

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} b_i b_j d(x_i, x_j) \leq 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ и для всех различных элементов $x_1, ..., x_n \in X$.

Расстояние может быть расстоянием отрицательного типа, не являясь при этом полуметрикой. Кэли доказал, что метрика d является L_2-**метрикой** тогда и только тогда, когда d^2 – расстояние отрицательного типа.

$(2k + 1)$-**гональное расстояние**

$(2k + 1)$-**гональным расстоянием** называется расстояние d на X, которое удовлетворяет $(2k + 1)$-**гональному неравенству**

$$\sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j d(x_i, x_j) \le 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ и $\sum_{i=1}^{n} |b_i| = 2k+1$, и для всех различных элементов $x_1, ..., x_n \in X$.

$(2k+1)$-гональное неравенство с $k=1$ является обычным неравенством треугольника. $(2k+1)$-гональное неравенство влечет $2k$-**гональное неравенство**.

Гиперметрика

Гиперметрикой называется расстояние d на X, которое является $(2k+1)$-гональным для любого $k \ge 1$, т.е. удовлетворяет **гиперметрическому неравенству**

$$\sum_{1\le i<j\le n} b_i b_j d(x_i, x_j) \le 0$$

для всех $b \in \mathbb{Z}^n$ с $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$, и для всех различных элементов $x_1, ..., x_n \in X$. Любая гиперметрика является полуметрикой и **расстоянием отрицательного типа**. Любая L_1-**метрика** является гиперметрикой.

P-**метрика**

P-**метрикой** называется метрика d на X со значениями из множества [0, 1], которая удовлетворяет **корреляционному неравенству треугольника**

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z) - d(x, z)d(z, y).$$

Эквивалентное неравенство $1-d(x, y) \ge (1-d(x, z))(1-d(z, y))$ означает, что вероятность, скажем, достичь x из y через z либо равна величине $(1-d(x, z))(1-d(z, y))$ (независимо от возможности достичь z из x и y из z), либо превышает ее (положительная корреляция).

Метрика будет *P*-метрикой тогда и только тогда, когда она является **метрикой преобразования Шенберга** (см. гл. 4).

Птолемеева метрика

Птолемеевой метрикой называется метрика d на X, удовлетворяющая **неравенству Птолемея** (доказанному Птолемеем для евклидова пространства): для всех $x, y, u, z \in X$

$$d(x, y)d(u, z) \le d(x, u)d(y, z) + d(x, z)d(y, u).$$

Птолемеевым пространством называется *нормированное векторное пространство* $(V,\|.\|)$, в котором его метрика нормы $\|x-y\|$ является птолемеевой. Нормированное векторное пространство будет птолемеевым пространством тогда и только тогда, когда оно является **пространством со скалярным произведением**; таким образом, **метрика Минковского** (см. гл. 6) является евклидовой тогда и только тогда, когда она является птолемеевой.

Инволютивное пространство $(X \setminus z,\ \mathrm{d}_z)$, где $d(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{d(x,z)d(y,z)}$, является метрическим пространством для любого $z \in X$ тогда и только тогда, когда d является птолемеевой метрикой ([FoSC06]).

Для любой метрики d расстояние $\sqrt{d}$ является птолемеевой метрикой ([FoSC06]).

Слабая ультраметрика

Слабой ультраметрикой (или ***C*-псевдорасстоянием**) называется расстояние d на X, для которого при некоторой константе $C \geq 1$, неравенство

$$0 < d(x, y) \leq C \max\{d(\mathrm{x}, z), d(z, y)\}$$

выполняется для всех $x, y, z \in X$, $x \neq y$. Для такого расстояния d расстояние $d(x, y) = \inf \sum_i d(z_i, z_{i+1})$, где инфимум берется по всем последовательностям $x = z_0, \ldots, z_{n+1}$), является полуметрикой.

Термин **псевдорасстояние** используется также в некоторых приложениях для обозначения **псевдометрики, квазирасстояния, почти-метрики**, расстояния, которое может быть бесконечным, расстояния с ошибкой и т.п.

Ультраметрика

Ультраметрикой (или *неархимедовой метрикой*) называется метрика d на X, которая удовлетворяет усиленной версии неравенства треугольника:

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$$

для всех $x, y, z \in X$. Таким образом, по крайней мере два значения из $d(x, y)$, $d(z, y)$ и $d(x, z)$ совпадают.

Метрика d является ультраметрикой тогда и только тогда, когда ее **степенное преобразование** (см. гл. 4) d^{α} является метрикой для любого положительного действительного числа α. Любая ультраметрика удовлетворяет **неравенству четырех точек**. Метрика d является ультраметрикой тогда и только тогда, когда оно является **метрикой преобразования Фарриса** (см. гл. 4) **метрики неравенства четырех точек**.

Метрика неравенства четырех точек

Метрика d на X удовлетворяет условию **неравенства четырех точек** (или называется *аддитивной метрикой*), если имеет место усиленная версия неравенства треугольника: для всех $x, y, z, u \in X$

$$d(x, y) + d(z, u) \leq \max\{d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)\}.$$

Другими словами, из трех сумм $d(x, y) + d(z, u)$, $d(x, z) + d(y, u)$ и $d(x, u) + d(y, z)$ две наибольшие совпадают.

Метрика удовлетворяет неравенству четырех точек тогда и только тогда, когда она является **древовидной** метрикой.

Любая метрика, удовлетворяющая неравенству четырех точек, является *птолемеевой метрикой* и $\boldsymbol{l}_1$**-метрикой**.

Кустарниковая метрика – метрика, для которой все неравенства четырех точек являются равенствами, т.е. равенство $d(x, y) + d(u, z) = d(x, u) + d(y, z)$ справедливо при любых значениях $u, x, y, z \in X$.

Метрика ослабленного неравенства четырех точек

Метрика d на X удовлетворяет условию **ослабленного неравенства четырех точек**, если, для всех $x, y, z \in X$ из трех сумм

$$d(x, y) + d(z, u), d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)$$

по крайней мере две (не обязательно наибольшие) совпадают.

Метрика удовлетворяет ослабленному неравенству четырех точек тогда и только тогда, когда она является ослабленной **древовидной метрикой**.

δ-гиперболическая метрика

Если $\delta \geq 0$, то метрика d на множестве X называется **δ-гиперболической**, если она удовлетворяет **δ-гиперболическому неравенству Громова** (еще одно ослабление **неравенства четырех точек**): для всех $x, y, z, u \in X$

$$d(x, y) + d(z, u) \leq 2\delta + \max\{d(x, z) + d(y, u), d(x, u) + d(y, z)\}.$$

Метрическое пространство (X,d) является δ-гиперболическим тогда и только тогда, когда

$$(x.y)_{x_0} \geq \min\left\{(x.z)_{x_0}, (y.z)_{x_0}\right\} - \delta$$

для всех $x, y, z \in X$ и для любого $x_0 \in X$, где $(x,y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x_0,x) + d(x_0,y) - d(x,y))$ – **произведение Громова** точек x и y из X относительно базовой точки $x_0 \in X$.

Метрическое пространство (X, d) является 0-гиперболическим тогда и только тогда, когда d удовлетворяет **неравенству четырех точек**. Каждое ограниченное метрическое пространство, имеющее диаметр D, является D-гиперболическим. n-мерное *гиперболическое пространство* является $\ln 3$-гиперболическим.

Подобность произведения Громова

Пусть (X, d) – метрическое пространство с фиксированной точкой $x_0 \in X$. **Подобностью произведения Громова** (или *произведением Громова, ковариантностью*) $(.)_{x_0}$ называется подобность на X, определяемая по формуле

$$(x.y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x_0,x) + d(x_0,y) - d(x,y)).$$

Если (X, d) является деревом, то $(x.y)_{x_0} = d(x_0[x, y])$. Если (X,d) – **полуметрическое пространство меры**, т.е. $d(x, y) = \mu(x \Delta y)$ для борелевой меры μ на X, то $(x.y)_{\emptyset} = \mu(x \cap y)$. Если d является **расстоянием отрицательного типа**, т.е. $d(x,y) = d_E^2(x,y)$ для подмножества X евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, то $(x.y)_0$ будет обычным *скалярным произведением* на $\mathbb{E}^n$ (см. **Метрика преобразования Фарриса**, гл. 4).

1.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С РАССТОЯНИЕМ, И ЧИСЛОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Метрический шар

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство. **Метрическим шаром** (или *замкнутым метрическим шаром*) с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$. **Открытым метрическим**

шаром с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $B(x_0, r) = \{x_0 \in X : d(x_0, x) < r\}$.

Метрической сферой с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество $S(x_0, r) = \{x_0 \in X : d(x_0, x) = r\}$.

Для **метрики нормы** на *n-мерном нормированном векторном пространстве* $(V, \|\cdot\|)$ метрический шар $\overline{B}^n = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ называется *единичным шаром*, а множество $Sn-1 = \{x \in V : \|x\| = 1\}$ – *единичной сферой* (или *единичной гиперсферой*). В двумерном векторном пространстве метрический шар (открытый или замкнутый) называется *метрическим диском* (соответственно открытым или замкнутым).

Метрическая топология

Метрическая топология – *топология* на X, порождаемая метрикой d на X.

Если (X,d) – произвольное метрическое пространство, определим *открытое множество* в X как произвольное объединение (конечного или бесконечного числа) открытых метрических шаров $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, $x \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. *Замкнутое множество* определяется теперь как дополнение открытого множества. Метрической топологией на (X,d) называется множество всех открытых в X множеств. Топологическое пространство, которое может быть получено таким образом из метрического пространства, называется **метризуемым пространством**.

Метризационные теоремы – теоремы, дающие достаточные условия метризуемости топологического пространства.

С другой стороны, термин *метрика* указывает скорее на связь с мерой, нежели с расстоянием, применительно к ряду важнейших математических определений, например, в *метрической теории чисел, метрической теории функций, метрической транзитивности*.

Замкнутый метрический интервал

Пусть $x, y \in X$ – две различные точки метрического пространства (X,d). **Замкнутым метрическим интервалом** между x и y называется множество

$$I(x, y) = \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}.$$

Основной граф метрического пространства

Основной граф (или граф соседства) метрического пространства (X,d) – граф с множеством вершин X, в котором xy является ребром, если $I(x, y) = \{x, y\}$, т.е. не существует третьей точки $z \in X$, для которой выполнялось бы равенство $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

Метрическое пространство, монотонное относительно расстояния

Метрическое пространство (X,d) называется пространством, **монотонным относительно расстояния**, если для любого интервала и существует $I(x, x')$ и $y \in X \backslash I(x, x')$ существует $x'' \in X(x, x')$ такое что $d(y, x'') > d(x, x')$.

Метрический треугольник

Три различные точки $x, y, z \in X$ метрического пространства (X,d) образуют **метрический треугольник**, если **замкнутые метрические интервалы** $I(x, y)$, $I(z, x)$ и $I(z, x)$ пересекаются только в общих концевых точках.

Модулярное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **модулярным**, если для любых трех различных точек $x, y, z \in X$ существует $u \in I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$.

Не следует смешивать это с **модулярным расстоянием** (см. гл. 10) и **метрикой модулюса** (см. гл. 6).

Метрический четырехугольник

Четыре различные точки $x, y, z, u \in X$ произвольного метрического пространства (X,d) образуют **метрический четырехугольник**, если $x, z \in I(y, u)$ и $y, u \in I(x, z)$. Для такого метрического четырехугольника будут иметь место равенства $d(x, y) = d(z, u)$ и $d(x, u) = d(y, z)$.

Метрическое пространство (X,d) называется *слабо сферическим*, если для любых трех различных точек $x, y, z \in X$ с $y \in I(x, z)$ существует $u \in X$, такое что x, y, z, u образуют метрический четырехугольник.

Связное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **связным**, если его нельзя разбить на два непустых *открытых* множества (см. **Связное пространство**, гл. 2).

Более сильным свойством является путь – связность, при которой любые две точки могут быть соединены **путем**.

Метрическая кривая

Метрическая кривая (или просто *кривая*) γ в метрическом пространстве (X,d) представляет собой непрерывное отображение $\gamma : I \to X$ интервала I из $\mathbb{R}$ в X. Кривая называется **дугой** (или **путем**, *простой кривой*), если она является инъективной. Кривая $\gamma : [a, b] \to X$ называется **жордановой кривой** (или *простой замкнутой кривой*), если она не пересекает саму себя и $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Длина $l(\gamma)$ кривой $\gamma : [a, b] \to X$ определяется формулой

$$l(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{1\le i\le n} d(\gamma(t_i),\ \gamma(t_{i-1})) : n \in \mathbb{N},\ a = t_0 < \ldots < t_n = b \right\}.$$

Спрямляемая кривая – это кривая конечной длины. Метрическое пространство (X,d), в котором каждые две точки могут быть соединены спрямляемой кривой, называется ***C*-квазивыпуклым метрическим пространством** при наличии некоторой константы $C \ge 1$, такой что каждая пара $x, y \in X$ может быть соединена спрямляемой кривой максимальной длины $Cd(x, y)$. Если $C = 1$, то эта длина равна $d(x, y)$, т.е. пространство (X,d) является **геодезическим** (или *строго внутренним*) метрическим пространством.

Геодезическая

Для произвольного метрического пространства (X,d) **геодезической** называется локально кратчайшая **метрическая кривая**, т.е. локально изометрическое вложение $\mathbb{R}$ в X.

Геодезическим отрезком (или *кратчайшим путем*) $[x, y]$ от x до y является изометрическое вложение $\gamma : [a, b] \to X$ с $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$.

Метрическая прямая – геодезическая, которая является минимальной между двумя любыми ее точками; она представляет собой изометрическое вложение всего $\mathbb{R}$ в X. **Метрический луч** и **метрический большой круг** представляют собой изометрические вложения в X соответственно полупрямой $\mathbb{R}_{\ge 0}$ и окружности $S(0, r)$.

Геодезическим метрическим пространством называется метрическое пространство, в котором две любые точки соединены геодезическим отрезком. Оно называется **геодезически полным**, если каждый такой отрезок является поддугой метрической прямой.

Геодезическая выпуклость

Для произвольного **геодезического** метрического пространства (X, d) и подмножества $M \subset X$ множество M называется **геодезически выпуклым** (или **выпуклым**), если для любых двух точек из M существует соединяющий их геодезический отрезок, который полностью принадлежит M; оно называется **локально выпуклым**, если такой отрезок существует для любых двух достаточно близких точек множества M.

Радиусом инъективности множества M называется наименьшее число r, такое что для двух любых точек из M, расстояние между которыми $<r$, существует единственный соединяющий их геодезический отрезок, который полностью принадлежит M.

Множество M называется **вполне выпуклым**, если для любых двух его точек каждый соединяющий их геодезический отрезок полностью принадлежит M. Для данной точки $x \in X$ *радиусом выпуклости* называется радиус наибольшего вполне выпуклого метрического шара с центром в точке x.

Выпуклость Буземана

Геодезическое метрическое пространство (X, d) называется **выпуклым по Буземану** (или **глобально неположительно искривленным по Буземану**), если для любых трех точек $x, y, z \in X$ и срединных точек $m(x, z)$ и $m(y, z)$ выполняется условие

$$d(m(x,z),\ m(y,z)) \le \frac{1}{2} d(x,y).$$

Другими словами, расстояние $D(c_1, c_2)$ между любыми геодезическими отрезками и $c_1 = [a_1, b_1]$ является *выпуклой функцией*. (Действительная функция f, определенная на некотором интервале, называется *выпуклой*, если условие $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ выполнено для любых x, y и $\lambda \in (0, 1)$.)

Плоская евклидова полоса $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\}$ является **гиперболической по Громову**, но не является выпуклой по Буземану. Две любые точки полного метрического пространства, выпуклого по Буземану, связаны единственным геодезическим отрезком.

Геодезическое метрическое пространство (X,d) является **локально выпуклым по Буземану** (Буземан, 1948), если вышеуказанное неравенство выплоняется локально.

Любое **локально CAT(0)** метрическое пространство (см. гл. 6) является локально выпуклым по Буземану и любое геодезическое **CAT(0)** метрическое пространство является выпуклым по Буземану, но обратное неверно.

Выпуклость по Менгеру

Метрическое пространство (X,d) называется **выпуклым по Менгеру**, если для двух различных точек $x, y \in X$ существует третья точка $z \in X$, для которой $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$, т.е. условие $|I(x, y)| > 2$ имеет место для **замкнутого метрического интервала** $I(x, y) = \{z \in X : d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}$. Метрическое

пространство (X,d) называется **строго выпуклым по Менгеру**, если такая точка z является единственной для всех $x, y \in X$.

Подмножество $M \subset X$ называется ***d*-выпуклым множеством** (Менгер, 1928), если для любых различных точек $x, y \in X$ имеет место включение $I(x, y) \subset M$. Функция $f: M \to \mathbb{R}$, определенная на d-выпуклом множестве $M \subset X$, называется ***d*-выпуклой функцией**, если для любого $z \in I(x, y) \subset M$ выполняется условие

$$f(z) \le \frac{d(y,z)}{d(x,y)} f(x) + \frac{d(x,z)}{d(x,y)} f(y).$$

Срединная выпуклость

Метрическое пространство (X,d) называется **срединно выпуклым** (или *допускающим срединное отображение*), если для любых различных точек $x, y \in X$ существует третья точка $z \in X$, называемая *срединной точкой* $m(x, y)$, для которой выполняются равенства $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ и $d(x,z) = \frac{1}{2} d(x,y)$.

Отображение $m : X \times X \to X$ называется **срединным отображением** (см. **Срединное множество**); оно будет единственным, если указанная выше точка z единственна для всех $x, y \in X$.

Полное метрическое пространство является **геодезическим** метрическим пространством тогда и только тогда, когда оно срединно выпукло.

Шаровая выпуклость

Срединно выпуклое метрическое пространство (X,d) называется **шарово выпуклым**, если неравенство

$$d\big(m(x,y),\ z\big) \le \max\big\{d(x,z),\ d(y,z)\big\}$$

справедливо для всех $x, y, z \in X$ и любого срединного отображения $m(x, y)$.

Шаровая выпуклость влечет, что все метрические шары вполне выпуклы, и, в случае геодезического метрического пространства, наоборот.

Метрическое пространство $(\mathbb{R}^2,\ d(x,y) = \sum_{i=1}^{2} \sqrt{|x_i - y_i|})$ шарово выпуклым не является.

Расстоянная выпуклость

Срединно выпуклое метрическое пространство (X,d) называется **расстоянно выпуклым**, если

$$d(m(x,y),z) \le \frac{1}{2}(d(x,z) + d(y,z)).$$

Геодезическое метрическое пространство является расстоянно выпуклым тогда и только тогда, когда сужение функции расстояния $d(x, \cdot)$, $x \in X$ на каждый геодезический отрезок является выпуклой функцией.

Расстоянная выпуклость порождает **шаровую выпуклость** и, для случая метрического пространства, выпуклого по Буземану, наоборот.

Метрическая выпуклость

Метрическое пространство (X,d) называется **метрически выпуклым**, если для любого различных точек $x, y \in X$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ существует третья точка

$z = z(x, y, \lambda) \in X$, для которой $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ и $d(x, z) = \lambda d(x, y)$. Метрическая выпуклость порождает **выпуклость по Менгеру**.

Метрическое пространство (X,d) называется **строго метрически выпуклым**, если такая точка $z(x, y, \lambda)$ является единственной для всех $x, y \in X$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Метрическое пространство (X,d) называется **сильно метрически выпуклым**, если для любых различных точек $x, y \in X$ и любых $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$ существует третья точка $z = z(x, y, \lambda) \in X$, для которой $d(z(x, y, \lambda_1), z(x, y, \lambda_2) = |\lambda_1 - \lambda_2| d(x, y)$. Сильная метрическая выпуклость порождает метрическую выпуклость, и каждое полное метрическое пространство, выпуклое по Менгеру, является сильно метрически выпуклым.

Метрическое пространство (X,d) называется **почти выпуклым** (Манделкерн, 1983), если для любых различных точек $x, y \in X$ и любых $\lambda, \mu > 0$, таких что $d(x, y) < \lambda + \mu$, существует третья точка $z \in X$, для которой $d(x, z) < \lambda$ и $d(z, y) < \mu$, т.е. $z \in B(x, \lambda) \cap B(y, \mu)$. Метрическая выпуклость порождает почти выпуклость.

Выпуклость по Такахаши

Метрическое пространство (X,d) называется **выпуклым по Такахаши**, если для любых различных точек $x, y \in X$ и любого $\lambda \in (0, 1)$ существует третья точка $z = z(x, y, \lambda) \in X$, такая что неравенство $d(z(x, y, \lambda), u) \le \lambda d(x, u) + (1 - \lambda) d(y, u)$ имеет место для всех $u \in X$. Любое выпуклое подмножество нормированного пространства является метрическим пространством, выпуклым по Такахаши, с $z(x, y, \lambda) = \lambda d + (1 - \lambda) y$.

Множество $M \subset X$ является *выпуклым по Такахаши*, если $z(x, y, \lambda) \in M$ для всех $x, y \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$. Такахаши доказал в 1970 г., что в метрическом пространстве, выпуклом по Такахаши, все замкнутые метрические шары, открытые метрические шары и произвольное пересечение подмножеств, выпуклых по Такахаши, являются выпуклыми по Такахаши.

Гипервыпуклость

Метрическое пространство (X,d) называется **гипервыпуклым**, если оно метрически выпукло и его метрические шары обладают *бесконечным свойством Хелли*, т.е. любая система взаимно пересекающихся закрытых шаров в X имеет непустое пересечение. Метрическое пространство (X,d) является гипервыпуклым тогда и только тогда, когда оно – **инъективное** метрическое пространство.

Пространства l_∞^m, l_∞ и L_∞ являются гипервыпуклыми, а l_2 – нет.

Метрическая энтропия

Пусть $\varepsilon > 0$. **Метрическая энтропия** (или ε-*энтропия*) $H_\varepsilon(M, X)$ подмножества $M \subset X$ метрического пространства (X,d) определяется (Колмогоров, 1956) как

$$H_\varepsilon(M, X) = \log_2 N_\varepsilon(M, X),$$

где $N_\varepsilon(M, X)$ является наименьшим количеством точек в ε-**сети** (или ε-*накрытии*) для метрического пространства (M, d), т.е. в множестве точек, таких что объединение открытых ε-шаров с центрами в указанных точках накрывает M.

Понятие метрической энтропии для *динамической системы* является одним из важнейших инвариантов эргодической теории.

Метрическая размерность

Для метрического пространства (X,d) и любого действительного числа $q > 0$ пусть $N_x(q)$ будет минимальным количеством множеств с диаметром, не пре-

восходящим q, которые необходимы для накрытия X (см. **Метрическая энтропия**). Число $\lim\limits_{q\to 0}\dfrac{\ln(N(q)}{\ln(1/q)}$ (если оно существует) называется **метрической размерностью** (или **размерностью Минковского–Балиганда**, *размерностью Минковского, упаковочной размерностью, бокс-размерностью* пространства X.

Если указанного выше предела не существует, то рассматриваются следующие понятия размерности:

1. Число $\lim\limits_{q\to 0}\dfrac{\ln(N(q)}{\ln(1/q)}$ называется ***нижней метрической размерностью*** (или *нижней бокс-размерностью, размерностью Понтрягина–Шнирелмана*, **нижней размерностью Минковского**).

2. Число $\lim\limits_{q\to 0}\dfrac{\ln(N(q)}{\ln(1/q)}$ называется **верхней метрической размерностью** (или *энтропической размерностью*, **размерностью Колмогорова–Тихомирова**, *верхней бокс-размерностью*).

Ниже приводятся пять примеров других, менее значимых понятий метрической размерности, встречающиеся в математической литературе.

1. (Базисная) *метрическая размерность* метрического пространства, – минимальное кардинальное число его **метрического базиса**, т.е. его наименьшего подмножества S, такого что не существует двух точек с равными расстояниями до всех точек из S.

2. (Равнобочная) *метрическая размерность* метрического пространства – максимальное кардинальное число его *эквидистантного* подмножества, т.е. такого, что любые две его различные точки равноотстоят друг от друга. Для нормированного пространства эта размерность равна максимальному числу попарно касающихся параллельных переносов его единичного шара.

3. Для любого $c > 1$ *метрической размерностью* (по нормированному пространству) $\dim_c(X)$ конечного метрического пространства (X,d) называется наименьшая размерность действительного *нормированного пространства* $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$, такого что существует вложение $f: X \to V$ с $\dfrac{1}{c}d(x,y) \le \|f(x)-f(y)\| \le d(x,y)$.

4. (Евклидовой) *метрической размерностью* конечного метрического пространства (X,d) называется наименьшая размерность n евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, такого что $(X, f(d))$ является его метрическим подпространством, где минимум берется по всем непрерывным монотонно возрастающим функциям $f(t)$ от $t \ge 0$.

5. *Степенью многомерности* метрического пространства называется число $\dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$, где μ и σ^2 являются средним и отклоняющимся значениями его гистограммы расстояний; данное понятие используется для выборки информации при поиске отношений близости.

Ранг метрического пространства

Рангом Минковского метрического пространства (X,d) называется максимальная размерность нормированного векторного пространства $(\mathrm{V}, \|\cdot\|)$, такого что существует изометрическое вложение $(\mathrm{V}, \|\cdot\|) \to (X,d)$.

Евклидовым рангом метрического пространства (X,d) называется максимальная размерность *n-мерной плоскости* в нем, т.е. евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, такого что существует изометрическое вложение $\mathbb{E}^n \to (X,d)$.

Квазиевклидовым рангом метрического пространства (X,d) называется максимальная размерность *n-мерной квазиплоскости* в нем, т.е. евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, такого что в нем существует **квазиизометрия** $\mathbb{E}^n \to (X,d)$. Ранг любого **метрического пространства**, **гиперболического по Громову**, равен 1.

Размерность Хаусдорфа

Для метрического пространства (X,d) и любых действительных $p,\ q > 0$ пусть $M_p^q(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\operatorname{diam}(A_i)\right)^p$, где инфимум берется по всем счетным покрытиям $\{A_i\}_i$ множества X с диаметром A_i меньше q. **Размерность Хаусдорфа** (или *размерность Хаусдорфа-Бесиковича, размерность емкости*, **фрактальная размерность**) $\dim_{\text{Haus}}(X,d)$ множества X определяется как

$$\inf\left\{p : \lim_{q\to 0} M_p^q(X) = 0\right\}.$$

Любое счетное метрическое пространство имеет размерность Хаусдорфа, равную 0; размерность Хаусдорфа для евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ равна n.

Для каждого **вполне ограниченного** метрического пространства его размерность Хаусдорфа ограничена **метрической размерностью** сверху и **топологической размерностью** снизу.

Топологическая размерность

Для любого компактного метрического пространства (X,d) его **топологическая размерность** (или **размерность лебегова покрытия**) определяется как

$$\inf_{d'}\left\{\dim_{\text{Haus}}(X,d')\right\},$$

где d' – любая метрика на X, топологически эквивалентная d, а $\dim_{\text{Haus}}$ – **размерность Хаусдорфа**.

В общем случае **топологической размерностью** топологического пространства X называется наименьшее целое число n, такое что для любого конечного открытого покрытия множества X существует конечное открытое подпокрытие (т.е. подразделение), такое что ни одна из точек множества X не принадлежит более чем $n+1$ элементам.

Фрактал

Топологическая размерность любого метрического пространства не превышает его **размерности Хаусдорфа. Фракталом** называется метрическое пространство, для которого это неравенство является строгим. (Первоначально Мандельбройт определил фрактал как точечное множество с нецелочисленной размерностью Хаусдорфа). Например, *множество Кантора*, рассматриваемое как компактное метрическое подпространство пространства $\mathbb{R}$, $d(x,\ y) = |x-y|$), обладает размерностью Хаусдорфа $\frac{\ln 2}{\ln 3}$; (см. другую **Канторову метрику** на нем в гл. 11, 18). Другой классический фрактал, *ковер Серпинского* множества $[0,1] \times [0,1]$, являет-

ся **полным геодезическим** метрическим подпространством пространства $(\mathbb{R}^2, d(x, y) = \|x-y\|_1)$.

Термин *фрактал* используется также в более общем смысле для обозначения *самоподобности* (т.е., грубо говоря, подобия при любом масштабе) объекта (обычно – подмножества $\mathbb{R}^n$).

Размерность Ассуад–Нагата

Размерностью Ассуада–Нагаты метрического пространства (X,d) называется наименьшее действительное число n (или ∞, если такого числа n не существует), для которого существует константа $C > 0$, такая что для всех $s > 0$ имеется покрытие X его подмножествами с диаметрами $\le C\,s$, в котором каждое подмножество X диаметра $\le s$ пересекается с $\le n + 1$ элементами покрытия.

Размерность Ассуада–Нагаты будет конечной тогда и только тогда, когда d – **метрика удвоения**.

Топологическая размерность метрического пространства не превышает его размерности Ассуада–Нагаты.

Размерность удвоения

Размерностью удвоения метрического пространства (X,d) называется наименьшее целое число N (или ∞, если такого числа N не существует), такое что каждый метрический шар (или, скажем, множество конечного диаметра) может быть покрыт семейством не более 2^N метрических шаров (или соответственно множеств) с половинным диаметром. Если (X,d) имеет конечную размерность удвоения, то d называется **метрикой удвоения**.

Размерность Вольберга–Конягина

Размерностью Вольберга–Конягина метрического пространства (X,d) называется наименьшая константа $C > 1$ (или ∞, если такого числа C не существует), для которой X обладает *мерой удвоения*, т.е. борелевской мерой μ, такой что

$$\mu(\overline{B}(x,2r)) \le C\mu(\overline{B},r))$$

для всех $x \in X$ и $r > 0$. Метрическое пространство (X,d) обладает мерой удвоения тогда и только тогда, когда d является **метрикой удвоения**, и любая полная метрика удвоения обладает мерой удвоения.

Константой Каргера–Рула метрического пространства (X,d) называется наименьшая константа $c > 1$ (или ∞, если такого числа c не существует), для которой

$$\left|\overline{B}(x,2r)\right| \le c\left|\overline{B}(x,r)\right|$$

для всех $x \in X$ и $r > 0$. Если она конечна (скажем, равна t), то максимальное значение **размерности удвоения** метрического пространства (X,d) составит $4t$.

Асимптотическая размерность

Понятие **асимптотической размерности** метрического пространства (X,d) было введено Громовым. Это – наименьшее число n, такое что для любого $s > 0$ существуют константа $D = D_{(s)}$ и покрытие X его подмножествами с диаметрами, не превосходящими D, в котором каждое подмножество X диаметра $\le s$ пересекается с $\le n + 1$ элементами покрытия.

Размерность Годсил–Маккея

Метрическое пространство (X,d) имеет **размерность Годсил–Маккея** $n \ge 0$, если существуют элемент $x_0 \in X$ и две положительные константы c и C, такие что

неравенство $ck^n \le |\{x \in X : d(x, x_0) \le k\}| \le Ck^n$ имеет место для каждого целого числа $k \geqslant 0$. Данное понятие было введено в [GoMc80] для обозначения **метрики пути** счетного локально конечного графа. Было доказано, что если группа $\mathbb{Z}^n$ действует на вершинах графа точно и с конечным числом орбит, то данная размерность равна n.

Длина метрического пространства

Длиной Фремлина метрического пространства называется одномерная внешняя мера Хаусдорфа на X.

Длиной Хейкмана $lng(Y)$ подмножества $M \subset X$ метрического пространства (X,d) называется $\sup\{lng(M') : M' \subset M, |M'| < \infty\}$. Здесь $lng(\varnothing) = 0$ и, для конечного подмножества $M' \subset X$, $lng(M') = \min \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i)$, где минимум берется по всем последовательностям $x_0, ..., x_n$, таким что $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\} = M'$.

Длиной Шехтмана конечного метрического пространства (X,d) называется $\inf \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ по всем таким последовательностям $a_1, ..., a_n$ положительных чисел, что существует последовательность $X_0, \ldots, X_n$ разбиений X со следующими свойствами:

1. $X_0 = \{X\}$ и $X_n = \{\{x\} : x \in X\}$;
2. X_i подразбивает X_{i-1} для $i = 1, \ldots, n$;
3. Для $i = 1,\ldots, n$ и $B,\ C \subset A \in X_{i-1}$ с $B,\ C \in X_i$ существует такое однозначное отображение f из B на C, что $d(x, f)(x)) \le a_i$ для всех $x \in B$.

Тип метрического пространства

Тип по Енфло метрического пространства (X,d) равен p, если существует такая константа $1 \le C < \infty$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждой функции $f : \{-1,1\}^n \to X$ имеет место неравенство

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} d^p\big(f(\varepsilon),\ f(-\varepsilon)\big) \le$$

$$\le C^p \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} d^p(f(\varepsilon_1,...,\varepsilon_{j-1},\varepsilon_{j+1},...,\varepsilon_n),\ f(\varepsilon_1,...,\varepsilon_{j-1},-\varepsilon_j,...,\varepsilon_n)).$$

Банахово пространство $(V, \|\cdot\|)$ типа p по Енфло имеет *тип p по Радемахеру*, т.е. для всех $x_1,\ldots,x_n \in V$ выполняется неравенство

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \right\|^p \le C^p \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^p.$$

Для данного метрического пространства (X,d) *симметричной цепью Маркрова на* X является цепь Маркова $\{\mathbb{Z}_l\}_{l=0}^{\infty}$ на пространстве состояний $\{x_1,\ldots,x_m\} \subset X$ с таким симметричным переносом $m \times m$ матрицы $((a_{ij}))$ что $P(Z_{l+1} = x_j : Z_l = x_j) = a_{ij}$ и $P(Z_0 = x_i) = \dfrac{1}{m}$ для всех целых $1 \le i, j \le m$ и $l \ge 0$. Метрическое пространство (X,d)

имеет **тип** p по **Маркову** (Болл, 1992), если $\sup_T M_p(X, T) < \infty$, где $M_p(X, T)$ – такая наименьшая константа $C > 0$, что для каждой симметричной цепи Маркова $\{\mathbb{Z}_l\}_{l=0}^{\infty}$ на X выполняется, в терминах ожидаемой величины (среднего значения) $\mathbb{E}[X] = \sum_x xp(x)$ дискретной случайной величины X, неравенство

$$\mathbb{E}d^p(Z_T, Z_0) \le TC^p\mathbb{E}d^p(Z_1, Z_0).$$

Метрическое пространство типа p по Маркову имеет тип p по Енфло.

Сила метрического пространства

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство с s различными ненулевыми значениями $d_{x,y}$. Его сила есть наибольшее число t, такое что для любых целых $p,\ q \ge 0$ с $p + q \le t$ существует многочлен $f_{pq}(s)$ степени, не превосходящей $\min\{p, q\}$, такой что $\left((d_{ij}^{2p})\right)\left((d_{ij}^{2q})\right) = \left(\left(f_{pq}(d_{ij}^2)\right)\right)$.

Метрический функционал

Для случая конечного подмножества $M \subset X$ в метрическом пространстве (X,d) примеры **метрического функционала** на M приведены ниже.

***p*-энергия** множества M есть число $\sum_{x,y\in M, x\ne y} \frac{1}{d^p(x,y)}$; обычно $p = 1{,}2$.

Среднее расстояние множества M есть число $\frac{1}{|M|(|M|-1)} \sum_{x,y\in M} d(x,y)$.

Индекс Винера множества M (применяемый в химии) есть число $\frac{1}{2}\sum_{x,y\in M} d(x,y)$.

Центр массы конечного множества M есть точка $x \in M$, минимизирующая функционал $\sum_{y\in M} d^2(x,y)$.

Число встречи

Числом встречи (или *числом Гросса, магическим числом*) метрического пространства (X,d) называется положительное действительное число $r(X,d)$ (если такое существует), такое что для каждого целого n и любых (не обязательно различных) $x_1,\ldots,x_n \in X$ существует $x \in X$, для которого

$$r(X,d) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x).$$

Если для метрического пространства (X,d) число встречи $r(X,d)$ существует, то говорят, что (X,d) имеет **свойство среднего расстояния** и его **магическая константа** определяется как $\frac{r(X,d)}{\operatorname{diam}(X,d)}$, где $\operatorname{diam}(X,d) = \max_{x,y\in X} d(x,y)$ – **диаметр** (X,d).

Каждое компактное связное метрическое пространство обладает свойством среднего расстояния. *Единичный шар* $\{x \in V : \|x\| \le 1\}$ **банахова пространства** $(V, \|\cdot\|)$ имеет свойство среднего расстояния с числом встречи 1.

Порядок конгруэнтности

Метрическое пространство (X,d) обладает **порядком конгруэнтности** n, если каждое конечное метрическое пространство, не являющееся **изометрически вложимым** в (X,d), имеет подпространство, содержащее не более n точек, которое не может быть изометрически вложено в (X,d).

Радиус метрического пространства

Пусть (X,d) – ограниченное метрическое пространство и $M \subset X$. **Метрическим радиусом** (или **радиусом**) множества M называется инфимум радиусов метрических шаров, содержащих M, т.е. $\inf\limits_{x\in M}\sup\limits_{y\in M} d(x,y)$. Некоторые авторы называют *радиусом* половину **диаметра**.

Радиусом покрытия множества $M \subset X$ называется $\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in M} d(x,y)$, т.е. наименьшее число R, такое что открытые метрические шары радиуса R с центрами в элементах M покрывают X. Его называют еще **ориентированным хаусдорфовым расстоянием** от X к M. Множество M называется ε-*покрытием*, если его радиус покрытия не превышает ε. Для данного положительного числа m **минимаксимальная расстоянная конфигурация размера** m есть m-подмножество X с наименьшим радиусом покрытия.

Радиусом уплотнения множества $M \subset X$ называется такое наибольшее r, что открытые метрические шары радиуса r с центрами в элементах M являются попарно непересекающимися, т.е. $\min\limits_{y\in X}\min\limits_{y\in M} d(x,y) > 2r$. Множество M называется ε-уплотнением, если его радиус уплотнения не менее ε. Для данного положительного числа m **максимальная расстоянная конфигурация размера** m есть m-подмножество множества X с наибольшим радиусом уплотнения.

Размер наименьшего ε-*покрытия* не превосходит размера наибольшего $\frac{\varepsilon}{2}$-уплотнения. $\frac{\varepsilon}{2}$-уплотнение M является *нерасширяемым*, если $M \cup \{x\}$ не является $\frac{\varepsilon}{2}$-уплотнением для каждого $x \in X\backslash M$, т.е. M является также ε-**сетью**.

Эксцентриситет

Пусть (X,d) – ограниченное метрическое пространство. **Эксцентриситетом** точки $x \in X$ называется число $e(x) = \max\limits_{y\in X} d(x,y)$. Числа $\max\limits_{x\in X} e(x)$ и $\min\limits_{x\in X} e(x)$ называются соответственно **диаметром** и **радиусом** (X,d).

Точки $x \in X$ с максимальным $e(x)$ называются *периферийными точками*. Множества $\{x \in X : e(x) \le e(z)$ для любого $z \in X\}$ и $\{x \in X : \sum\limits_{y\in X} d(x,y) \le \sum\limits_{y\in X} d(z,y)$ для любого $z \in X\}$ называются соответственно **метрическим центром** (или *центром эксцентриситета, центром*) и **метрической медианой** (или *центром расстояния*) пространства (X,d).

k-подмножество называется $M \subset X$ $\boldsymbol{k}$-**медианой**, если она минимизирует сумму $\sum\limits_{x\in X} d(x,M)$, где $d(x,M)$ – **расстояние между точкой и множеством**.

Метрический диаметр

Метрический диаметр (или **диаметр**, ширина) $\mathrm{diam}(M)$ подмножества $M \subseteq X$ метрического пространства (X,d) определяется как

$$\sup_{x,y \in M} d(x,y).$$

Граф диаметра множества M имеет вершинами все точки $x \in M$ с $d(x,y) = \mathrm{diam}(M)$ для некоторого $y \in M$, а в качестве ребер – пары его вершин на расстоянии $\mathrm{diam}(M)$ в (X,d).

Метрическое пространство (X,d) называется **антиподальным метрическим пространством** (или *диаметральным метрическим пространством*), если для любого $x \in X$ существует диаметрально противоположная точка – его антипод, т.е. единственное $x' \in X$, такое что интервал $I(x,x')$ совпадает с X.

Хроматические числа метрического пространства

Для данного метрического пространства (X,d) и некоторого множества D положительных действительных чисел ***D*-хроматическим числом** пространства (X,d) называется стандартное *хроматическое число* **графа *D*-расстояния** для (X,d), т.е. графа с множеством вершин X и множеством ребер $\{xy : d(x,y) \in D\}$. Обычно (X,d) является l_p*-пространством* и $D = \{1\}$ (**хроматическое число Бенда–Перлеса**) или $D = [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ (хроматическое число *графа* ε*-единичного расстояния*).

Для метрического пространства (X,d) **полихроматическим числом** называется минимальное число цветов, необходимых для окрашивания всех точек $x \in X$ таким образом, чтобы для каждого класса цвета C_i существовало такое расстояние d_i, чтобы никакие две точки из C_i не находились на расстоянии d_i.

Для любого целого числа $t > 0$ **хроматическое число *t*-расстояния** метрического пространства (X,d) есть минимальное число цветов, необходимых для окрашивания всех точек $x \in X$ так, чтобы любые две точки на расстоянии $\leq t$ имеют разные цвета.

Для любого целого числа $t > 0$ ***t*-м числом Бабаи** пространства (X,d) называется минимальное число цветов, необходимых для окрашивания всех точек $x \in X$ так, чтобы для любого множества D положительных расстояний с $|D| \leq t$ цвета любых двух точек, расстояние между которыми принадлежит D, не совпадали.

Отношение Штейнера

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и $V \subset X$ – его конечное подмножество. Рассмотрим полный взвешенный граф $G = (V,E)$ с множеством вершин V и весами ребер $d(x,y)$ для всех $x,y \in V$.

Остовным деревом T графа G называется подмножество из $|V| - 1$ ребра, образующее дерево на V, с *весом* $d(T)$, равным сумме весов его ребер. Пусть MST_V – *минимальное остовное дерево* графа G, т.е. *остовное дерево* минимального веса $d(MST_V)$.

Минимальное дерево Штейнера на V есть такое дерево SMT_V, что его множество вершин является подмножеством X, содержащим V, и $d(SMT_V) = \inf_{M \subset X : V \subset M} d(MST_M)$.

Отношение Штейнера $S\,t(X,d)$ метрического пространства (X,d) определяется как

$$\inf_{V \subset X} \frac{d(SMT_V)}{d(MST_V)}.$$

Для любого метрического пространства (X,d) имеем $\frac{1}{2} \le St(X,d) \le 1$. Для l_2**-метрики** (т.е. евклидовой метрики) на $\mathbb{R}^2$, оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, в то время как для l_1**-метрики** на $\mathbb{R}^2$ оно равно $\frac{2}{3}$.

Метрический базис

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство. Подмножество $M \subset X$ называется **метрическим базисом** X, если выполняется следующее условие: $d(x,s) = d(y,s)$ для всех $s \in M$ влечет $x = y$. Для $x \in X$ числа $d(x,s)$, $s \in M$ называются **метрическими координатами** x.

Срединное множество

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и $y, z \in X$ – две его различные точки. **Срединном множеством** (или *биссектрисой*) X называется множество $\{x \in X : d(x,y) = d(x,z)\}$ *срединных точек* x.

Говорят, что метрическое пространство имеет *n-точечное свойство биссектрисы*, если для каждой пары его точек срединное множество имеет ровно n точек. 1-Точечное свойство биссектрисы означает единственность *отображения срединной точки* (см. **Срединная выпуклость**).

Функция расстояния

Функция расстояния (или *лучевая функция*) есть непрерывная функция на метрическом пространстве (X,d) (обычно на евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$) $f : X \to \mathbb{R} \leqslant 0$, которое является *однородным*, т.е. $f(tx) = tf(f)$ для всех $t \ge 0$ и всех $x \in X$.

Функция расстояния f называется *симметричной*, если $f(x) = f(-x)$, *положительной*, если $f(x) > 0$ для всех $x \ne 0$ и *выпуклой*, если $f(x + y) \le f(x) + f(y)$ с $f(0) = 0$.

Если $X = \mathbb{E}^n$, то множество $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 1\}$ называется *звездным телом*; оно соответствует единственной функции расстояния. Звездное тело будет ограниченным, если f положительна, оно будет симметричным относительно начала координат, если f симметрична, и выпуклым, если f – выпукла.

Выпуклая функция расстояния

Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ – компактная выпуклая область, содержащая в своей внутренности начало координат. **Выпуклой функцией расстояния** (или *измерителем, функцией расстояния Минковского*) $d_B(x,y)$ называется квазиметрика на $\mathbb{R}^n$, определенная для $x \ne y$ как

$$\inf\{\alpha > 0 : y - x \in \alpha B\}.$$

Эквивалентным образом она может быть определена как $\frac{y - x_2}{x - z_2}$, где z – единственная точка границы $\partial(x + B)$, принадлежащая лучу, выходящему из x и проходящему через y. При этом $B = \{x \in \mathbb{R}^n : d_B(0, x) \le 1\}$ с равенством только для $x \in \partial B$. Выпуклая функция расстояния называется *полиэдральной*, если B – многогранник, *тетраэдральной*, если это тетраэдр, и т.д.

Если множество B центральносимметрично относительно начала координат, то d_B является **метрикой Минковского** (см. гл. 6), единичный шар которой есть B.

Элемент наилучшего приближения

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и $M \subset X$ – его подмножество. Тогда элемент $u_0 \in M$ называется **элементом наилучшего приближения** к данному элементу $x \in X$, если $d(x,u_0) = \inf\limits_{u\in M} d(x,u)$, т.е. если величина $d(x, u_0)$ является **расстоянием между точкой и множеством** $d(x, M)$.

Метрическая проекция (или *оператор наилучшего приближения, отображение ближайшей точки*) есть многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $d(x \in X)$ множество элементов наилучшего приближения из множества M (см. **Расстоянное отображения**).

Множеством Чебышева (или *селектируемым множеством*) в произвольном метрическом пространстве (X,d) называется подмножество $M \subset X$, содержащее единственный элемент наилучшего приближения для каждого $x \in X$. Подмножество $M \subset X$ называется **множеством полу-Чебышева**, если имеется не более одного такого элемента, и **проксиминальным множеством**, если имеется не менее одного такого элемента.

Радиусом Чебышева для множества M называется $\inf\limits_{x\in X} \sup\limits_{y\in M} d(x,y)$, а **центром Чебышева** для множества M – элемент $x_0 \in X$, реализующий данный инфимум.

Расстоянное отображение

Для метрического пространства (X,d) и подмножества $M \subset X$ **расстоянным отображением** называется функция $f_M : X \to \mathbb{R} \geq 0$, где $f_M(x) = \inf\limits_{u\in M} d(x,u)$ есть **расстояние между точкой и множеством** $d(x,M)$ (см. **Метрическая проекция**).

Если граница $B(M)$ множества M определена, то **функция расстояния со знаком** g_M определяется как $g_M(x) = -\inf\limits_{u\in B(M)} d(x,u)$ для $x \in M$ и как $g_M(x) = \inf\limits_{u\in B(M)} d(x,u)$ в остальных случаях. Если M является (замкнутым и ориентируемым) многообразием в $\mathbb{R}^n$, то g_M будет решением *уравнения эйконала* $|\nabla_g| = 1$ для его *градиента* ∇.

Если $X = \mathbb{R}^n$ и для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $u(x)$ с $d(x,M) = d(x,u(x))$, (т.е. M есть **множество Чебышева**), то $\|x–u(x)\|$ называется **векторной функцией расстояния**.

Расстояния отображения применяются при программировании движения робототехнических устройств (M выступает как множество точек препятствий) и, главным образом, при обработке изображений (в этом случае M является множеством всех или только пограничных пикселей образа). При $X = \mathbb{R}^n$ граф $\{x, f_M(x)) : x \in X)$ для $d(x,M)$ называется *поверхностью Вороного* для множества M.

Дискретная динамическая система

Дискретная динамическая система есть пара, состоящая из непустого метрического пространства (X,d), называемого *фазовым пространством*, и непрерывного отображения $f : X \to X$, называемого *эволюционным законом*. Для любого $x \in X$ его *орбита* есть последовательность $\{f^n(x)\}_n$, где $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ с $f^0(x) = x$. Орбита $x \in X$ называется *периодической*, если $f^n(x) = x$ для некоторого $n > 0$.

Обычно дискретные динамические системы исследуются (например, в теории управления) в контексте стабильности систем; теория хаоса, со своей стороны, занимается максимально нестабильными системами.

Аттрактор – такое замкнутое подмножество A множества X, что существует *открытая окрестность* U подмножества A, обладающая свойством $\lim_{n\to\infty} d(f^n(b), A) = 0$ для каждого $b \in U$, т.е. A *притягивает* все близлежащие орбиты. В этом случае $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)$ есть **расстояние между точкой и множеством**.

Динамическая система называется *хаотической* (*топологически* или *по Девани*), если она является *регулярной* (т.е. X имеет плотное подмножество элементов с периодическими орбитами) и *транзитивной* (т.е. для любых двух непустых открытых подмножеств A, B множества X существует такое число n, что $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$).

Метрическое расслоение

Пусть (X,d) – **полное** метрическое пространство. Подмножества M_1 и M_2 множества X называются *эквидистантными* (*равноотстоящими*), если для каждого $x \in M_1$ существует $y \in M_2$ с d(x,y), равным **хаусдорфовой метрике** между множествами M_1 и M_2. Метрическое расслоение пространства (X,d) есть разбиение $\mathcal{F}$ множества X на изометрические взаимно эквидистантные замкнутые множества.

Метрическое фактор-пространство $X/\mathcal{F}$ наследует натуральную метрику, для которой **расстоянное отображение** является **подметрией**.

Структура метрического конуса

Пусть (X, d, x_0) – *пунктированное метрическое пространство*, т.е. пространство (X, d) с фиксированной точкой $x_0 \in X$. **Структурой метрического конуса** на нем является (точечно) непрерывное семейство $f_t (t \in \mathbb{R} \geq 0)$ **растяжений** множества X, оставляющих инвариантной точку x_0, так что $d(f_t(x,y), f_t(y)) = td(x,y)$ для всех x, y и $f_t \cdot f_s = f_{ts}$.

Банахово пространство имеет такую структуру для растяжений $f_t(x) = tx (t \in \mathbb{R} \geq 0)$. Еще одним примером является *евклидов конус над метрическим пространством* (см. **Метрика конуса**, гл.9).

Метрический конус

Метрическим конусом называется множество всех полуметрик на множестве $V_n = \{1,\ldots,n\}$.

Матрица расстояний

Пусть $(X = \{x_1,\ldots,x_n\}, d)$ – конечное метрическое пространство. Его **матрица расстояний** – это симметричная $n \times n$ матрица $((d_{ij}))$, где $d_{ij} = d(x_i, x_j)$ для любых $1 \leq i, j \leq n$.

Матрица Кэли–Менгера

Пусть $(X = \{x_1,\ldots,x_n\}, d)$ – конечное метрическое пространство. **Матрицей Кэли–Менгера** для него является симметричная $(n+1) \times (n+1)$ матрица

$$CM(X,d) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e^T & D \end{pmatrix},$$

где $D = (d_{ij})$ есть **матрица расстояний** пространства (X,d), а e–n-вектор, все компоненты которого равны 1. Определитель матрицы $CM(X,d)$ называется *определителем Кэли–Менгера*.

Матрица Грамма

Пусть $v_1,\ldots,v_k$ – элементы евклидова пространства. **Матрицей Грамма** является симметричная $k \times k$ матрица

$$G(v_1,\ldots v_k) = \left(\left(\left\langle v_i, v_j \right\rangle\right)\right)$$

попарных *скалярных произведений* элементов $v_1,\ldots,v_k$.

$k \times k$ матрица является положительно полуопределенной тогда и только тогда, когда это матрица Грамма. $k \times k$ матрица является положительно определенной тогда и только тогда, когда она – матрица Грамма с линейно независимыми определяющими векторами.

$G(v_1,\ldots,v_k) = \frac{1}{2}((d_E^2(v_i, v_j))) + d_E^2(v_0, v_j) - d_E^2(v_i, v_j)))$, т.е. скалярное произведение $\langle,\rangle$ есть **подобность произведения Громова для квадрата евклидова расстояния** d_E^2.

$k \times k$ матрица $((d_E^2(v_i, v_j)))$ есть **расстояние отрицательного типа**; все такие $k \times k$ матрицы образуют (неполиэдральны) замкнутый выпуклый конус всех таких расстояний на данном k-множестве.

Определитель матрицы Грамма называется *определителем Грамма*; его величина равна квадрату *k-мерного объема параллелотопа*, построенного на $v_1,\ldots,v_k$.

Изометрия

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **изометрическим вложением** X в Y, если она инъективна и для всех $x, y \in X$ имеет место равенство $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x,y)$.

Изометрией называется биективное изометрическое вложение. Два метрических пространства называются **изометрическими** (или *изометрически изоморфными*), если между ними существует изометрия.

Свойства метрических пространств, сохраняющиеся инвариантными относительно изометрий (полнота, ограниченность и т.п.), называются **метрическими свойствами** (или *метрическими инвариантами*).

Изометрией пути (или *линейной изометрией*) является преобразование X в Y (не обязательно биективное), сохраняющее длину кривых.

Жесткое перемещение метрического пространства

Жестким перемещением (или просто **перемещением**) метрического пространства (X,d) называется **изометрия** (X,d) на себя.

Для перемещения f **функция перенесения** $d_f(x)$ равна $d_f(x, f(x))$. Перемещение f называется *полупростым*, если $\inf\limits_{x \in X} d_f(x) = d(x_0, f(x_0))$ для некоторого $x_0 \in X$, и *параболическим* в остальных случаях. Полупростое перемещение называется *эллиптическим*, если $\inf\limits_{x \in X} d_f(x) = 0$ и *осевым* (или *гиперболическим*) в остальных случаях. Перемещение называется *переносом Клиффорда*, если функция перенесения $d_f(x)$ является константой для всех $x \in X$.

Симметричное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **симметричным**, если для произвольной точки $p \in X$ существует *симметрия* относительно данной точки,

т.е. такое **перемещение** f_p этого метрического пространства, что $f_p(f_p(x)) = x$ для всех $x \in X$, и p является изолированной фиксированной точкой f_p.

Однородное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **однородным** (или *сильно-транзитивным*), если для каждых двух конечных изометрических подмножеств $Y = \{y_1, ..., y_m\}$ и $Z = \{z_1, ..., z_m\}$ множества X существует **перемещение** X, отображающее Y в Z. Метрическое пространство называется *точечно-однородным*, если для любых двух его точек существует перемещение, отображающее одну из этих точек в другую. В общем случае *однородное пространство* есть множество в сочетании с данной транзитивной группой *симметрий*.

Метрическое пространство (X,d) называется **метрически однородным** Грюнбаум–Келли **метрическим пространством**, если $\{d(x, z) : z \in X\} = \{d(y, z) : z \in X\}$ для любых $x, y \in X$.

Растяжение

Пусть (X,d) – произвольное метрическое пространство и r – действительное положительное число. Функция $f : X \to X$ называется **растяжением**, если $d(f(x), f(y)) = rd(x,y)$ для любых $x, y \in X$.

Метрическое преобразование

Метрическое преобразование есть расстояние, получаемое как функция данной метрики (см. гл. 4).

Гомеоморфные метрические пространства

Два метрических пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) называются **гомеоморфными** (или *топологически изоморфными*), если существует *гомеоморфизм* из X в Y, т.е. такая биективная функция $f : X \to Y$, что f и f^{-1} *непрерывны* (прообраз каждого открытого множества в Y является открытым в X).

Два метрических пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) называются *равномерно изоморфными*, если существует такая биективная функция $f : X \to Y$, что f и f^{-1} являются *равномерно непрерывными функциями*. (Функция g будет *равномерно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x, y \in X$ из неравенства $d_X(x,y) < \delta$ следует неравенство $d_Y(g(x), f(y)) < \varepsilon$; непрерывная функция является равномерно непрерывной, если пространство X компактно.)

Конформное метрическое отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется **конформным метрическим отображением**, если для любых $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{d_Y(f(x), f(y))}{d(x,y)}$, который является конечным и положительным.

Квазиконформное метрическое отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Гомеоморфизм $f : X \to Y$ называется **квазиконформным** (или *C-квазиконформным*) **метрическим отображением**, если существует константа C, такая что соотношение

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\max\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \le r\}}{\min\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \ge r\}} \le C$$

выполняется для каждого $x \in X$. Наименьшая такая константа C называется **конформным растяжением**.

Квазиконформное отображение f называется **квазисимметричным**, если, кроме того, существует константа C', такая что

$$\frac{\max\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \le r\}}{\min\{d_Y(f(x), f(y)) : d_X(x,y) \ge r\}} \le C$$

выполняется для всех $x \in X$ и всех положительных r.

Конформная размерность метрического пространства (X,d) (Пансю, 1989) является инфимумом **размерности Хаусдорфа** по всем квазиконформным отображениям пространства (X,d) в некоторое метрическое пространство.

Липшицево отображение

Пусть c – положительная константа. Для метрических пространств $(X,\ d_X)$ и $(Y,\ d_Y)$ функция $f: X \to Y$ называется **липшицевым отображением** (или *c-липшицевым*, если необходимо упомянуть постоянную c), если неравенство

$$d_Y(f(x),\ f(y)) \le c d_X(x,y)$$

выполняется для всех $x,\ y \in X$.

c-липшицево отображение называется **укорачивающим**, если $c = 1$, и **сжимающим**, если $c < 1$.

Би-липшицево отображение

Пусть $c > 1$ – положительная константа. Тогда для метрических пространств $(X,\ d_X)$ и $(Y,\ d_Y)$ функция $f: X \to Y$ называется **би-липшицевым отображением** (или *c-би-липшицевым отображением*, ***c*-вложением**), если существует такое положительное число r, что для любых $x,\ y \in X$ имеют место неравенства

$$r d_X(x,y) \le d_Y(f(x),\ f(y)) \le c r d_X(x,y).$$

Каждое би-липшицево отображение является **квазиконформным метрическим отображением**.

Наименьшая константа c, для которой f является c-би-липшицевым отображением, называется **искажением** f.

Бургайн доказал, что каждое k-точечное метрическое пространство c-вложимо в некоторое евклидово пространство с искажением $O(\ln k)$. *Искажение* Громова *для кривых* представляет собой максимальное отношение длины дуги к длине хорды.

Две метрики d_1 и d_2 на X называются **би-липшицево эквивалентными**, если существуют такие положительные константы c и C, что неравенство $c d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le C d_1(x,y)$ выполняется для всех $x,\ y \in X$, т.е. тождественное отображение есть би-липшицево отображение $(X,\ d_1)$ в $(X,\ d_2)$.

Равномерное метрическое отображение

Пусть $(X,\ d_X)$ и $(Y,\ d_Y)$ – метрические пространства. Функция $f: X \to Y$ называется **равномерным метрическим отображением**, если существуют такие две неубывающие функции g_1 и g_2 из $\mathbb{R} \ge 0$ в себя с $\lim\limits_{r \to \infty} g_i(r) = \infty$ для $i = 1,\ 2$, что неравенства

$$g_1(d_X(x,y) \le d_Y(f(x),\ f(y)) \le g_2(d_X(x,y))$$

имеют место для всех $x,\ y \in X$.

Би-липшицево отображение есть равномерное метрическое отображение с линейными функциями g_1 и g_2.

Метрическое число Рамсея

Для данного класса $\mathcal{M}$ метрических пространств (обычно l_p-пространств), данного целого числа $n \geq 1$ и данного действительного числа $c \geq 1$ **метрическое число Рамсея** (или *c-метрическое число Рамсея*) $R_M(c, n)$ является наибольшим целым числом m, таким что в каждом n-точечном метрическом пространстве имеется подпространство размером m, которое c-вложимо в одно из метрических пространств из $\mathcal{M}$ (см. [BLMN05]).

***c*-изоморфизм метрических пространств**

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. *Липшицева норма* $\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ на множестве всех инъективных отображений $f : X \to Y$ определяется как

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}.$$

Два метрических пространства X и Y называются ***c*-изоморфными**, если существует инъективное отображение $f : X \to Y$, такое что $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \|f^{-1}\| \leq c$.

Квазиизометрия

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **квазиизометрией** (или (C, c)-**квазиизометрией**), если существуют действительные числа $C > 0$ и $c \geq 0$, такие что

$$C^{-1} d_X(x,y) - c \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x,y) + c,$$

и $Y = \bigcup_{z \in X} B_{d_Y}(f(x), c)$, т.е. для каждой точки $y \in Y$ существует такая точка $x \in X$, что $d_Y(y, f(x)) \leq c$.

Квазиизометрия с $C = 1$ называется **грубой изометрией** (или *приближенной изометрией*). См. **Ранг квазиевклидового метрического пространства**.

Грубое вложение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **грубым вложением**, если существуют неубывающие функции $\rho_1, \rho_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$, такие что $\rho_1(d_X(x,y)) \leq (d_Y(f(x), \rho_2(d_X(x,y))$ для всех $x, y \in X$ и $\lim_{t \to \infty} \rho, t = +\infty$.

Метрики d_1 и d_2 на X называются **грубо эквивалентными метриками**, если существуют такие неубывающие функции $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, что $d_1 \leq f(d_2)$ и $d_2 \leq g(d_1)$.

Сжимающее отображение

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Функция $f : X \to Y$ называется **сжимающим отображением** (или *сжатием, строго укорачивающим отображением*) если $d_Y(f(x), f(y)) < d_X(x,y)$ для всех различных $x, y \in X$.

Каждое сжатие из **полного** метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку.

Нестягивающее отображение

Для метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция $f : X \to Y$ называется **нестягивающим отображением**, если $d_Y(f(x), f(y)) < d_X(x,y)$ для всех $x, y \in X$.

Каждая нестягивающая биекция из **вполне ограниченного** метрического пространства на себя есть изометрия.

Укорачивающее отображение

Для метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y) функция $f: X \to Y$ называется **укорачивающим отображением** (или *нерасширяющимся, полусжимающим отображением*), если $d_Y(f(x), f(y)) \le d_X(x,y)$ для всех $x, y \in X$.

Любое сюръективное укорачивающее отображение $f: X \to Y$ является изометрией тогда и только тогда, когда (X, d_X) является компактным метрическим пространством.

Подметрия есть укорачивающее отображение, такое что образ любого метрического шара является метрическим шаром того же радиуса.

Два подмножества A и B метрического пространства (X,d) называются (по Гоуэрсу) **подобными**, если существуют укорачивающие отображения $f: A \to X$, $g: b \to X$ и такое малое $\varepsilon > 0$, что каждая точка A находится в пределах ε от некоторой точки множества B, каждая точка B находится в пределах ε от некоторой точки множества A и $|d(x, g(f(x))) - d(y, f(g(y)))| \le \varepsilon$ для всех $x \in A$ и $y \in B$.

Категория метрических пространств

Категория Ψ состоит из класса $Ob\Psi$, элементы которого называются *объектами категории*, и класса $Mor\Psi$, элементы которого называются *морфизмами категории*. Эти классы должны удовлетворять перечисленным ниже условиям.

1. Каждой упорядоченной паре объектов A и B соответствует множество $H(A,B)$ морфизмов.
2. Каждый морфизм принадлежит только одному множеству $H(A, B)$.
3. Композиция $f \cdot g$ двух морфизмов $f: A \to B$, $g: C \to D$ определена, если $B = C$, в этом случае она будет принадлежать $H(A, D)$.
4. Композиция морфизмов ассоциативна.
5. Каждое множество $H(A, A)$ включает в качестве *единичного элемента* такой морфизм id_A, что $f \cdot \mathrm{id}_A = f$ и $\mathrm{id}_A \cdot g = g$ для любых морфизмов $f: X \to Y$ и $g: A \to Y$.

Категория метрических пространств, обозначаемая Met (см. [Isbe64]) – это категория, в которой метрические пространства выступают как объекты, а **укорачивающие отображения** – как морфизмы. В данной категории для каждого объекта существует единственная **инъективная оболочка**; она может быть отождествлена с его **натянутой линейной оболочкой**. *Мономорфизмами* в Met являются инъективные укорачивающие отображения, а *изоморфизмами* – **изометрии**.

Инъективное метрическое пространство

Метрическое пространство (X, d) называется **инъективным**, если для каждого изометрического вложения $f: X \to X'$ пространства (X, d) в другое метрическое пространство (X', d') существует **укорачивающее отображение** f' из X' в X с $f' \cdot f = \mathrm{id}_X$, т.е. X есть ретракт X'. Эквивалентно, X является **абсолютным ретрактом**, т.е. ретрактом каждого метрического пространства, в которое оно вложимо изометрически. Метрическое пространство (X, d) является инъективным тогда и только тогда, когда оно **гипервыпукло**.

Инъективная оболочка

Понятие **инъективной оболочки** является обобщением понятия **пополнения Коши**. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Оно может быть изометрически вложимо в некоторое **инъективное** метрическое пространство $(\hat{X}, \hat{d})$; если взять

любое такое изометрическое вложение $f: X \to \hat{X}$, для него существует единственное наименьшее инъективное подпространство $(\overline{X}, \overline{d})$ пространства $(\hat{X}, \hat{d})$, содержащее $f(X)$, которое называется **инъективной оболочкой** X. Оно изометрически тождественно **натянутой линейной оболочке** пространства (X, d).

Метрическое пространство совпадает со своей инъективной оболочкой тогда и только тогда, когда оно является инъективным метрическим пространством.

Натянутое расширение

Расширение (X', d') метрического пространства (X, d) называется **натянутым расширением**, если для каждой полуметрики d'' на X', удовлетворяющей условиям $d''(x_1, x_2) = d(x_1, x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$ и $d''(y_1, y_2) \le d'(y_1, y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in X'$, имеем $d''(y_1, y_2) = d'(y_1, y_2)$ для всех $y_1, y_2 \in X'$.

Натянутая линейная оболочка – универсальное *натянутое расширение* X, т.е. она содержит, с точностью до канонических изометрий, каждое натянутое расширение X, но сама собственного натянутого расширения не имеет.

Натянутая линейная оболочка

Возьмем метрическое пространство (X, d) конечного диаметра и рассмотрим в нем множество $\mathbb{R}^X = \{f: X \to \mathbb{R}\}$. **Натянутая линейная оболочка** $T(X,d)$ пространства (X, d) определяется как множество $T(X,d) = \{f \in \mathbb{R}^X : f(x) = = \sup_{y \in X}(d(x,y) - f(y))$ для всех $x \in X\}$, снабженное метрикой, порождаемой на $T(X,d)$ нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Множество X можно отождествить с множеством $\{h_x \in T(X, d) : h_x(y) = d(y,x)\}$ или, эквивалентно, с множеством $T^0(X, D) = \{f \in T(X, d) : 0 \in f(X)\}$. **Инъективная оболочка** $(\overline{X}, \overline{d})$ множества X может быть изометрически отождествлена с натянутой линейной оболочкой $T(X,d)$ как

$$\overline{X} \to T(X,d), \ \ \overline{x} \to h\overline{X} \in T(X,d) : h\overline{X}(y) = \overline{d}(f(y), \overline{x}).$$

Например, если $X = \{x_1, x_2\}$, то $T(X,d)$ является интервалом длины $d(x_1, x_2)$. Метрическое пространство совпадает со своей натянутой линейной оболочкой тогда и только тогда, когда оно является **инъективным** метрическим пространством.

Натянутую линейную оболочку метрического пространства (X, d) конечного диаметра можно рассматривать как многогранный комплекс. Размерность такого комплекса называется **размерностью Дресса** (или *комбинаторной размерностью*) пространства (X, d).

Действительное дерево

Метрическое пространство (X, d) называется (по Титсу, 1977) **действительным деревом** (или $\mathbb{R}$-**деревом**), если для любых $x, y \in X$ существует единственная **дуга** от x к y и эта дуга – **геодезический отрезок**. Действительное дерево также называется **метрическим деревом** (следует отличать от **метрического дерева** в анализе данных, см. гл. 17).

Метрическое пространство (X, d) является действительным деревом тогда и только тогда, когда оно является **путь-связным** и **0-гиперболическим** по Громову (т.е. удовлетворяет **неравенству четырех точек**).

Действительные деревья есть в точности **древоподобные** метрические пространства, которые являются **геодезическими**. **Древоподобные** метрические про

странства по определению являются метрическими подпространствами дейст вительных деревьев, а действительные деревья являются в точности **инъ ективными** метрическими пространствами среди древоподобных пространств.

Если (X, d) – конечное метрическое пространство, то **натянутая линейная оболочка** $T(X, d)$ является действительным деревом и может рассматриваться как реберно взвешенное теоретико-графовое дерево.

Метрическое пространство будет полным действительным деревом тогда и только тогда, когда оно **гипервыпукло** и любые две его точки соединяются **метрическим отрезком**.

Плоскость $\mathbb{R}^2$ с **парижской метрикой** и **метрикой лифта** (см. гл. 19) являются примерами $\mathbb{R}$-дерева.

1.3. ОБЩИЕ РАССТОЯНИЯ

Дискретная метрика

Дискретная (или **тривиальная**) **метрика** d есть метрика на множестве X, определяемая как $d(x, y) = 1$ для всех различных $x, y \in X$ (и $d(x, x) = 0$). Метрическое пространство (X, d) называется *дискретным метрическим пространством*.

Антидискретная полуметрика

Антидискретной полуметрикой d называется полуметрика на множестве X, определяемая как $d(x, y) = 0$ для всех $x, y \in X$.

Эквидистантная метрика

Для множества X и положительного действительного числа t **эквидистантной метрикой** d называется метрика на X, определяемая как $d(x, y) = t$ для всех различных $x, y \in X$ (и $d(x, x) = 0$).

(1, 2)-*B*-метрика

Для множества X (1, 2)-B-**метрика** d является метрикой на X, такой что для любого $x \in X$ количество точек $y \in X$ с $d(x, y) = 1$ не превышает B, а все другие расстояния равны 2. (1, 2)-B-**метрика** является **усеченной метрикой** графа с максимальной степенью вершин, равной B.

Индуцированная метрика

Индуцированной метрикой (или *относительной метрикой*) называется сужение d' метрики d (на множестве X) на подмножество X' множества X.

Метрическое пространство (X', d') называется **метрическим подпространством** метрического пространства (X,d), а метрическое пространство (X,d) называется **метрическим расширением** (X', d').

Доминирующая метрика

Пусть d и d_1 – метрики на множестве X. Говорится, что d_1 **доминирует** над d, если $d_1(x, y) \geq d(x, y)$ для всех $x, y \in X$.

Эквивалентные метрики

Две метрики d_1 и d_2 на множестве X называются **эквивалентными**, если они определяют одну и ту же *топологию* на X, т.е., если для каждой точки $x_0 \in X$ открытый метрический шар с центром в x_0, заданный относительно d_1, содержит открытый метрический шар с тем же центром, но заданный относительно d_2, и наоборот.

Две метрики d_1 и d_2 будут эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in X$ существует $\delta > 0$, такое что из $d_1(x,y) \le \delta$ следует $d_2(x,y) \le \varepsilon$ и наоборот, из $d_2(x,y) \le \delta$ следует $d_1(x,y) \le \varepsilon$.

Все метрики на конечном множестве являются эквивалентными; они порождают *дискретную топологию*.

Полная метрика

Пусть (X,d) – метрическое пространство. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_n$, $x_n \in X$ *сходится к* $x^* \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое что $d(x_n, x^*) < \varepsilon$ для любого $n > n_0$.

Последовательность $\{x_n\}_n$, $x_n \in X$ называется *последовательностью Коши*, если существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ для любых $m, n > n_0$.

Метрическое пространство (X,d) называется **полным метрическим пространством**, если каждая его *последовательность Коши* сходится. В этом случае метрика d называется **полной метрикой**.

Пополнение Коши

Для метрического пространства (X,d) его **пополнением Коши** называется метрическое пространство (X^*, d^*) на множестве X^* всех классов эквивалентности *последовательностей Коши*, где последовательность $\{x_n\}_n$ называется *эквивалентной* $\{y_n\}_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Метрика d^* определяется как

$$d^*(x^*, y^*) \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

для любых $x^*, y^* \in X$, где $\{x_n\}_n$ (соответственно, $\{y_n\}_n$) – любой элемент из класса эквивалентности x^* (соответственно y^*).

Пополнение Коши (X^*, d^*) является единственным с точностью до изометрии **полным** метрическим пространством, в которое метрическое пространство (X,d) вкладывается как *плотное* метрическое подпространство.

Пополнением Коши метрического пространства $(\mathbb{Q}, |x-y|)$ рациональных чисел является числовая прямая $(\mathbb{R}, |x-y|)$. **Банахово пространство** является пополнением Коши *нормированного векторного пространства* $(V, \|\cdot\|)$ с **метрикой нормы** $\|x-y\|$. **Гильбертово пространство** соответствует случаю *нормы скалярного произведения* $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Ограниченная метрика

Метрика (в общем случае – расстояние) d на множестве X называется **ограниченной**, если существует константа $C > 0$, такая что $d(x,y) \le C$ для любых $x, y \in X$.

Так, например, если d – метрика на X, то метрика D на X, определяемая как $D(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, ограничена и $C = 1$.

Метрическое пространство (X,d) с ограниченной метрикой d называется **ограниченным метрическим пространством.**

Вполне ограниченное метрическое пространство

Метрическое пространство (X,d) называется **вполне ограниченным**, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть, т.е. конечное подмножество $M \subset X$,

такое что расстояние от точки до множества для любого (см. **Вполне ограниченное пространство**, гл. 2).

Всякое вполне ограниченное метрическое пространство является **ограниченным и сепарабельным**.

Метрическое пространство является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда его **пополнение Коши** является **компактным** метрическим пространством.

Сепарабельное метрическое пространство

Метрическое пространство называется **сепарабельным**, если оно содержит счетное *плотное* подмножество, т.е. некое счетное подмножество, с помощью которого могут аппроксимироваться все его элементы.

Метрическое пространство является сепарабельным тогда и только тогда, когда оно **вторично-счетно**, и тогда и только тогда, когда оно является **пространством Линделефа**.

Метрический компакт

Метрический компакт (или **компактное метрическое пространство**) – метрическое пространство, в котором всякая последовательность имеет *подпоследовательность Коши* и эти подпоследовательности являются сходящимися. Метрическое пространство является компактным тогда и только тогда, когда оно **вполне ограниченное** и **полное**. Подмножество евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно **ограничено** и **замкнуто**.

Собственное метрическое пространство

Метрическое пространство **называется собственным** (или *конечно компактным*), если любой замкнутый метрический шар в этом пространстве является компактным. Всякое собственное метрическое пространство является **полным**.

***c*-равномерно совершенное метрическое пространство**

Каждый собственный метрический шар радиуса r в метрическом пространстве имеет диаметр не более $2r$. Метрическое пространство называется c-**равномерно совершенным**, $0 < c \le 1$, если этот диаметр составляет не менее $2cr$.

PH метрическое пространство

Метрическое пространство называется **PH метрическим пространством** (или *пространством Атсуджи*), если любая непрерывная функция из него в произвольное метрическое пространство является *равномерно непрерывной*.

Каждый **метрический компакт** является PH метрическим пространством. Всякое PH метрическое пространство является **полным**.

Польское пространство

Польским пространством называется **полное сепарабельное** метрическое пространство. Метрическое пространство называется **пространством Суслина**, если оно является непрерывным образом польского пространства.

Метрическая тройка (или *mm-пространство*) является польским пространством (X, d) с *борелевой вероятностной мерой* μ, т.е. неотрицательной действительной функцией μ на *борелевой* σ-*алгебре* $\mathcal{F}$ множества X со следующими свойствами: $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(X) = \mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ для любой конечной или счетной совокупности попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F}$.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. σ-*алгеброй* на X называется совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества X, обладающая следующими свойствами:

$\emptyset \in \mathscr{F}$, $X \setminus U \in \mathscr{F}$ для $U \in \mathscr{F}$ и $\cup_n A_n \in \mathscr{F}$ для конечной или счетной совокупности $\{A_n\}_n$, $A_n \in \mathscr{F}$. σ-алгебра на X, которая соотносится с топологией на X, т.е. включает все открытые и замкнутые подмножества множества X, называется *борелевой* σ-*алгеброй* множества X. Любое метрическое пространство есть *борелево пространство*, т.е. множество, снабженное борелевой σ-алгеброй.

Метрика нормы

Для данного *нормированного векторного пространства* $(V, \|\cdot\|)$ **метрика нормы** на V определяется как

$$\| x-y \|$$

Метрическое пространство $(V, \| x-y \|)$ называется **банаховым пространством, если оно полное.** Примерами метрик нормы являются $\boldsymbol{l}_p$- и $\boldsymbol{L}_p$**-метрики**, в частности **евклидова метрика**.

Метрика пути

Возьмем связной граф $G = (V,E)$. Его **метрикой пути** d_{path} называется метрика на V, определяемая как длина (т.е. количество ребер) кратчайшего пути, соединяющего две данные вершины x и y графа G (см. гл. 15).

Метрика редактирования

Возьмем конечное множество X и конечное множество (унарных) *операций редактирования* $\mathbb{O}$ на X. **Метрикой редактирования** на X будет **метрика пути** графа с множеством вершин X и ребром xy, если y может быть получено из x посредством одной из операций в $\mathbb{O}$.

Метрика галереи

Камерная система – множество X (элементы которого называются камерами), снабженное n отношениями эквивалентности $\sim_i$, $1 \le i \le n$. *Галерея* – такая последовательность камер $x_1,\ldots, x_m$, что $x_i \sim_j x_{i+1}$ для каждого i и некоторого j, зависящего от i. **Метрика галереи** есть **расширенная метрика** на X, определяемая как длина кратчайшей галереи, соединяющей x и $y \in X$ (и как ∞, если соединяющей x и y галереи не существует). Метрика галереи является (расширенной) **метрикой пути** графа с множеством вершин X и ребром xy, если $x \sim_i y$ для некоторого $1 \le i \le n$.

Риманова метрика

Возьмем связное n-мерное гладкое *многообразие* M^n. Его **римановой метрикой** называется совокупность положительно определенных симметричных билинейных форм $((g_{ij}))$ на касательных пространствах многообразия M^n, которые гладко изменяются от точки к точке. Длина кривой γ на M^n выражается как $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j}$, а **внутренняя метрика** на M^n, называемая иногда **римановым расстоянием**, определяется как инфимум длин кривых, соединяющих любые две точки $x, y \in M^n$ (см. гл. 7).

Проективная метрика

Проективной метрикой d называется непрерывная метрика на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию

$$d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$$

для любых коллинеарных точек x, y, z, расположенных в этой последовательности на общей прямой. Четвертая проблема Гильберта (1900 г.) состоит в клас-

сификации таких метрик; это сделано только для размерности $n = 2$ ([Amba76]); см. гл. 6.

Каждая **метрика нормы** на $\mathbb{R}^n$ является проективной. Каждая проективная метрика на $\mathbb{R}^2$ является **гиперметрикой**.

Метрика произведения

Возьмем n метрических пространств $(X_1, d_2), (X_2, d_2),\ldots, (X_n, d_n)$. **Метрикой произведения** называется метрика на *декартовом произведении* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{x = (x_1, x_2,\ldots, xn): x_1 \in X_n\}$ определяемая как функция от $d_1,\ldots,d_n$ (см. гл. 4).

Хэммингова метрика

Хэмминговой метрикой d_H называется метрика на $\mathbb{R}^n$, задаваемая как

$$|\{i : 1 \le i \le n,\ x_i \ne y_i\}|$$

На бинарных векторах $x, y \in \{0,1\}^n$ хэммингово расстояние и l_1**-метрика** совпадают.

Метрика Ли

Пусть $m, n \mathbb{N}$, $m \ge 2$. **Метрикой Ли** d_{Lee} называется метрика на $\mathbb{Z}_m^n = \{0,1,\ldots,m-1\}^n$, определяемая как

$$\sum_{1\le i\le n} \min\{|x_i - y_i|, m - |x_i - y_i|\},$$

Метрическое пространство $(\sum_m^n, d_{Lee})$ является дискретным аналогом *эллиптического пространства*.

Метрика симметрической разности

Пусть задано *пространство с мерой* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. **Полуметрикой симметрической разности** (или **полуметрикой меры**) d_Δ называется полуметрика на множестве $\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\mathcal{A}) < \infty\}$, определяемая как

$$\mu(A\Delta B),$$

где $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ – *симметрическая разность* множеств A и $B \in \mathcal{A}_\mu$. Равенство $d_\Delta(A, B) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mu(A\Delta B) = 0$, т.е. когда A и B *почти всюду* равны. Отождествляя два множества $A, B \in \mathcal{A}_\mu$, если $\mu(A\Delta B) = 0$, получаем **метрику симметрической разности** (или расстояние **Фреше–Никодима–Аронзяна, метрику меры).**

Если μ – *кардинальное число*, т.е. $\mu(A) = |A|$ является количеством элементов в A, то $d_\Delta(A, B) = |A\Delta B|$. В этом случае $|A\Delta B| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Расстояние Джонсона между k-множествами A и B равно $\frac{A\Delta B}{2} = k - |A \cap B|$.

Метрика Эномото–Катона

Если имеется конечное множество X и целое число k, такое что $2k \le |X|$, то **метрикой Эномото–Катона** называется расстояние между неупорядоченными парами (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) непересекающихся k-подмножеств множества X, определяемое как

$$\min\{|X_1\backslash Y_1| + |X_2\backslash Y_2|, |X_1\backslash Y_2| + |X_2\backslash Y_1|\}.$$

Расстояние Штейнгауза

Для пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ **расстоянием Штейнгауза** d_{St} называется полуметрика на множестве $\mathcal{A}_\mu = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\mathcal{A}) < \infty\}$, определяемая из равенства

$$\frac{\mu(A \Delta B)}{\mu(A \cup B)} = 1 - \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A \cup B)},$$

если $\mu(A \cup B) > 0$ (и равная 0, если $\mu(A) = \mu(B) = 0$). Она становится метрикой на множестве классов эквивалентности элементов из $\mathcal{A}_\mu$; при этом элементы $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ называются *эквивалентными*, если $\mu(A \Delta B) = 0$.

Расстояние биотопа (или **расстояние Танимото**) $\frac{|(A \Delta B)|}{|(A \cup B)|}$ является частным случаем расстояния Штейнгауза, полученного для кардинального числа $\mu(A) = |A|$ (см. также **обобщенная метрика преобразования биотопа**, гл. 4).

Расстояние между точкой и множеством

Для метрического пространства (X, d) **расстояние между точкой и множеством** $d(x, A)$ между точкой и подмножеством A множества X определяется как

$$\inf_{y \in A} d(x, y).$$

Для любых $x, y \in X$ и любого непустого подмножества A множества X справедлив следующий вариант неравенства треугольника: $d(x, A) \le d(x, y) + d(x, A)$ (см. **Расстоянное отображение**).

Для данной точечной меры $\mu(x)$ на X и *функции штрафов* p **оптимальным квантованием** называется множество $B \subset X$, такое что $\int p(d(x, B)) d\mu(x)$ является наименьшим возможным.

Расстояние между множествами

Для метрического пространства (X, d) **расстояние между множествами** A и B множества X задается как

$$\operatorname{ing}_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

В анализе данных расстояние между множествами называется **единичной связью**, в то время как $\sup_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ называется **полной связью**.

Хаусдорфова метрика

Для метрического пространства (X, d) **хаусдорфовой метрикой** (или *двусторонним хаусдорфовым расстоянием*) d_{Haus} называется метрика на совокупности $\mathcal{F}$ всех компактных подмножеств X, задаваемая как

$$\max\{d_{d\text{Haus}}(A, B), d_{d\text{Haus}}(B, A)\},$$

где $d_{d\text{Haus}}(A, B) = \max_{x \in A} \min_{y \in B} d(x, y)$ является **ориентированным хаусдорфовым расстоянием** (или *односторонним хаусдорфовым расстоянием*) от A к B. Иными словами, $d_{d\text{Haus}}(A, B)$ есть минимальное число ε (называемое также **расстоянием Бляшке**), такое что замкнутая ε-окрестность A содержит B, а замкнутая ε-окрестность B содержит A. Можно показать также, что равно $d_{d\text{Haus}}(A, B)$

$$\sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|,$$

где $d(x, A) = \min_{y \in A} d(x, y)$ является **расстоянием между точкой и множеством.** Хаусдорфова метрика **метрикой нормы** не является.

Если вышеприведенное определение распространить на некомпактные замкнутые подмножества A и B множества X, то $d_{d\text{Haus}}(A, B)$ может быть бесконечной, т.е. она становится **расширенной метрикой.** Для подмножеств A и B множества X, не обязательно замкнутых, **хаусдорфова полуметрика** между ними определяется как хаусдорфова метрика между их замыканиями. Если X конечно, то $d_{d\text{Haus}}$ является метрикой на множестве всех подмножеств X.

Хаусдорфово L_p-расстояние

Для метрического пространства (X, d) **хаусдорфово L_p-расстояние** ([Badd92]) между двумя подмножествами A и B множества X задается как

$$(\sum_{x \in X} |\, d(x, A) - d(x, B)\,|^P)^{\frac{1}{p}},$$

где $d(x, A)$ – **расстояние между точкой и множеством.** Обычная **хаусдорфова метрика** соответствует случаю $p = \infty$.

Обобщенная хаусдорфова G-метрика

Возьмем группу $(G, \cdot, e)$, действующую на метрическом пространстве (X, d). **Обобщенная хаусдорфова G-метрика** между двумя замкнутыми подмножествами A и B множества X задается как

$$\min_{g_1, g_2 \in G} d_{\text{Haus}}(g_1(A), g_2(B)),$$

где d_{Haus} – **хаусдорфова метрика.** Если $d(g(x), g(y)) = d(x, y)$ для любого $g \in G$ (т.е. метрика d *левоинвариантна* по отношению к G), то вышеуказанная метрика будет равна $\min_{g \in G} d_{\text{Haus}}(A), g(B)$.

Метрика Громова–Хаусдорфа

Метрикой Громова–Хаусдорфа называется метрика на множестве всех изометрических классов компактных метрических пространств, задаваемая как

$$\inf d_{\text{Haus}}(f(X), g(Y))$$

для любых двух классов X^* и Y^* с представителями X и Y соответственно, где d_{Haus} – **хаусдорфова метрика**, а минимум берется по всем метрическим пространствам M и изометрическим вложениям $f : X \to M$, $g : Y \to M$. Соответствующее метрическое пространство называется *пространством Громова–Хаусдорфа.*

Метрика Фреше

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех непрерывных отображений $f : A \to X$, $g : B \to X$, …, где A, B, … являются подмножествами $\mathbb{R}^n$, гомеоморфными $[0,1]^n$ для фиксированной размерности $n \in \mathbb{N}$.

Полуметрикой Фреше d_F называется полуметрика на $\mathcal{F}$, задаваемая как

$$\inf_{\sigma} \sup_{x \in A} d(f(x), g(\sigma(x))),$$

где инфимум берется по всем сохраняющим ориентацию гомеоморфизмам $\sigma : A \to B$. Она превращается в **метрику Фреше** на множестве классов эквивалентности $f^* = \{g : d_F(g, f) = 0\}$.

Расстояние Банаха–Мазура

Расстояние Банаха–Мазура d_{BM} между двумя банаховыми пространствами V и W задается как

$$\ln \inf_{T} \| T \| \cdot \| T^{-1} \|,$$

где инфимум берется по всем изоморфизмам $T : V \to W$. Оно может быть записано также как $\ln d(V,W)$, где число $d(V,W)$ есть наименьшее положительное $d \geq 1$, такое что $\overline{B}_W^n \subset T(\overline{B}_V^n) \subset d\overline{B}_W^n$ для некоторого линейного обратимого преобразования $T : V \to W$. Здесь $(\overline{B}_V^n) = \{x \in V : \| x \|_V \leq 1\}$ и $(\overline{B}_W^n) = \{x \in W : \| x \|_W \leq 1\}$ являются *единичными шарами* нормированных пространств $(V, \| \cdot \|_V)$ и $(W, \| \cdot \|_W)$ соответственно.

$d_{\mathrm{BM}}(V,W) = 0$ тогда и только тогда, когда V и W *изометричны*, и становится метрикой на множестве X^n всех классов эквивалентности n-мерного нормированного пространства, где $V \sim W$, если они изометричны. Пара (X^n, d_{BM}) является компактным метрическим пространством, называемым **компактом Банаха–Мазура.**

Расстояние Глузкина–Хабарова (или *модифицированное расстояние Банаха-Мазура*) задается как

$$\inf\{\| T \|_{X \to Y} : | \det T | = 1\} \cdot \inf\{\| T \|_{Y \to X} : | \det T | = 1\}.$$

Расстояние Томчак–Егермана (или *слабое расстояние Банаха–Мазура*) определяется как

$$\max\}\bar{\gamma}_Y(\mathrm{id}_X), \bar{\gamma}_X(\mathrm{id}_Y)\},$$

где для оператора $U : X \to Y$ через $\bar{\gamma}_Z(U)$ обозначается $\inf \sum \| W_k \| \| V_k \|$. Здесь инфимум берется по всем представлениям $U = \sum W_k V_k$ для $V_k : X \to Z$ и $V_k : Z \to Y$, а id_z есть тождественное отображение. Данное расстояние никогда не превышает соответствующего расстояния Банаха–Мазура.

Расстояние Кадетса

Пропуск (или *разрыв*) между двумя замкнутыми подпространствами X и Y банахова пространства $(V, \| \cdot \|)$ определяется как

$$\mathrm{gap}(X,Y) = \max\{\delta(X, Y), \delta(Y,X)\},$$

где $\delta(X,Y) = \sup\{\inf_{y \in Y} \|x-y\| : x \in X, \|x\| = 1\}$ (см. **Расстояние разрыва**, гл. 12 и **Метрика разрыва,** гл. 18).

Расстояние Кадетса между двумя банаховыми пространствами V и W является полуметрикой, определяемой (по Кадетсу, 1975) как

$$\inf_{Z,f,g} \mathrm{gap}(B_{f(V)}, B_{g(W)}),$$

где инфимум берется по всем банаховым пространствам Z и всем линейным изометрическим вложениям $f : V \to Z$ и $g : W \to Z$; здесь $B_{f(V)}$ и $B_{g(W)}$ суть единичные метрические шары банаховых пространств $f(V)$ и $g(W)$ соответственно.

Нелинейным аналогом расстояния Кадетса является **расстояние Громова–Хаусдорфа** между **банаховыми пространствами** U и W:

$$\inf_{Z,f,g} d_{\mathrm{Haus}}(f(B_V), g(B_W)),$$

где инфимум берется по всем метрическим пространствам Z и всем изометрическим вложениям $f: V \to Z$ и $g: W \to Z$; здесь d_{Haus} – **хаусдорфова метрика.**

Расстояние пути Кадетса между двумя банаховыми пространствами V и W задается (по Островскому, 2000) как инфимум длин (относительно расстояния пути Кадетса) всех кривых, соединяющих V и W (и как ∞, если таких кривых нет).

Липшицево расстояние

Возьмем два метрических пространства (X, d_X) и (Y, d_Y). *Липшицева норма* $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ на множестве всех инъективных функций $f: X \to Y$ определяется как $\| f \|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \dfrac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}$.

Липшицево расстояние между метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) задается как

$$\ln \inf_f \| f \|_{\mathrm{Lip}} \cdot \| f^{-1} \|_{\mathrm{Lip}},$$

где инфимум берется по всем биективным функциям $f: X \to Y$. Эквивалентно, оно является инфимумом чисел $\ln \alpha$, таких что существует биективное **билипшицево отображение** между (X, d_X) и (Y, d_Y) с константами $\exp(-\alpha)$, $\exp(\alpha)$. Оно становится метрикой на множестве всех изометрических классов компактных метрических пространств.

Данное расстояние является аналогом **расстояния Банаха–Мазура** и, для случая конечномерных вещественных банаховых пространств, совпадает с ним. Оно совпадает также с **гильбертовой проективной метрикой** на *неотрицательных* проективных пространствах, которые могут быть получены $\mathbb{R}^n_+$ из отождествлением любой точки x с $cx, c > 0$.

Липшицево расстояние между мерами

Для компактного метрического пространства (X, d) *полунорма Липшица* $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ на множестве всех функций $f: X \to \mathbb{R}$ определяется как

$$\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{| f(x) - f(y) |}{d(x,y)}.$$

Липшицево расстояние между мерами μ и ν на X задается как

$$\sup_{\| f \|_{\mathrm{Lip}} \leq 1} \int f d(\mu - \nu).$$

Если μ и ν – вероятностные меры, то это – **метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна.**

Аналогом липшицева расстояния между мерами для *пространства состояний унитарной C^*-алгебры* является **метрика Конна.**

Барицентрическое метрическое пространство

Для метрического пространства (X, d) пусть $(B(X), \|\mu - \nu\|_{TV}$ будет метрическим пространством, где $B(X)$ – множество всех регулярных борелевых вероятностных мер на X с ограниченным носителем и $\|\mu - \nu\|_{TV}$ – **расстояние нормы, определяемое полной вариацией** $\int_X | p(\mu) - p(\nu) | d\lambda$, где $p(\mu)$ и $p(\nu)$ являются функциями плотности мер μ и ν соответственно, относительно σ-конечной меры $\dfrac{\mu + \nu}{2}$.

Метрическое пространство (X, d) будет **барицентрическим**, если существует константа $\beta > 0$ и отображение $f: B(X) \to X$ из $B(X)$ на X, такие что неравенство

$$d(f(\mu), f(\nu)) \le \beta \mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\mu + \nu)) \| \mu - \nu \|_{TV}$$

справедливо для любых мер $\mu, \nu \in B(X)$.

Каждое банахово пространство $(X, d = \| x - y \|)$ есть барицентрическое метрическое пространство, в котором наименьшее β равно 1, и отображение $f(\mu)$ является *обычным центром массы* $\int_X x d\mu(x)$. Любое *адамардово пространство* (т.е. полное **CAT**(0) **пространство**) будет барицентрическим с наименьшим β, равным 1, и отображением $f(\mu)$ в качестве единственной точки минимума функции $g(y) = \int_X d^2 f(x, y) d\mu(x)$ на X.

Компактное квантовое метрическое пространство

Пусть V будет *нормированным пространством* (или, более обобщенно, локально выпуклым *топологическим векторным пространством*), а V' – его непрерывным *двойственным пространством*, т.е. множеством всех непрерывных линейных функционалов f на V. *Слабая* топология* (или *топология Гельфанда*) на V определяется как самая слабая (т.е. с наименьшим количеством открытых множеств) топология на V', такая что для каждого $x \in V$ отображение $F_x: V' \to \mathbb{R}$, задаваемое условием $F_x(f) = f(x)$ для всех $f \in V'$, остается непрерывным.

Пространством порядковой единицы называется частично упорядоченное действительное (комплексное) векторное пространство $(A, \preceq)$ с выделенным элементом e, называемым *порядковой единицей,* которое характеризуется следующими свойствами:

1) для любого $a \in A$ существует $r \in \mathbb{R}$, такое что $a \preceq re$;

2) если $a \in A$ и $a \preceq re$ для всех положительных $r \in \mathbb{R}$, то $a \preceq 0$ (*архимедовость*).

Основным примером пространства порядковой единицы является векторное пространство всех самоприсоединенных элементов унитарной C^**-алгебры*, единичным элементом в которой служит порядковая единица. Здесь C^**-алгебра* является *банаховой алгеброй* над $\mathbb{C}$, снабженной специальным *инволютивным отображением*. Она называется *унитарной*, если имеет *единицу* (элемент, нейтральный относительно умножения); такие C^*-алгебры весьма приближенно называют еще *компактными некоммутативными топологическими пространствами.* Типичным примером унитарной C^*-алгебры является комплексная алгебра линейных операторов на комплексном **гилбертовом пространстве**, которое топологически замкнуто в топологии нормы операторов и замкнуто относительно операции взятия сопряженных на множестве операторов.

Пространство состояний пространства порядковой единицы $(A, \preceq, e)$ является множеством $S(A) = \{ f \in A'_+ : \| f \| = 1 \}$ *состояний*, т.е. непрерывных линейных функционалов f с $\| f \| = f(e) = 1$. **Компактное квантовое метрическое пространство** Риффеля – это пара $(A, \| \cdot \|_{\mathrm{Lip}})$, где $(A, \preceq, e)$ есть пространство порядковой единицы и $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ – полунорма на A (со значениями в $[0, +\infty]$), называемая *липшицевой полунормой*, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для $a \in A$ равенство $\| a \|_{\mathrm{Lip}} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $a \in \mathbb{R}e$;

2) метрика $d_{\mathrm{Lip}}(f,g) = \sup_{a\in A:\|a\|_{\mathrm{Lip}}\le 1} |f(a)-g(a)|$ порождает на пространстве состояний $S(A)$ его слабую* топологию.

Таким образом, мы получаем обычное метрическое пространство $(S(A), d_{\mathrm{Lip}})$. Если пространство порядковой единицы $(A,\preceq,e)$ является C^*-алгеброй, то d_{Lip} есть **метрика Конна**, и если, более того, C^*-алгебра является некоммутативной, то метрическое пространство $(S(A), d_{\mathrm{Lip}})$ называется **некоммутативным метрическим пространством.**

Выражение *квантовое метрическое пространство* появилось потому, что многие эксперты в области квантовой гравитации и теории струн считают геометрию пространства-времени вблизи длины Планка схожей с геометрией таких некоммутативных C^*-алгебр. Например, теория некоммутативного поля предполагает, что на достаточно малых (квантовых) расстояниях пространственные координаты не коммутируют, т.е. невозможно точно измерить положение частицы относительно более чем одной оси.

Универсальное метрическое пространство

Метрическое пространство (U, d) называется **универсальным** для семейства $\mathcal{M}$ метрических пространств, если любое метрическое пространство (M, d_{M}) из $\mathcal{M}$ является *изометрическим вложением* в (U, d), т.е. существует отображение $f: M \to U$, которое удовлетворяет условию $d_{\mathrm{M}}(x, y) = d(f(x), f(y))$ для любых $x, y \in M$.

Каждое сепарабельное метрическое пространство (X, d) может быть изометрически вложено (по Фреше, 1909) в (несепарабельное) **банахово пространство** l^∞. Именно, $d(x, y) = \sup_i |d(x, a_i) - d(y, a_i)|$, где есть $(a_1,\ldots,a_i,\ldots)$ плотное счетное подмножество множества X.

Каждое метрическое пространство изометрически вложимо (по Куратовскому, 1935) в **банахово пространство** $L^\infty(X)$ ограниченных функций $f: X \to \mathbb{R}$ с нормой $\sup_{x\in X}|f(x)|$.

Пространство Урысона есть однородное полное сепарабельное пространство, которое является универсальным метрическим пространством для всех сепарабельных метрических пространств.

Гильбертов куб является универсальным метрическим пространством для класса метрических пространств со счетной базой.

Графическое метрическое пространство *случайного графа* Эрдеша–Рени (определяемого как множество всех простых чисел $p \equiv 1(\mathrm{mod}4)$, на котором пара pq будет ребром, если p – квадратичный вычет по модулю q) является универсальным метрическим пространством для любого конечного или счетного метрического пространства с расстояниями, принимающими только значения 0, 1 или 2. Оно представляет собой дискретный аналог пространства Урысона.

Существует метрика d на $\mathbb{R}$, индуцирующая обычную (интервальную) топологию, такая что $(\mathbb{R}, d)$ является универсальным метрическим пространством для всех конечных метрических пространств (Холштинский, 1978). Банахово пространство l^n_∞ является универсальным метрическим пространством для всех метрических пространств (X, d) с $|X| \le n + 2$ (Вульф, 1967). Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ является универсальным метрическим пространством для всех ультраметрических пространств (X, d) с $|X| \le n + 1$; пространство всех конечных функций $f(t): \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$, снабженное метрикой $d(f, g) = \sup\{t : f(t) \ne g(t)\}$, является универсальным метрическим пространством для всех ультраметрических пространств (А. Лемин, В. Лемин, 1996).

Универсальность может быть определена и для других отображений метрических пространств (помимо изометрических вложений), например для билипшицева вложения и других. Так, любое компактное метрическое пространство представляет собой непрерывный образ **канторова множества** с натуральной метрикой $|x-y|$, унаследованной от $\mathbb{R}$.

Конструктивное метрическое пространство

Конструктивное метрическое пространство – пара (X, d), где X является неким набором конструктивных объектов (обычно это слова над некоторым алфавитом), а d – алгоритм превращения любой пары элементов множества X в конструктивное вещественное число $d(x, y)$ таким образом, что d становится метрикой на X.

Эффективное метрическое пространство

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – последовательность элементов заданного полного метрического пространства (X, d), такая что множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ является *плотным* в (X, d). Пусть $\mathcal{N}(m, n, k)$ – *канторово число* тройки $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, а $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, а – фиксированная стандартная нумерация множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Тройка $(X, d, \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется **эффективным метрическим пространством** ([Hemm02]), если множество $\{\mathcal{N}(n,m,k): d(x_m, x_n) < q_k\}$ является рекурсивно перечислимым. Оно представляет собой адаптацию введенного Вейхраухом понятия **вычисляемого метрического пространства (или рекурсивного метрического пространства).**

Глава 2

Топологические пространства

Топологическое пространство (X, τ)) есть множество X с *топологией* τ, т.е. системой подмножеств множества X, обладающих следующими свойствами:

1) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$;

2) если $A, B \in \tau$, то $A \cap B \in \tau$;

3) для любой системы $\{A_\alpha\}_\alpha$, если все $A_\infty \in \tau$, то $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau$.

Множества из τ называются *открытыми множествами*, а их дополнения называются *замкнутыми множествами. Базой* топологии τ является система открытых множеств, такая что каждое открытое множество есть объединение множеств из базы. Самая грубая топология имеет два открытых множества (пустое и множество X) и называется *тривиальной* (или *антидискретной*) *топологией*. Наиболее детальная топология включает все подмножества в качестве открытых и называется *дискретной топологией*.

В метрическом пространстве (X, d) определим открытый шар как множество $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$, где $x \in X$ (центр шара) и $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ (радиус шара). Подмножество множества X, которое является объединением (конечного или бесконечного числа) открытых шаров, называется *открытым множеством*. Эквивалентно, подмножество U множества X называется *открытым*, если для любой фиксированной точки $x \in U$ существует действительное число $\varepsilon > 0$, такое что для любой точки $y \in X$, удовлетворяющей условию $d(x,y) < \varepsilon$, выполняется условие $y \in U$. Любое метрическое пространство является топологическим, с топологией (**метрической топологией**, *топологией, порождаемой метрикой d*) состоящей из всех открытых множеств. Метрическая топология всегда есть T_4 (см. перечень топологических пространств ниже). Топологическое пространство, которое может быть получено таким образом из метрического пространства, называется **метризуемым пространством.**

Полуметрическая топология – топология на X, порождаемая аналогичным образом полуметрикой на X. В общем случае данная топология не является даже T_0. *Квазиметрическая топология* есть топология на X, порождаемая квазиметрикой на X.

Пусть (X, τ) – топологическое пространство. Тогда *окрестностью* точки $x \in X$ называется множество, содержащее открытое множество, которое, в свою очередь, содержит x. Замыканием подмножества топологического пространства является наименьшее замкнутое множество, его содержащее. *Открытое покрытие* множества X есть система $\mathscr{L}$ открытых множеств, объединение которых равно X; его *подпокрытием* является покрытие $\mathscr{K}$, такое что каждый объект из $\mathscr{K}$ является объектом из $\mathscr{L}$; его *подразделением* является покрытие $\mathscr{K}$, такое что каждый объект из $\mathscr{K}$ есть подмножество некоего объекта из $\mathscr{L}$. Семейство подмножеств множества X называется *локально конечным*, если каждая точка множества X имеет окрестность, пересекающуюся только с конечным числом этих подмножеств. Подмножество $A \subset X$ называется *плотным*,

если оно имеет непустое пересечение с каждым непустым открытым множеством или, эквивалентно, если единственным содержащим его замкнутым множеством является само множество X. В метрическом пространстве (X, d) *плотным множеством* будет подмножество $A \subset X$, такое что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in A$, такое что $d(x, y) < \varepsilon$. *Локальной базой* точки $x \in X$ является семейство $\mathfrak{U}$ окрестностей точки x, такое что каждая окрестность точки x содержит некий элемент семейства $\mathfrak{U}$.

Функция из одного топологического пространства в другое называется *непрерывной*, если прообраз каждого открытого множества будет открытым. Грубо говоря, для данного $x \in X$ все близкие к x точки отображаются в точки, близкие к $f(x)$. Функция f из одного метрического пространства (X, d_X) в другое (Y, d_Y) будет *непрерывной* в точке $c \in X$, если для любого положительного действительного числа ε существует положительное действительное число δ, такое что все $x \in X$, удовлетворяющие неравенству $d_X(x, c) < \delta$, будут также удовлетворять неравенству $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Функция называется непрерывной на интервале I, если она непрерывна в любой точке интервала I.

Приведенные ниже классы топологических пространств (до T_4) включают любые метрические пространства.

T_0 -пространство

T_0-**пространство** (или *пространство Колмогорова*) есть топологическое пространство (X, τ), на котором выполняется T_0-*аксиома отделимости*: для каждых двух точек $x, y \in X$ существует открытое множество U, такое что $x \in U$ и $y \notin U$ или $y \in U$ и $y \notin U$ (каждые две точки являются *топологически отличимыми*).

T_1-пространство

T_1-пространство есть топологическое пространство (X, τ), на котором выполняется T_1--*аксиома отделимости*: для каждых двух точек $x, y \in X$ существуют два таких открытых множества U и V, что $x \in U$ и $y \notin U$ или $y \in V$ и $x \notin V$ (каждые две точки являются *разделенными*). T_1-пространства всегда являются T_0-пространствами.

T_2-пространство

***T_2*-пространство** (или **хаусдорфово пространство,** *разделенное пространство*) – топологическое пространство (X, τ), удовлетворяющее условию T_2-*аксиомы*: каждые две точки $x, y \in X$ имеют непересекающиеся окрестности. T_2-пространства всегда являются T_1-пространствами.

Регулярное пространство

Регулярное пространство есть топологическое пространство, в котором каждая окрестность произвольной точки содержит замкнутую окрестность той же точки.

***T_3*-пространство**

***T_3* -пространство** (или *пространство Вьеториса, регулярное хаусдорфово пространство*) есть топологическое пространство, которое является T_1-пространством и **регулярным** пространством.

Вполне регулярное пространство

Вполне регулярное пространство (или *пространство Тихонова*) есть **хаусдорфово пространство** (X, τ), в котором любое замкнутое множество A и любое $x \notin A$ являются *функционально разделенными.*

Два подмножества A и B множества X называются *функционально разделенными*, если существует непрерывная функция $f : X \to [0,1]$, такая что $f(x) = 0$ для любого $x \in A$, и $f(y) = 1$ для любого $y \in B$.

Пространство Мура

Пространство Мура есть **регулярное пространство** с *развитием*.

Развитие – последовательность $\{\mathfrak{U}_n\}_n$ открытых покрытий, таких что для каждого $x \in X$ и каждого открытого множества A, содержащего x, имеется число n, для которого выполняется условие $\mathrm{St}(x, \mathfrak{U}_n) = \cup\{U \in \mathfrak{U}_n : x \in U\}$, т.е. $\{\mathrm{St}(x, \mathfrak{U}_n)\}_n$ является *базой окрестностей* для x.

Нормальное пространство

Нормальное пространство –топологическое пространство, в котором для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют два открытых множества U и V, таких что и $A \subset U$ и $B \subset V$.

***T_4*-пространство**

***T_4* -пространство** (или *пространство Титса, нормальное хаусдорфово пространство*) есть топологическое пространство, которое является T_1**-пространством** и **нормальным** пространством. Любое метрическое пространство (X, d) является T_4-пространством.

Вполне нормальное пространство

Вполне нормальное пространство – это топологическое пространство, в котором любые два разделенных множества имеют непересекающиеся окрестности.

Множества A и B называются *разделенными* в X, если каждое из них не пересекается с замыканием другого.

***T_5*-пространство**

***T_5*-пространство** (или *вполне нормальное хаусдорфово пространство*) есть топологическое пространство, которое является **вполне нормальным** и T_1-пространством. T_5-пространства всегда являются T_4-пространствами.

Сепарабельное пространство

Сепарабельным пространством называется топологическое пространство, в котором имеется счетное плотное подмножество.

Пространство Линделефа

Пространством Линделефа называется топологическое пространство, в котором каждое открытое покрытие имеет счетное подпокрытие.

Первично-счетное пространство

Топологическое пространство называется **первично-сетным**, если каждая его точка обладает локальной счетной базой. Любое метрическое пространство является первично-счетным.

Вторично-счетное пространство

Топологическое пространство называется вторично-счетным, если его топология обладает счетной базой.

Вторично-сетные пространства всегда **разделимы**, первично-счетны и являются **пространствами Линделефа**.

Для метрических пространств свойства быть вторично-сетными, быть сепарабельными и быть **пространствами Линделефа** являются эквивалентными.

Евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ с его обычной топологией также является вторично-счетным.

Пространство Бэра

Пространство Бэра есть топологическое пространство, в котором пересечение любого счетного семейства всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

Связное пространство

Топологическое пространство (X, τ) называется **связным**, если оно не является объединением пары непересекающихся непустых открытых множеств. В этом случае множество X называется *связным множеством.*

Топологическое пространство (X, τ) называется **локально связным**, если всякая точка $x \in X$ обладает локальной базой, состоящей из связных множеств.

Топологическое пространство (X, τ) называется **путь-связным** (или 0-*связным*), если для каждой точки $x, y \in X$ существует *путь* τ от x к y, т.е. непрерывная функция $\gamma : [0,1] \to X$ с $\gamma(x) = 0, \gamma(y) = 1$.

Топологическое пространство (X, τ) называется **односвязным** (или 1-*связным*), если состоит из одной части и не имеет кругообразных "дыр" или "ручек", или, эквивалентно, если каждая непрерывная кривая пространства X является *стягиваемой*, т.е. может быть уменьшена до одной из ее точек посредством *непрерывной деформации.*

Паракомпактное пространство

Топологическое пространство называется **паракомпактным**, если любое его открытое покрытие имеет локально конечное подразбиение. Любое метрическое пространство (X, d) является паракомпактным.

Локально компактное пространство

Топологическое пространство называется **локально компактным**, если всякая его точка обладает локальной базой, состоящей из компактных окрестностей. Грубо говоря, всякая малая часть пространства похожа на малую часть **компактного пространства**. Евклидовы пространства $\mathbb{E}^n$ являются локально компактными. Пространства $\mathbb{Q}_p$ *p-адических чисел* также локально компактны.

Вполне ограниченное пространство

Топологическое пространство называется **вполне ограниченным**, если оно может быть покрыто конечным числом подмножеств любого фиксированного размера.

Метрическое пространство будет **вполне ограниченным метрическим пространством,** если для каждого положительного действительного числа r существует конечное множество открытых шаров радиуса r, объединение которых равно X.

Компактное пространство

Топологическое пространство (X , τ) называется **компактным**, если всякое открытое покрытие множества X имеет конечное подпокрытие. В этом случае X называется *компактным множеством*.

Компактные пространства всегда являются **пространствами Линделефа, вполне ограниченными и паракомпактными.** Метрическое пространство будет компактным тогда и только тогда, когда оно **полное** и **вполне ограниченное**. Подмно-

жество евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнутое и ограниченное.

Существует ряд топологических свойств, которые эквивалентны свойству компактности метрических пространств, но неэквивалентны для общих топологических пространств. Так, метрическое пространство будет компактным тогда и только тогда, когда оно является *секвенциально компактным* (каждая последовательность обладает сходящейся подпоследовательностью) или *счетно компактным* (каждое счетное открытое покрытие обладает конечным подпокрытием), или *псевдокомпактным* (каждая действительная непрерывная функция на данном пространтстве является ограниченной), или *слабо счетным компактным пространством* (каждое бесконечное подмножество обладает предельной точкой).

Локально выпуклое пространство

Топологическим векторным пространством называется действительное (комплексное) векторное пространство V, которое является **хаусдорфовым пространством** с непрерывными операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр. Оно называется **локально выпуклым**, если его топология обладает базой, всякий элемент которой является *выпуклым множеством.*

Подмножество A множества V называется *выпуклым*, если для всех $x, y \in A$ и любого $t \in [0,1]$ точка $tx + (1–t)y \in A$, т.е. всякая точка *отрезка*, соединяющего x и y, принадлежит A.

Любое метрическое пространство $(V,\| x–y \|)$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V с **метрикой нормы** $\| x–y \|$ является локально выпуклым пространством; всякая точка пространства V обладает локальной базой, состоящей из *выпуклых* множеств.

Счетно-нормированное пространство

Счетно-нормированным пространством называется **локально выпуклое** пространством (V, τ), топология которого задается через счетное множество совместных норм $\| \cdot \|_1,\ldots$ Это означает, что, если последовательность $\{x_n\}_n$ элементов множества V, являющаяся фундаментальной относительно норм $\| \cdot \|_i$ и $\| \cdot \|_j$, сходится к нулю относительно одной из этих норм, то она будет сходиться к нулю и относительно другой. Счетно-нормированное пространство является метризуемым пространством, и его метрика может быть задана как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\| x-y \|_n}{1+\| x-y \|_n}.$$

Гиперпространство

Гиперпространством топологического пространства (X , τ) называется топологическое пространство на множестве $CL(X)$ всех непустых замкнутых (или, более того, компактных) подмножеств множества X. Топология гиперпространства X называется *гипертопологией*. Примерами такой топологии *удара-промаха* могут служить *топология Виеториса и топология Фелла.* Примерами такой *слабой топологии гиперпространства* является *метрическая топология Хаусдорфа* и *топология Вайсмана*.

Дискретное пространство

Дискретным пространством называется топологическое пространство (X, τ) с *дискретной топологией.* Его можно рассматривать как метрическое пространство (X, d) с **дискретной метрикой**: $d(x, x) = 0$, и $d(x, y) = 1$ для $x \neq y$.

Антидискретное пространство

Антидискретное пространство – топологическое пространство (X, τ) с *антидискретной топологией.* Его можно рассматривать как полуметрическое пространство (X, d) с **антидискретной полуметрикой:** $d(x, y) = 0$ для любых $x,y \in X$.

Метризуемое пространство

Топологическое пространство называется **метризуемым**, если оно гомеоморфно некоторому метрическому пространству. Метризуемые пространства всегда являются T_2-пространствами и **паракомпактными** (а значит **нормальными** и **вполне регулярными**) пространствами, а также первично-счетными пространствами.

Топологическое пространство называется **локально метризуемым**, если любая его точка обладает метризуемой окрестностью.

Топологическое пространство (X, τ) называется **подметризуемым**, если существует метризуемая топология τ' на X, более грубая, чем τ.

Ниже даны три примера других обобщений метризуемых пространств.

M-**пространство** Мориты – топологическое пространство (X, τ), из которого существует непрерывное отображение f на метризуемое топологическое пространство (Y, τ') , такое что f замкнуто и $f^{-1}(y)$ счетно компактно для каждого $y \in Y$.

M_1-**пространство** Седера –топологическое пространство (X, τ) с базой, сохраняющей σ-замыкание (метризуемые пространства имеют σ -локально конечные базы).

σ-пространство Окуямы – топологическое пространство (X, τ) с σ-локально конечной *сетью*, т.е. таким семейством $\mathfrak{U}$ подмножеств множества X, что для данной точки $x \in U$ (где U – открыто) существует такое $U' \in \mathfrak{U}$, что $x \in U' \subset U$ (база является сетью, состоящей из открытых множеств).

Глава 3

Обобщения метрических пространств

Некоторые обобщения понятия метрики, в частности понятия **квазиметрики, почти-метрики, расширенной метрики,** были рассмотрены в гл. 1. В данной главе представлены некоторые обобщения, связанные с топологией, теорией вероятностей, алгеброй и т.п.

3.1. *m*-МЕТРИКИ

m-Хемиметрикаметрика

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X^{m+1} \to \mathbb{R}$ называется m-хемиметрикой, если d неотрицательна, т.е. $d(x_1,\ldots,x_{n+1}) \geq 0$ для всех $x_1,\ldots, x_{n+1} \in X$, если d *вполне симметрична*, т.е. удовлетворяет условию $d(x_1,\ldots, x_{m+1}) = d(x_{\pi(1)},\ldots, x_{\pi(m+1)})$ для всех $x_1,\ldots, x_{m+1} \in X$ и любой перестановки π элементов $\{1,\ldots, m+1\}$, если d приведена к нулю, т.е. $d(x_1,\ldots, x_{m+1}) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1,\ldots, x_{m+1}$ не являются попарно различными, и если для всех $x_1,\ldots, x_{m+2} \in X$ функция d удовлетворяет m-**симплексному неравенству:**

$$d(x_1,\ldots, x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_{m+2}).$$

2-метрика

Пусть X – произвольное множество. Функция называется $d : X \to \mathbb{R}$ 2-**метрикой**, если d *неотрицательна, вполне симметрична,* приведена к нулю и удовлетворяет **неравенству тетраэдра**

$$d(x_1, x_2, x_3) \leq d(x_4, x_2 x_3) + d(x_1, x_4, x_4) + d(x_1, x_2, x_4).$$

Это – наиболее важный случай $m = 2$ произвольной m**-хемиметрики.**

(*m, s*)-суперметрика

Пусть X – произвольное множество и s – положительное вещественное число. Функция $d : X^{m+1} \to \mathbb{R}$ называется (m, s)-**суперметрикой** ([DeDu03]), если d *неотрицательна, вполне симметрична, приведена к нулю* и удовлетворяет (m, s)-**симплексному неравенству**:

$$d(x_1,\ldots, x_{m+1}) \leq \sum_{i=1}^{m+1} d(x_1,\ldots, x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_{m+2}).$$

(m, s)-суперметрика является m-**полуметрикой**, если $s \geq 1$.

3.2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ МЕТРИКИ

Неопределенная метрика

Неопределенная метрика (или *G-метрика*) на вещественном (комплексном) векторном пространстве V есть *билинейная* (для случая комплексной переменной – сескилинейная) форма G на V, т.е. функция $G\ V \times V\ \mathbb{R}(\mathbb{C})$, такая что для любых $x, y, z \in V$ и любых скаляров α, β имеют место следующие свойства:

$$G(\alpha x + \beta y, z) = \alpha G(x, z) + \beta G(y, z) \text{ и } G(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} G(x, z) + \overline{\beta} G(y, z)$$

где $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$ *обозначает комплексное сопряжение*).

Если G – положительно определенная симметричная форма, то это скалярное произведение на V и его можно использовать для канонического введения *нормы* и соответствующей **метрики нормы** на V. Для случая общей формы G не существует ни нормы, ни метрики, канонически связанной с G, и термин **неопределенная метрика** только напоминает о тесной связи положительно определенных билинейных форм с некоторыми метриками в векторном пространстве (см. гл. 7 и 26).

Пара (V, G) называется *пространством с неопределенной метрикой.* Конечномерное пространство с неопределенной метрикой называется *билинейным метрическим пространством*. **Гильбертово пространство** H, снабженное непрерывной G-метрикой, называется *гильбертовым пространством с неопределенной метрикой.* Наиболее важным примером такого пространства является *J-пространство.*

Подпространство L в пространстве (V, G) с неопределенной метрикой называется *положительным, отрицательным или нейтральным подпространством* в зависимости от выполнения неравенств $G(x, x) > 0$, $G(x, x) < 0$ или $G(x, x) = 0$ для всех $x \to L$.

Эрмитова *G*-метрика

Эрмитова *G* -метрика неопределенная метрика G^H на комплексном векторном пространстве V, такая что для всех $x, y \in V$ имеет место равенство $G^H(x, y) = \overline{G^H(y, x)}$, где $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$ означает *комплексное сопряжение.*

Регулярная *G*-метрика

Регулярная *G* -метрика есть непрерывная **неопределенная метрика** G на **гильбертовом пространстве** H над $\mathbb{C}$, порождаемая обратимым эрмитовым оператором T по формуле

$$G(x, y) = \langle T(x), y \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ – *скалярное произведение* на H.

Эрмитов оператор на гильбертовом пространстве H – *билинейный оператор* T на H, задаваемый на *области* плотности $D(T)$ пространства H по закону $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ для любых $x, y \in D(T)$. Ограниченный эрмитов оператор либо определен на всем H, либо может быть непрерывно продолжен на все H и тогда $T = T^*$. На конечномерном пространстве эрмитов оператор может быть задан *эрмитовой матрицей* $((a_{ij})) = ((\overline{a_{ji}}))$.

***J*-метрика**

***J*-метрика** – непрерывная **неопределенная метрика** G на **гильбертовом пространстве** H над C, задаваемая неким *эрмитовым инволютивным* отображением J на H по формуле

$$G(x, y) = \langle J(x), y\rangle,$$

где $\langle,\rangle$ – есть скалярное произведение на H.

Инволютивное отображение – отображение H на H, квадрат которого является *тождественным отображением*. Инволютивное отображение J может быть представлено равенством $J = P_+ - P_-$, , где P_+ и P_- являются ортогональными проекциями в H, а $P_+ + P_- = H$. *Ранг неопределенности* J-метрики определяется как $\min\{\dim P_+, \dim P_-\}$.

Пространство (H, G) называется J-*пространством. J-пространство* с конечным рангом неопределенности называется *пространством Понтрягина.*

3.3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБОБЩЕНИЯ

Частичное метрическое пространство

Частичное метрическое пространство (Мэтьюз, 1992) определяется как пара (X, d), где X – некоторое множество, а d – неотрицательная симметричная функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$, такая что $d(x, x) \le d(x, y)$ для всех $x, y \in X$ (т.е. любое **саморасстояние** $x(x. x)$, *мало*), $x = y$, если $d(x, x) = d(x, y) = d(y, y) = 0$ (T_0 – аксиома отделимости) и неравенство

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y) - d(z, z)$$

выполняется для всех $x, y, z \in X$ (**сильное неравенство треугольника**).

Если d является частичной метрикой, то $d(x, y) - d(x, x)$ будет квазиполуметрикой и (X, d) может быть частично упорядочено, если мы определим $x \preceq y$ тогда и только тогда $d(x, y) - d(x, x) = 0$.

Сходство

Пусть X – произвольное множество. Функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **сходством** на X, если d *симметрично* и если для всех $x, y \in X$ выполняется либо $d(x, x) \le d(x, y)$ – в таком случае d называется **сходством вперед неравенство**, либо $d(x, x) \ge d(x, y)$ – тогда d называется **сходством назад.**

Всякое сходство d порождает *строгий частичный порядок* $\prec$ на множестве всех неупорядоченных пар элементов X посредством задания $\{x, y\} \prec \{u, \nu\}$ тогда и только тогда, когда $d(x, y) < d(u, \nu)$.

Для любого сходства назад d сходство вперед – d порождает тот же частичный порядок.

Пространство τ-расстояния

Пространство τ-расстояния есть пара (X, f), где X – топологическое пространство, а f является τ-*расстоянием* Амри–Мутавакиля на X, т.е. неотрицательной функцией $f : X \times X \to \mathbb{R}$, такой что для любого $x \in X$ и любой окрестности U точки x существует $\varepsilon > 0$ с условием $\{y \in X : f(x, y) < \varepsilon\} \subset U$.

Любое пространство расстояний (X, d) есть пространство τ-расстояния для топологии τ_f, определенной следующим образом: $A \in \tau_f$, если для любого $x \in X$ существует $\varepsilon > 0$, такое что $\{y \in X : f(x, y) < \varepsilon\} \subset A$. Однако существуют неметризуемые пространства τ-расстояния. τ-Расстояние $f(x, y)$ не обязательно должно

быть симметричным или обращаться в нуль для $x = y$; например, $e^{|x-y|}$ является τ-расстоянием на $X = \mathbb{R}$ с обычной топологией.

Пространство близости

Пространство близости (Ефремович, 1936) – множество X с бинарным отношением δ на *степенном множестве* $P(X)$ всех его подмножеств, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $B\delta A$ (*симметричность*);

2) $A\delta(B \cup C)$ тогда и только тогда, когда $A\delta B$ или $A\delta C$ (*аддитивность*);

3) $A\delta A$ тогда и только тогда, когда $A \neq \emptyset$ (*рефлексивность*).

Отношение δ определяет **близость** (или *структуру близости*) на X. Если $A\delta B$ не выполняется, то множества A и B называются *удаленными множествами.*

Всякое метрическое пространство (X, d) есть пространство близости: определим, что $A\delta B$ тогда и только тогда, когда $d(A, B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y) = 0$.

Любая близость на X порождает (**вполне регулярную**) топологию на X заданием на множестве всех подмножеств X *оператора замыкания* $cl : P(X) \to P(X)$ по закону $cl(A) = \{x \in X : \{x\}\delta A\}$.

Равномерное пространство

Такие топологические пространства (с дополнительными структурами) дают обобщения метрических пространств, основанные на **расстоянии между множествами.**

Равномерным пространством (Вэйль, 1937) называется множество X с **равномерностью** (или *равномерной структурой*) $\mathfrak{U}$ – непустым семейством подмножеств множества $X \times X$, называемых *окружениями* и обладающих следующими свойствами:

1) каждое из подмножеств $X \times X$, содержащее множество из $\mathfrak{U}$, принадлежит $\mathfrak{U}$;

2) всякое конечное пересечение множеств из $\mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

3) каждое множество $V \in \mathfrak{U}$ содержит *диагональ*, т.е. множество $\{(x, x): x \in X\} \subset X \times X$;

4) если V принадлежит $\mathfrak{U}$, то множество $\{(y, x) : (x, y) \in V\}$ принадлежит $\mathfrak{U}$;

5) если V принадлежит $\mathfrak{U}$, то существует такое $V' \in \mathfrak{U}$, что $(x, z) \in V$ во всех случаях, когда $(x, y), (y, z) \in V'$.

Каждое метрическое пространство (X, d) является равномерным пространством. Окружение в (X, d) есть подмножество $X \times X$, содержащее множество $V_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}$ для некоторого положительного действительного числа ε. Другим базовым примером равномерного пространства являются топологические группы.

Пространство приближенности

Пространство приближенности (Херрих, 1974) есть множество X со *структурой приближенности*, т.е. непустой совокупностью $\mathfrak{U}$ семейств подмножеств множества X, называемых семействами *приближенности*, со следующими свойствами:

1) каждое семейство, подразделяющее семейство о приближенности, является семейством приближенности;

2) каждое семейство с непустым пересечением является семейством приближенности;

3) $V \in \mathfrak{U}$, если $\{cl(A)\colon A \in V\} \in \mathfrak{U}$, где $cl(A) = \{x \in X : \{\{x\}, A \in \mathfrak{U}\}$;

4) $\emptyset \in \mathfrak{U}$, в то время как множество $P(X)$ всех подмножеств множества X не является семейством приближенности;

5) если $\{A \cup B : A \in \mathcal{F}_\infty, B \in \mathcal{F}_\varepsilon \in \mathfrak{U}$, то $\mathcal{F}_\infty \in \mathfrak{U}$ или $\mathcal{F}_\varepsilon \in \mathfrak{U}$.

Равномерные пространства являются в точности **паракомпактными** пространствами приближенности.

Пространство приближений

Эти топологические пространства дают обобщения метрических пространств, основанные на **расстоянии между точкой и множеством.**

Пространство приближений (Лоу, 1989) есть пара (X, D), где X – некоторое множество, а D – **расстояние между точкой и множеством,** т.е. функция $X \times P(X) \to [0, \infty]$ (где $P(X)$ является множеством всех подмножеств X), удовлетворяющая для всех $x \in X$ и всех $A, B \in P(X)$ следующим условиям:

1) $D(x, \{x\}) = 0$;

2) $D(x, \{x\}) = \infty$;

3) $D(x, A \cup B) = \min\{D(x, A), D(x, B)\}$;

4) $D(x, A) \le D(x, A^\varepsilon) + \varepsilon$ для любых $\varepsilon \in [0, \infty]$, где $A^\varepsilon = \{x : D(x, A) \le \varepsilon\}$ есть "ε-шар" с центром в x.

Любое метрическое пространство (X, d) (более того, любое расширенное квазиполуметрическое пространство) есть пространство приближений с $D(x, A)$, являющимся обычным расстоянием между точкой и множеством.

Если мы имеем локально компактное сепарабельное метрическое пространство (X, d) и семейство $\mathcal{F}$ его непустых замкнутых подмножеств, то функция **Бэддли–Молчанова** дает инструмент для другого обобщения. Это – функция $D : X \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, которая является нижней полунепрерывной по отношению к ее первой переменной, измеренной относительно второй, и удовлетворяет следующим двум условиям: $F = \{x \in X : D(x, F) \le 0\}$ для $F \in \mathcal{F}$ и $D(x, F_1) \ge D(x, F_2)$ для $x \in X$ всякий раз, когда F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \subset F_2$.

Дополнительные условия $D(x, \{y\}) = D(y, \{x\})$ и $D(x, F) \le D(x, \{y\}) + D(\{y\}F)$ для всех $x, y \in X$ и всех $F \in \mathcal{F}$ дают нам аналоги симметрии и неравенства треугольника. Случай $D(x, F) = d(x, F)$ соответствует обычному расстоянию между точкой и множеством для метрического пространства (X, d); случай $D(x, F) = d(x, F)$ для $x \in X \backslash F$ и $D(x, F) = -d(x, F \backslash F)$ для $x \in X$ соответствует **функции расстояния со знаком** (гл. 1).

Метрическая борнология

Пусть X – топологическое пространство. *Борнологией* на X будет любое семейство $\mathcal{A}$ собственных подмножеств A множества X, для которых выполняются следующие условия:

1) $\cup_{A \in \mathcal{A}} A = X$;

2) $\mathcal{A}$ является *идеалом*, т.е. содержит все подмножества и конечные объединения его объектов;

Семейство $\mathcal{A}$ является **метрической борнологией** ([Beer99]), если, более того, имеют место условия;

3) $\mathcal{A}$ содержит счетную базу;

4) для любого $A \in \mathcal{A}$ существует $A' \in \mathcal{A}$, такое что замыкание множества A совпадает с множеством внутренних точек множества A'.

Метрическая борнология называется *тривиальной*, если $\mathcal{A}$ есть множество $P(X)$ всех подмножеств множества X; такая метрическая борнология соответствует

семейству ограниченных множеств некоторой ограниченной метрики. Для всякого некомпактного **метризуемого** топологического пространства X существует неограниченная метрика, совместимая с данной топологией. Нетривиальная метрическая борнология на таком пространстве X соответствует семейству ограниченных подмножеств по отношению к некоей неограниченной метрике. Некомпактное метризуемое топологическое пространство X допускает бесконечно много нетривиальных метрических борнологий.

3.4. ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЧИСЕЛ

Вероятностное метрическое пространство

Понятие **вероятностного метрического пространства** является обобщением понятия метрического пространства (см., например, [ScSk83]) по двум направлениям: расстояния становятся распределениями вероятности и сумма в неравенстве треугольника превращается в **операцию треугольника.**

Формально, пусть A – множество всех *функций распределения вероятности*, несущее множество которого находится в $[0, \infty]$. Для любого $a \in [0, \infty]$ зададим $\varepsilon_a \in A$ как $\varepsilon_a(x) = 1$, если $x > a$ или $x = \infty$ и $\varepsilon_a = 0$, иначе. Функции в A будут упорядочены: будем считать, что $F \le G$, если $F(x) \le G(x)$ для всех $x \ge 0$. Коммутативная и ассоциативная операция τ на A называется **операцией треугольника**, если она удовлетворяет условию $\tau(F, \varepsilon_0) = F$ для любого $F \in A$, и $\tau(F, E) \le \tau(G, H)$, если $E \le G$, $F \le H$.

Вероятностное метрическое пространство – это тройка (X, d, τ), где X – множество, d – функция $X \times X \to A$ и τ – операция треугольника, такая что для любых $p, q, r \in X$ выполняются условия:

1) $d(p, q) = \varepsilon_0$ тогда и только тогда, когда $p = q$;

2) $d(p, q) = d(q, p)$;

3) $d(p, r) \le \tau(d(p, q), d(q, r))$.

Неравенство 3 становится неравенством треугольника, если τ является обычным сложением на $\mathbb{R}$.

Для любого $x \ge 0$ значение $d(p, q)$ в точке x может быть интерпретировано как "вероятность того, что расстояние между p и q меньше, чем x"; Менгер предложил в 1942 г. называть данное понятие *статистическим метрическим пространством*. В этот же период были введены понятия *нечетко определенного (расплывчатого) метрического пространства* (см. также [Bloc99]).

Обобщенная метрика

Пусть X – произвольное множество. Пусть $(G, +, \le)$ – *упорядоченная полугруппа* (не обязательно коммутативная), имеющая наименьший элемент 0. Функция $d : X \times X \to G$ называется **обобщенной метрикой,** если выполняются следующие условия:

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$ для всех $x, y \in X$;

3) $d(x, y) = \overline{d(y, x)}$, где $\overline{\alpha}$ является фиксированным инволютивным отображением G, сохраняющим порядок.

Пара (X, d) называется **обобщенным метрическим пространством**.

Если условие 2 и требование "только тогда" в условии 1 снимаются, мы получаем **обобщенное расстояние** d и **обобщенное пространство расстояний** (X, d).

Расстояние на построении

Группа Кокстера – группа $(W, \cdot, 1)$ порождаемая элементами $\{w_1, \ldots, w_n : (w_i w_j)^{m_{ij}} = 1, 1 \le i, j \le n\}$. Здесь $M = ((m_{ij}))$ – *матрица Кокстера*, т.е. произвольная симметричная $(n \times n)$-матрица, такая что $m = 1$, а остальные значения – положительные целые числа или ∞. Длина $l(x)$ элемента $x \in W$ есть наименьшее число порождающих операторов $w_1, \ldots, w_n$, необходимых для представления x.

Пусть X – произвольное множество $(W, \cdot, 1)$ – группа Кокстера. Пара (X, d) называется *построением* над $(W, \cdot, 1)$, если функция $d : X \times X \to W$, называемая **расстоянием на построении,** обладает следующими свойствами:

1) $d(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) = (d(x, y))^{-1}$;

3) отношение $\sim_i$, задаваемое условием $x \sim_i y$, если $d(x, y) = 1$ или w_i, есть отношение эквивалентности;

4) для данного $x \in X$ и класса эквивалентности C из $\sim_i$ существует единственное $x \in C$, такое что $d(x, y)$ *кратчайшее* (т.е. наименьшей длины) и $d(x, y') = d(x, y)w_i$ для любого $y' \in C$, $y' \ne y$.

Расстояние галереи на построении d' есть обычная метрика на X, задаваемая как $l(d(x, y))$. Расстояние d' – это **метрика пути** на графе с множеством вершин X и xy в качестве ребра, если $d(x, y) = w_i$ для некоторого $1 \le i \le n$. Расстояние галереи на построении есть особый случай **метрики галереи** (*камерной системы X*).

Булево метрическое пространство

Булева алгебра (или *булева решетка*) есть *дистрибутивная решетка* $(B, \vee, \wedge)$ с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1, такая что каждый элемент $x \in B$ обладает *дополнительным элементом* $\bar{x}$, таким что $x \vee \bar{x} = 1$ и $x \wedge \bar{x} = 0$.

Пусть X – произвольное множество и $(B, \vee, \wedge)$ – булева алгебра. Пара (X, d) называется **булевым метрическим пространством** над B, если функция $d : X \times X \to B$ обладает следующими свойствами:

1) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x, y) \le d(x, z) \vee d(z, y)$ для всех $x, y, z \in X$.

Пространство над алгеброй

Пространство над алгеброй есть метрическое пространство с дифференциально-геометрической структурой, точки которого могут быть снабжены координатами из некоторой *алгебры*, как правило, ассоциативной и с единичным элементом.

Модуль над алгеброй является обобщением векторного пространства над полем, его определение может быть получено из определения векторного пространства путем замены поля на ассоциативную алгебру с единичным элементом. *Аффинное пространство над алгеброй* является аналогичным обобщением *аффинного пространства* над полем. В аффинных пространствах над алгебрами можно определить эрмитову метрику, в то время как для коммутативных алгебр может быть определена даже квадратичная метрика. Для этого в унитальном модуле необходимо определить *скалярное произведение* $\langle x, y \rangle$, в первом случае со свойством $\langle x, y \rangle = J(\langle y, x \rangle)$, где J является инволютивным отображением алгебры, а во втором случае со свойством $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

n-Мерное *проективное* пространство над алгеброй задается как многообразие одномерных подмодулей $(n + 1)$-мерного унитального модуля над этой алгеброй. Введение *скалярного произведения* $\langle x, y \rangle$ в унитальном модуле позволяет задать в построенном с помощью данного модуля проективном пространстве эрмитову или, для случая коммутативной алгебры, квадратичную эллиптическую и гипербо-

лическую метрику. Метрический инвариант точек этих пространств есть *ангармоническое отношение* $W = \langle x, x\rangle^{-1} \langle x, y\rangle \langle y, y\rangle^{-1} \langle x, y\rangle$. Если W – действительное число, то инвариант w, для которого $W = \cos^2 w$, называется **расстоянием** между x и y **в пространстве над алгеброй.**

Частично упорядоченное расстояние

Пусть X – произвольное множество. Пусть $(G, \leq)$ – частично упорядоченное множество с наименьшим элементом g_0, такое что $G' = G\backslash\{g_0\}$ непусто, и для любых $g_1, g_2 \in G'$ существует $g_3 \in G'$, такое что $g_3 \leq g_1$ и $g_3 \leq g_2$.

Частично упорядоченное расстояние есть функция $d : X \times X \to G$, такая что для любых $x, y \in X$ равенство $d(x, y) = g_0$ выполняется тогда и только тогда, когда $x = y$.

Рассмотрим следующие возможные свойства.

1. Для любого $g_1 \in G'$ существует $g_2 \in G'$, такое что для любых $x, y \in X$ из неравенства $d(x, y) \leq g_2$ следует неравенство $d(x, y) \leq g_1$.

2. Для любого $g_1 \in G$ существуют $g_2, g_3 \in G'$, такие что для любых $x, y, z \in X$ из неравенств $d(x, y) \leq g_2$ и $d(y, z) \leq g_2$ следует неравенство $(y, x) \leq g_1$.

3. Для любого $g_1 \in G'$ существует $g_2 \in G$, такое что для любых $x, y, z \in X$ из неравенств $d(x, y) \leq g_2$ и $d(y, z) \leq g_2$ следует неравенство $d(y, x) \leq g_1$.

4. G' не имеет первого элемента.

5. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$.

6. Для любого $g_1 \in G'$ существует $g_2 \in G'$, такое что для любых $x, y \in X$ из неравенств $d(x, y) <^* g_2$ и $d(y, z) <^* g_1$ следует неравенство $d(x, z) <^* g_1$; здесь $p <^* q$ означает, что либо $p < q$, либо p не сравнимо с q.

7. Отношение порядка $<$ является линейным порядком на G.

В терминах указанных выше свойств d называется: **частично упорядоченное расстояние Апперта,** если выполняются условия 1 и 2; **частично упорядоченное расстояние Голмеса первого типа**, если выполняются условия 4, 5 и 6; **частично упорядоченное расстояние Голмеса второго типа**, если выполняются условия 3, 4, и 5; **расстояние Курепа–Фреше**, если выполняются условия 3, 4, 5 и 7.

Именно, случай $G = \mathbb{R}_{\geq 0}$ расстояния Курепа–Фреше соответствует V-**пространству Фреше,** т.е. паре (X, d), где X – множество и $d(x, y)$ – неотрицательная симметричная функция $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (*соседство* точек x и y), такая что $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, и существует неотрицательная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ со следующим свойством: для всех $x, y, z \in X$ и всех положительных r неравенство $\{d(x, y), d(y, z)\} \leq r$ порождает нераенства $d(x, z) \leq f(r)$.

Глава 4

Метрические преобразования

Существует немало способов получения новых расстояний (метрик), используя уже имеющиеся расстояния (метрики). Метрические преобразования позволяют получать новые расстояния как функции от заданных метрик (или заданных расстояний) на одном и том же множестве X. В таком случае полученная метрика будет называться **преобразованной метрикой**. Ниже, в разд. 4.1 приводятся важнейшие примеры таких преобразованных метрик.

При наличии метрики на множестве X можно построить новую метрику на некотором расширении X; аналогичным образом, имея семейство метрик на множествах $X_1,\ldots, X_n$, можно получить новую метрику на некотором расширении $X_1,\ldots, X_n$. Примеры таких аперация представлены в разд. 4.2.

Если имеется метрика на X, существует много расстояний на других структурах, связанных с X, например на множестве всех подмножеств множества X. Основные расстояния данного типа рассматриваются в разд. 4.3.

4.1. МЕТРИКИ НА ТОМ ЖЕ МНОЖЕСТВЕ

Метрическое преобразование

Метрическое преобразование есть расстояние на множестве X, полученное как функция данных метрик (или данных расстояний) на X.

В частности, имея непрерывную монотонно возрастающую функцию $f(x)$ от $x \geq 0$, которая называется *шкалой*, и пространство расстояний $(X,\ d)$, можно получить другое пространство расстояний $(X,\ d_f)$, называемое *метрическим преобразованием школирования* пространства X, определяя $d_f(x, y) = f(d(x, y))$. Для каждого конечного пространства расстояний $(X,\ d)$ существует такая шкала f, что $(X,\ d_f)$ является метрическим подпространством евклидова пространства $\mathbb{E}^n$.

Если $(X,\ d)$ – метрическое пространство, а f – непрерывная дифференцируемая строго возрастающая функция с $f(0) = 0$ и невозрастающей производной f', то $(X,\ d_f)$ будет метрическим пространством (см. **метрика функционального преобразования**).

Метрика d является ультраметрикой тогда и только тогда, когда $f(d)$ есть метрика для каждой неубывающей функции $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Метрика преобразования

Метрика преобразованния – метрика на множестве X, которая является **метрическим преобразованием**, т.е. получена как функция заданной метрики (или заданных метрик) на X. В частности, метрикой преобразованния могут быть получены из заданной метрики d (или заданных метрик d_1 и d_2) на X любой из указанных ниже операций (здесь $t > 0$):

1) $td(x, y)$ (**t-шкалирования метрика**, или **растянутая метрика, подобная метрика**);

2) $\min\{t, d(x, y)\}$ (**t-усеченная метрика**);

3) $\max\{t, d(x, y)\}$ для $x \neq y$ (t-**дискретная метрика**);
4) $d(x, y) + t$ для $x \neq y$ (t-**перенесенная метрика**);
5) $\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$;
6) $dp(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{d(x,p)+d(y,p)+d(x,y)}$, где – фиксированный элемент из X (**метрика преобразования биотопа**);
7) $\max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$;
8) $\alpha d_1(x, y) + \beta d_2(x, y)$, где (см. **метрический конус**, гл. 1).

Обобщенная метрика преобразования биотопа

Для данной метрики d на множестве X и замкнутого множества $M \subset X$ **обобщенная метрика преобразования биотопа** d^M на X определяется как

$$d^M(x,y) = \frac{d(x,y)}{d(x,y) + \inf_{z \in M}(d(x,z) + d(y,z))}.$$

Именно $d^M(x, y)$ и tt 1-**усечение** $\{1, d^M(x, y)\}$ являются метриками. **Метрика преобразования биотопа** есть $d^M(x, y)$ с M, состоящим только из одной точки, скажем, p; расстояние биотопа (см. гл. 23) получается в случае $d(x, y) = |x\Delta y|$, $p = \emptyset$.

Метрика аункционального преобразования

Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая действительная функция, заданная для $x \geq 0$, такая что $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$ для всех $x \geq 0$ и $f''(x) \leq 0$ и для всех $x \geq 0$. (f является *вогнутой* на $[0, \infty]$; в частности $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.)

Если (X, d) – метрическое пространство, то **метрика функционального преобразования** d_f есть **метрика преобразования** на X, определенная как

$$f(d(x, y)).$$

Метрики d_f и d – эквивалентны. Если d есть метрика на X, то, н априм ер, $\alpha d (\alpha > 0)$, $d^\alpha (0 < 1)$, $\ln(1 + d)$, $\operatorname{arcsinh} d$, $\operatorname{arccosh}(1 + d)$ и $\dfrac{d}{1+d}$ будут метриками функционального преобразования на X.

Метрика степенного преобразования

Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Если дано метрическое пространство (X, d), то **метрика степенного преобразования** (или *метрика преобразования снежинки*) есть **метрика функционального преобразования** на X, определенная как

$$(d(x, y))^\alpha.$$

Для данной метрики d на X и любого $\alpha > 1$ функция d^α является в общем случае только расстоянием на X. Она является метрикой для любого положительного α тогда и только тогда, когда d – **ультраметрика.**

Метрика d является **метрикой удвоения** тогда и только тогда, когда (Ассуад, 1983) метрика степенного преобразования d^α допускает **би-липшицево вложение** в некоторое евклидово пространство для каждого $0 < \alpha \leq 1$ (см. определения гл. 1).

Метрика преобразования Шенберга

Пусть $\lambda > 0$. Если (X, d) – метрическое пространство, то **метрикой преобразования Шенберга** называется **метрика функционального преобразования** на X,

определенная как

$$1 - e^{-\lambda d(x,y)}.$$

Метрики преобразования Шенберга являются в точности *P*-**метриками** (гл. 1), которые определяются не функцией преобразования, а усиленной версией неравенства треугольника.

Метрика обратного образа

Для двух метрических пространств (X, d_X), (Y, d_Y) и инъективного отображения $g : X \to Y$ **метрика обратного образа** (из (Y, d_Y) по) на X задается как

$$d_Y(g(x), g(y)).$$

Если (X, d_X) и (Y, d_Y) совпадают, то метрика обратного образа называется *метрикой g*-**преобразования.**

Внутренняя метрика

Для метрического пространства (X, d), в котором каждая пара точек x, y соединена *спрямляемой кривой*, **интернальной метрикой** (или **порожденной внутренней метрикой**), D называется **метрика преобразования** на X, полученная из d как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих две данные точки x и $y \in X$.

Метрика d на X называется **внутренней метрикой** (или **метрикой длины**, см. гл. 6), если она совпадает со своей порожденной внутренней метрикой.

Метрика преобразования Фарриса

Для метрического пространства (X, d) и точки $z \in X$ **преобразование Фарриса** есть метрическое преобразование D_z на $X\backslash\{z\}$, задаваемое как $D_z(x, x) = 0$, и для различных $x, y \in X\backslash\{z\}$ – как

$$D_z(x, y) = C - (x \bullet y)_z,$$

где C есть положительная константа, а $(x.y)_z = \frac{1}{2}(d(x,z) + d(y,z) = d(x,y))$ есть **произведение Громова** (см. гл. 1). Преобразование Фарриса будет метрикой, если $C \geq \max_{x,y \in X\backslash\{z\}} d(x, z)$. Точнее, существует такое число $C_0 \in (\max_{x,y \in X\backslash\{z\}, x \neq y} (x.y)_z, \max_{x \in X\backslash\{z\}} d(x, z)]$, что преобразование Фарриса является метрикой тогда и только тогда, когда $C \geq C_0$. Оно является **ультраметрикой** тогда и только тогда, когда d удовлетворяет **неравенству четырех точек**. В филогенетике, где оно было применено впервые, термин *преобразование Фарриса* используется для функции $d(x, y) - d(x, z)$.

Метрика преобразования инволютивного

Возьмем метрическое пространство (X, d) и точку $z \in X$. **Метрикой инволютивного преобразованния** называется метрическое преобразование d_z на $X\backslash\{z\}$, задаваемое как

$$d_z(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(x, z)d(y, z)}.$$

Оно является метрикой для любого $z \in X$ тогда и только тогда, когда d есть птолемеева метрика ([FoSC06]).

4.2. МЕТРИКИ НА РАСШИРЕНИЯХ ДАННОГО МНОЖЕСТВА

Расстояния расширения

Если d есть расстояние на $V_n = \{1,\ldots, n\}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, то используются следующие расстояния расширенния (см., например, [DeLa97]).

Расстояние расширенния селекции $\mathrm{gat} = \mathrm{gat}_\alpha^d$ есть расстояние на $V_{n+1} = \{1,\ldots, n+1\}$, задаваемое следующими условиями:

1) $\mathrm{gat}(1, n + 1) = \alpha$;
2) $\mathrm{gat}(i,n + 1) = \alpha + d(1, i)$, если $2 \le i \le n$;
3) $\mathrm{gat}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i < j \le n$.

Расстояние gat_0^d называется **0-расширением селекции** или просто 0-**расширением** расстояния d. Если $\alpha \ge \max_{2\le i\le n} d(1, i)$, то **антиподальное расстояние расширенния** $\mathrm{ant} = \mathrm{ant}_\alpha^d$ есть расстояние на V_{n+1}, задаваемое следующими условиями:

1) $\mathrm{ant}(1, n + 1) = \alpha$;
2) $\mathrm{ant}(i, n + 1) = \alpha - d(1, i)$, если $2 \le i \le n$;
3) $\mathrm{ant}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i < j \le n$.

Если $\alpha \ge \max_{1\le i,j\le n} d(i,j)$, то **полное антиподальное расстояние расширенния** $\mathrm{Ant} = \mathrm{Ant}_\alpha^d$ есть расстояние на $V_{2n} = \{1,\ldots,2n\}$, задаваемое следующими условиями:

1) $\mathrm{Ant}(i,n + i) = \alpha$, если $1 \le i \le n$;
2) $\mathrm{Ant}(i,n + j) = \alpha - d(i, j)$, если $1 \le i \ne j \le n$;
3) $\mathrm{Ant}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i \ne j \le n$;
4) $\mathrm{Ant}(n + i,n + j) = d(i,j)$, если $1 \le i \ne j \le n$.

Оно является результатом последовательного применения операции антиподального расширения n раз, начиная с d.

Расстояние сферического расширения $\mathrm{sph} = \mathrm{sph}_\alpha^d$ есть расстояние на V_{n+1}, задаваемое следующими условиями:

1) $\mathrm{sph}(i,n + 1) = \alpha$, если $1 \le i \le n$;
2) $\mathrm{sph}(i, j) = d(i, j)$, если $1 \le i < j \le n$.

Расстояние 1 суммы

Пусть d_1 – расстояние на множестве X_1, d_2 – расстояние на множестве X_2 и $X_1 \cap X_2 = \{x_0\}$. **Расстояние 1 суммы** d_1 и d_2 есть расстояние d на $X_1 \cup X_2$, задаваемое следующими условиями:

$$d(x,y) = \begin{cases} d_1(x,y), & \text{если} \quad x,y \in X_1, \\ d_2(x,y), & \text{если} \quad x,y \in X_2, \\ d(x,x_0) + d(x_0y), & \text{если} \quad x \in X_1, y \in X_2. \end{cases}$$

В теории графов расстояние 1 суммы является **метрикой пути**, соответствующей операции 1 суммы для графов.

Метрика непересекающегося объединения

Пусть (X_t, d_t), $t \in T$ – семейство метрических пространств. **Метрикой непересекающегося объединения** будет метрика расширения на множестве $\cup_t X_t \times \{t\}$, задаваемая как

$$d((x, t_1), (y, t_2)) = d_t(x, y)$$

для $t_1 = t_2$, и $d((x, t_1), (y, t_2)) = \infty$ – иначе.

Метрика произведения

Пусть (X_1, d), (X_2, d_2),…, (X_n, d_n) – метрические пространства. Тогда **метрика произведения** есть метрика на *декартовом произведении* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{x = (x_1, x_2,\ldots,x_n) : x_1 \in X_1,\ldots, x_n \in X_n\}$ определяемая как функция от $d_1,\ldots,d_n$. Простейшие метрики произведения определяются как

1) $\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$;

2) $(\sum_{i=1}^{n} d_i^p(x_i y_i))^{\frac{1}{p}}$, $1 < p < \infty$;

3) $\max_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i)$;

4) $\min_{1 \le i \le n} \{d_i(xi_{,}, y_i\}$;

5) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$.

Последние две метрики являются **ограниченными** и могут быть построены для произведения счетного числа метрических пространств.

Если $X_1 = \ldots = X_n = \mathbb{R}$, и $d_1 = \ldots = d_n = d$, где $d(x, y) = |x, y|$ является **натуральной метрикой** на $\mathbb{R}$, то все вышеуказанные метрики произведения индуцируют евклидову топологию на n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$. Они не совпадают с евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^n$, но эквивалентны ей. В частности, множество $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой может рассматриваться как декартово произведение $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ n копий *действительной прямой* $(\mathbb{R}, d)$ с метрикой произведения, заданной как $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i, y_i)}$.

Метрика произведения Фреше

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство с **ограниченной** метрикой d. Пусть $X^{\infty} = X \times \ldots \times X \ldots = \{x = (x_1,\ldots, x_n,\ldots): x_1 \in X_n,\ldots\}$ – *пространство произведения* для X.

Метрика произведения Фреше есть метрика произведения на X^{∞}, задаваемая как

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n d(x_n, y_n),$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ является любым сходящимся рядом, состоящим из положительных элементов. Обычно используется $A_n = \frac{1}{2^n}$. Метрика (иногда ее называют *метрикой Фреше*) на множестве всех последовательностей $\{x_n\}_n$ действительных (комплексных) чисел, задаваемая как

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|},$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ является любым сходящимся рядом с положительными элементами,

является метрикой произведения Фреше для счетного числа копий множества $\mathbb{R}(\mathbb{C})$. Обычно берется $A_n = \frac{1}{n!}$ или $A_n = \frac{1}{2^n}$.

Метрика гильбертова куба

Гильбертов куб I^{χ_0} есть *декартово произведение* счетного числа копий интервала [0,1], снабженное метрикой $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|$ (см. **Метрика произведения Фреше**). Его можно отождествлять (с точностью до гомеоморфизма) с компактным метрическим пространством, образуемым всеми последовательностями $\{x_n\}_n$ действительных чисел, таких что $0 \le x_n \le \frac{1}{n}$, где метрика задана как $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$.

Метрика косого произведения

Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – два полных **пространства длины** (см. гл. 1) и $f : X \to \mathbb{R}$ – положительная непрерывная функция. Для данной кривой $\gamma : [a, b] \to X \times Y$ рассмотрим ее проекции $\gamma 1 : [a, b] \to Y$ и на X и Y, и определим длину по формуле $\int_a^b \sqrt{|\gamma_1'|^2(t) + f^2(\gamma_1(t))\,|\gamma_2'|^2(t)}\,dt$.

Метрикой косого произведения называется метрика на $X \times Y$, задаваемая как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих две данные точки из $X \times Y$ (см.[BuIv01]).

4.3. МЕТРИКИ НА ДРУГИХ МНОЖЕСТВАХ

Имея произвольное метрическое пространство (X, d), можно построить расстояния между некоторыми подмножествами множества X. Основными такими расстояниями будут: **расстояние между точкой и множеством** $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$, определяемое между точкой $x \in X$ и подмножеством $A \subset X$, **расстояние между множествами** $\operatorname{inax}_{x \in A, y \in B} d(x, y)$, определяемое между двумя подмножествами A и B множества X, **хаусдорфова метрика** между компактными подмножествами X. Указанные расстояния рассмотрены в гл. 1. В настоящем разделе представлен перечень некоторых других расстояний этого типа.

Расстояние между прямыми

Расстояние между прямыми есть **расстояние между множествами** в $\mathbb{E}^3$, где в качестве множеств берутся *скрещивающиеся прямые*, т.е. две прямые, не лежащие в одной плоскости. Расстояние между прямыми – это длина отрезка их общего перпендикуляра, концы которого лежат на прямых. Для и l_1 и l_2, заданных равенствами $l_1 : x = pt,\ t \in \mathbb{R}$ и $l_2 : x = r + st,\ t \in \mathbb{R}$, расстояние между ними вычисляется по формуле

$$\frac{|\langle r - p, q \times s \rangle|}{\| q \times s \|_2},$$

где $\times$ – *векторное произведение* на $\mathbb{E}^3$, $\langle , \rangle$ – *скалярное произведение* на $\mathbb{E}^3$, $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма. Для $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ имеет место равенство $x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

Расстояние между точкой и прямой

Расстояние между точкой и прямой есть частный случай **расстояния между точкой и множеством**, где в качестве множества рассматривается прямая.

В $\mathbb{E}^2$ расстояние между точкой $z = (z_1, z_2)$ и прямой l: $ax_1 + bx_2 + c$ 0 вычисляется по формуле

$$\frac{|\, az_1 + bz_2 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В $\mathbb{E}^3$ расстояние между точкой $z = (z_1, z_2, z_3)$ и прямой l: $x = p + qt$, $t \in \mathbb{R}$ вычисляется по формуле

$$\frac{\| q \times (p - z) \|_2}{\| q \|_2},$$

где $\times$ – *векторное произведение* на $\mathbb{E}^3$ и $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма.

Расстояние между точкой и плоскостью

Расстояние между точкой и плоскостью есть частный случай **расстояния между точкой и множеством** в $\mathbb{E}^3$, где в качестве множества рассматривается плоскость. Расстояние между точкой (z_1, z_2, z_3) и плоскостью α: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ вычисляется по формуле

$$\frac{|\, az_1 + bz_2 + cz_3 + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Расстояние между простыми числами

Расстояние между простыми числами – частный случай **расстояния между точкой и множеством** в $(\mathbb{N}, |\, n - m \,|)$, а именно между числом $n \in \mathbb{N}$ и множеством простых чисел $P \subset \mathbb{N}$. Данное расстояние определяется как абсолютная величина разности между n и ближайшим к нему простым числом.

Расстояние до ближайшего целого

Расстояние до ближайшего целого есть частный случай **расстояния между точкой и множеством** в $(\mathbb{R}, |\, x - y \,|)$, а именно, между числом $x \in \mathbb{R}$ и множеством целых чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, т.е. $\min_{n \in Z} |\, x - n \,|$.

Буземанова метрика множеств

Если (X, d) – произвольное метрическое пространство, то **буземановой метрикой множеств** (см. [Buse55]) является метрика на множестве всех непустых замкнутых подмножеств множества X, определенная как

$$\sup_{x \in X} |\, d(x, A) - d(x, B) \,|\, e^{-d(p,x)},$$

где p – фиксированная точка множества X, а $d(x, A) = \min_{y \in d} d(x,y)$ – **расстояние между точкой и множеством.**

Вместо весового множителя $e^{-d(p,x)}$ можно взять любую функцию преобразования расстояния, убывающую достаточно быстро (см. **Хаусдорфово L_p-расстояние,** гл. 21).

Фактор-полуметрика

Пусть (X, d) – **расширенное метрическое пространство** (т.е. пространство с метрикой, которая, возможно, может принимать значение ∞) и $\sim$ есть отношение

эквивалентности на X. Тогда **фактор-полуметрикой** является полуметрика на множестве $\overline{X} = X / \sim$ классов эквивалентности, определяемая для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{X}$ как

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^{m} d(x_i, y_i),$$

где инфимум берется по всем последовательностям x_1, y_1, x_2, y_2, y_2,…, x_m, y_m с $_1 \in \bar{x}, y_m \in \bar{y}$ и $y_i \sim x_{i+1}$ для $i = 1,2,\ldots, m-1$. При этом неравенство $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \le d(x, y)$ справедливо для всех $x, y \in X$ и d является наибольшей полуметрикой $\overline{X}$ на с таким свойством.

Глава 5

Метрики на нормированных структурах

В данной главе рассматриваются специальные классы метрик, задаваемых на некоторых *нормированных структурах* как норма разности между двумя элементами. Такая структура может быть группой (с групповой *нормой*), векторным пространством (с *векторной нормой* или просто *нормой*), векторной решеткой (с *нормой Рисса*), полем (с *валюацией*) и т.п.

Метрика нормы группы

Метрикой нормы группы называется метрика на *группе* $(G, +, 0)$, определяемая как

$$\| x + (-y) \| = \| x - y \|,$$

где $\| \cdot \|$ – *норма группы* на G, т.е. функция $| \cdot \|: G \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x, y \in G$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$ с $\| x \| = 0$ с тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| x \| = \| -x \|$;
3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (**неравенство треугольника**).

Любая метрика нормы группы d является **правоинвариантной**, т.е. $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ для любых $x, y, z \in G$. С другой стороны, любая правоинвариантная (равно как и любая левоинвариантная и, в частности, **биинвариантная**) метрика d на G есть метрика нормы группы, поскольку норма группы может быть задана на G как $\| x \| = d(x, 0)$.

Метрика *F*-нормы

Векторное (или *линейное*) *пространство* над *полем* $\mathbb{F}$ есть множество V, снабженное действиями *сложения векторов* $+: V \times V \to V$ и *умножения на скаляр* $\cdot: F \times V \to V$, такими что $(V, +, 0)$ образует *абелеву группу* (где $0 \in V$ есть *нуль-вектор*), а для всех *векторов* $x, y \in V$ и любых *скалярных величин* $a, b \in \mathbb{F}$ имеют место следующие свойства: $1 \cdot x = x$ (где 1 является мультипликативной единицей поля $\mathbb{F}$), $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$, $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ и $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$. Векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *действительным векторным пространством*. Векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел называется *комплексным векторным пространством*.

Метрика *F*-нормы – метрика на действительном (комплексном) векторном пространстве V, определенная как

$$\| x - y \|_F,$$

где $\| \cdot \|_F$ является *F-нормой* на V, т.е. функцией $\| \cdot \|_F : V \to \mathbb{R}$ такой что для всех $x, y \in V$ и для любого скаляра a с $| a | = 1$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \|_F \geq 0$ с $\| x \|_F = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| ax \|_F = \| x \|_F$;
3) $\| x + y \|_F \leq \| x \|_F + \| y \|_F$ (неравенство треугольника).

F-норма называется *p-однородной*, если $\| ax \|_F = | a |^p \| x \|_F$.

Метрика F-нормы d является **инвариантной метрикой переноса**, т.е. $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ для всех $x, y, z \in V$. И наоборот, если d является инвариантной метрикой переноса на V, то $\| x \|_F = d(x, 0)$ является F-нормой на V.

***F**-метрика**

***F**-метрика** – метрика ***F*-нормы** $\| x - y \|_F$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V, такая что действия умножения на скаляр и сложения векторов являются *непрерывными* относительно $\| \cdot \|_F$. Это означает, что $\| \cdot \|_F$ есть функция $\| \cdot \|_F : V \to \mathbb{R}$ такая что для всех и всех $x, y, x_n \in V$ скалярных величин a, a_n имеем следующие свойства:

1) $\| x \|_F \geq 0$ с $\| x \|_F = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| ax \|_F = \| x \|_F$ для всех a с $| a | = 1$;
3) $\| x + y \|_F \leq \| x \|_F + \| y \|_F$;
4) $\| a_n x \|_F \to 0$ если $a_n \to 0$;
5) $\| ax_n \|_F \to 0$, если $x_n \to 0$;
6) $\| a_n x_n \|_F \to 0$ если $a_n \to 0, x_n \to 0$.

Метрическое пространство $(V, \| x - y \|_F)$ с F^*-метрикой называется *F^*-пространством*. Эквивалентно, F^*-пространство есть метрическое пространство (V, d) с такой **инвариантной метрикой переноса** d, что действия умножения на скаляр и сложения векторов являются непрерывными относительно этой метрики.

Модулярным пространством является F^*-пространство $(V, \| \cdot \|_F)$, в котором F-норма $| \cdot \|_F$ определяется как

$$\| x \|_F = \inf \left\{ \lambda > 0 : \rho\left(\frac{x}{\lambda}\right) < \lambda \right\},$$

и ρ есть *модуляр метризования* на V, т.е. такая функция $\rho : V \to [0, \infty]$, что для всех $x, y, x_n \in V$ и всех скалярных величин a, a_n имеют место следующие свойства:

1) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) если $\rho(ax) = \rho(x)$, то $| a | = 1$;
3) если $\rho(ax + by) \leq \rho(x) + \rho(y)$, то $a + b = 1$;
4) $\rho(a_n x) \to 0$, если $a_n \to 0$ и $\rho(x) < \infty$;
5) $\rho(ax_n) \to 0$, если $\rho(x_n) \to 0$ (*свойство метризования*);
6) для любого $x \in V$ существует такое $k > 0$, что $\rho(kx) < \infty$.

Полное F^*-пространство называется *F-пространством*. **Локально выпуклое** F-пространство известно в функциональном анализе как *пространство Фреше*.

Метрика нормы

Метрика нормы – метрика на действительном (комплексном) векторном пространстве V, определяемая как

$$\| x - y \|,$$

где $\| \cdot \|$ является *нормой* на V, т.е. такой функцией $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in V$ и любого скаляра a имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$ с $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| ax \| = | a | \| x \|$;
3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Следовательно, норма $\| \cdot \|$ является 1-*однородной F-нормой*. Векторное пространство $(V, \| \cdot \|)$ называется *нормированным векторным пространством* или просто *нормированным пространством*.

На любом данном конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны. Всякое конечномерное нормированное пространство является **полным**. Любое метрическое пространство может быть изометрически вложено в некоторое нормированное векторное пространство как замкнутое линейно независимое подмножество.

Нормированное угловое расстояние между x и y задается как

$$d(x,y) = \left\| \frac{x}{\| x \|} - \frac{y}{\| y \|} \right\|.$$

Малигранда заметил следующее усиление неравенства треугольника в нормированных пространствах: для любых $x, y \in V$ выполняется условие

$$(2 - d(x, -y)) \min\{\| x \|, \| y \|\} \le \| x \| + \| y \| - \| x + y \| \le (2 - d(x, -y)) \{\| x \|, \| x \|\}.$$

Полуметрика полунормы

Полуметрикой полунормы называется полуметрика на действительном (комплексном) векторном пространстве V, задаваемая как

$$\| x - y \|,$$

где $\| \cdot \|$ является *полунормой* (или *преднормой*) на V, т.е. такой функцией $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in V$ и любого скаляра a имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \ge 0$ с $\| 0 \| = 0$;

2) $\| ax \| = | a | \ \| x \|$;

3) $\| x + y \| \le \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Векторное пространство $(V, \| \cdot \|)$ называется *полунормированным векторным пространством*. Многие *нормированные векторные пространства,* например **банаховы пространства**, определяются как фактор-пространство по подпространству элементов полунормы нуль.

Квазинормированным пространством является векторное пространство V, на котором задана *квазинорма*. *Квазинормой* на V называется неотрицательная функция $\| \cdot \| : \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая тем же аксиомам, что и норма, за исключением неравенства треугольника, которое заменяется более слабым условием: существует константа $C > 0$, такая что для всех $x, y \in V$ выполняется неравенство

$$\| x + y \| \le C) \| x \| + \| y \|)$$

(см. **Почти-метрика**, гл. 1). Примером квазинормированного пространства, которое не является нормированным, может служить **лебегово пространство** $L_p(\Omega)$ с $0 < p < 1$, в котором квазинорма задается как

$$\| f \| = (\int_{\Omega} | f(x) |^p \, dx)^{1/p}, \ f \in L_p(\Omega).$$

Банахово пространство

Банахово пространство (или *B-пространство*) есть **полное** метрическое пространство $(V, \| x - y \|)$ на векторном пространстве V с метрикой нормы $\| x - y \|$. Эквивалентно, оно является полным *нормированным пространством* $(V, \| \cdot \|)$. В этом случае норма $\| \cdot \|$ на V называется *банаховой нормой*. Примерами банаховых пространств являются:

1) l_p^n *- пространства*, l_p^∞ *- пространства,* $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$;

2) пространство C сходящихся числовых последовательностей с нормой $\| x \| = \sup n \mid x_n \mid$;

3) пространство C_0 числовых последовательностей, которые сходятся к нулю по норме $\mid x \| = \max_n \mid x_n \|$;

4) пространство $C^p_{[a,b]}, 1 \le p \le \infty$ непрерывных функций на $[a, b]$ с L_p-нормой $\| f \|_p = (\int_a^b \mid f(t) \mid^p dt)^{\frac{1}{p}}$;

5) пространство C_K непрерывных функций на компакте K с нормой $\| f \| = \max_{t \in K} \mid f(t) \mid$;

6) пространство $(C_{[a,b]})^n$ функций на $[a, b]$ с непрерывными производными до порядка n включительно с нормой $\| f \|_n = \sum_{k=0}^n \max_{a \le t \le b} \mid f^{(k)}(t) \mid$;

7) пространство $C^n[I^m]$ всех функций, определенных в m-мерном кубе и непрерывно дифференцируемых до порядка n включительно с нормой равномерной ограниченности во всех производных порядка не больше, чем n;

8) пространство $M_{[a,b]}$ ограниченных измеримых функций на $[a, b]$ с нормой

$$\| f \| = \operatorname{ess} \sup_{a \le t \le b} \mid f(t) \mid = \inf_{e, \mu(e)=0} \sup_{t \in [a,b] \setminus e} \mid f(t) \mid;$$

9) пространство A (Δ) функций, которые являются аналитическими в открытом *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C}: \mid z \mid < 1\}$ и непрерывными в закрытом диске $\overline{\Delta}$ с нормой $\| f \| = \max_{z \in \overline{\Delta}} \mid f(z) \mid$;

10) **лебеговы пространства** $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$;

11) *пространства Соболева* $W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le p \le \infty$ функций f на Ω, таких что f и ее производные вплоть до некоторого порядка k имеют конечную L_p*-норму,* с нормой $\| f \|_{k,p} = \sum_{i=0}^k \| f^{(i)} \|_0$;

12) *пространство Бора AP* почти периодических функций с нормой

$$\| f \| = \sup_{-\infty < t < +\infty} \mid f(t) \mid.$$

Конечномерное вещественное банахово пространство называется *пространством Минковского.* Метрика нормы пространства Минковского называется **метрикой Минковского** (см. гл. 6). В частности, любая l_p**-метрика** есть метрика Минковского.

Все n-мерные банаховы пространства являются попарно изоморфными: их множество становится компактным, если вводится расстояние **Банаха–Мазура** $d_{\text{BM}}(V, W) = \ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|$, где инфимум берется по всем операторам, которые реализуют изоморфизм $T : V \to W$.

l_p-метрика

l_p-метрика d_{l_p}, $1 \le p \le \infty$ есть метрика нормы на $\mathbb{R}^n$ (или на $\mathbb{C}^n$), определенная как

$$\| x - y \|_p,$$

где l_p-норма $\| \cdot \|_p$ задается как

$$\| x \|_p = (\sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p = \infty$ мы получаем $\| x \|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p} = \max_{1\le i\le n} | x_i |$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_{l_p})$ сокращенно обозначается как l_p^n и называется l_p^n-*пространством.*

***l_p*-метрика**, $1 \le p \le \infty$ на множестве всех последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ действительных (комплексных) чисел, для которых сумма $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^p$ (для $p = \infty$ сумма имеет вид $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |$) является конечной, определяется как

$$(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p = \infty$ получаем $\max i\ge 1 | x_i - y_i |$. Это метрическое пространство сокращенно обозначается как l_p^∞ и называется l_p^∞-*пространством*.

Наиболее важными являются l_1 –, l_2- и l_∞-метрики; l_2-метрика на $\mathbb{R}^n$ называется также **евклидовой метрикой.** l_2-метрика на множестве последовательностей $\{x_n\}_n$ действительных (комплексных) чисел, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2 < \infty$, известна также как **гильбертова метрика.** На $\mathbb{R}$ все l_p-метрики совпадают с **натуральной метрикой** $| x - y |$.

Евклидова метрика

Евклидова метрика (или **пифагорово расстояние, расстояние "как летает ворона"**) d_E – метрика на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\| x = y \|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Это обычная l_2-метрика на $\mathbb{R}^n$. Метрическое пространство ($\mathbb{R}^n$, d_E), сокращенно $\mathbb{R}^n$, называется **евклидовым пространством** (или *вещественным евклидовым пространством*). Иногда выражением "евклидово пространство" обозначается трехмерный случай $n = 3$, в противовес *евклидовой плоскости* для $n = 2$. *Евклидова прямая* (или *действительная евклидова прямая*) получается при $n = 1$, т.е. является метрическим пространством ($\mathbb{R}$, $| x - y |$) с **натуральной метрикой** (см. гл. 12).

В действительности $\mathbb{E}^n$ является пространством со **скалярным произведением** (и даже **гильбертовым пространством**), т.е. $d_E(x, y) = \| x - y \| = \| x - y \|_2 = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$, где $\langle x, y \rangle$ есть *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$, которое представлено в соответствующим образом выбранной системе (декартовы) координат формулой $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_i$. В стандартной системе координат имеем $\langle x, y \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_i$, где $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ и **метрический тензор** $((g_{ij}))$ является положительно определенной симметричной $n \times n$ матрицей.

В общем случае евклидово пространство определяется как пространство, свойства которого описываются аксиомами *евклидовой геометрии.*

Унитарная метрика

Унитарная метрика (или *комплексная евклидова метрика*) есть l_2-**метрика** на $\mathbb{C}^n$, определенная как

$$\| x - y \|_2 = \sqrt{| x_1 - y_1 |^2 + \ldots + | x_n - y_n |^2}.$$

Метрическое пространство $(\mathbb{C}^n, \| x - y \|_2)$ называется *унитарным пространством* (или *комплексным евклидовым пространством*). Для $n = 1$ получим *комплексную плоскость* (или *плоскость Арганда*), т.е. метрическое пространство $(\mathbb{C}, | z - u |)$ с **метрикой комплексного модуля** $| z - u |$; $| z | = | z_1 + iz_2 | = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ здесь является комплексным модулем (см. также **кватернионная метрика,** гл. 12).

L_p-метрика

L_p-метрика d_{L_p}, $1 \le p \le \infty$ есть метрика нормы на $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, заданная как

$$\| f - g \|_p$$

для любых $f, g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Метрическое пространство $(L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), d_{L_p})$ называется ***L_p*-пространством** (или **лебеговым пространством**).

Здесь Ω – некоторое множество и $\mathcal{A}$ является σ-*алгеброй* подмножеств множества Ω, т.е. семейством подмножеств множества Ω, удовлетворяющих следующим свойствам:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}$;

3) если $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ с $A_i \in \mathcal{A}$, то $A \in \mathcal{A}$.

Функция $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ называется *мерой* на $\mathcal{A}$, если она *аддитивна*, т.е. $\mu(\cup_{i \ge 1} A_i) = \sum_{i \ge 1} \mu(A_i)$ для всех попарно непересекающихся множеств $A_i \in \mathcal{A}$, и удовлетворяет условию $\mu(\emptyset) = 0$. *Пространство с мерой* обозначается тройкой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Для данной функции $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ее L_p-*норма* определяется как

$$\| f \|_p = \left(\int_{\Omega} f(\omega)^p \mu(d\omega) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = L_p(\Omega)$ обозначает множество всех функций $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, которые удовлетворяют условию $\| f \|_p < \infty$. Строго говоря, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ состоит из классов эквивалентности функций, где две функции *эквивалентны*, если они *почти всюду* одинаковы, т.е множество, на котором они различаются, обладает нулевой мерой. Множество $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть множество классов эквивалентности измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, абсолютные величины которых почти всюду ограничены.

Наиболее известным примером L_p-метрики является d_{L_p} на множестве $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, где Ω – открытый интервал (0,1), $\mathcal{A}$ – *борелева* σ-*алгебра* на (0,1) и μ – *лебегова мера*. Это метрическое пространство сокращенно обозначается как $L_p(0,1)$ и называется $L_p(0,1)$-*пространством*.

Аналогичным образом можно задать L_p-метрику на множестве $C_{[a,b]}$ всех действительных (комплексных) непрерывных функций на $[a, b]$:

$$d_{L_p}(f, g) = \left(\int_a^b | f(x) - g(x) |^p dx \right)^{1/p}.$$

Для $p = \infty$ $d_{L_\infty}(f, g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$. Это метрическое пространство сокращенно обозначается как $C^p_{[a,b]}$ и называется $C^p_{[a,b]}$-пространством.

Если $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ является семейством всех подмножеств Ω и μ – *кардинальным числом* (т.е. $\mu(A) = |A|$, если A – конечное подмножество Ω и $\mu(A) = \infty$ – иначе), то метрическое пространство $\left(L_p(\Omega, 2^\Omega, |\cdot|), d_{L_p}\right)$ и l^∞_p-пространство совпадают.

Если $\Omega = V_n$ есть множество, состоящее из n элементов, $\mathcal{A} = 2^{V_n}$, и μ является кардинальным числом, то метрическое пространство $\left(L_p(V_n, 2^{V_n}, |\cdot|), d_{L_p}\right)$ и l^n_p-пространство совпадают.

Двойственные метрики

***l_p*-метрика и *l_q*-метрика,** $1 < p, q < \infty$ называются **двойственными**, если $1/p + 1/q = 1$.

В общем случае, когда речь идет о *нормированном векторном пространстве* $(V, \|\cdot\|_V)$, интерес представляют *непрерывные* линейные функционалы из V в основное поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Эти функционалы образуют **банахово пространство** $(V', \|\cdot\|_{V'})$, называемое *непрерывным двойственным* для пространства V. Норма $\|\cdot\|_{V'}$ на V' задается как $\|T\|_{V'} = \sup_{\|x\| \le 1} |T(x)|$.

Непрерывным двойственным для метрического пространства l^n_p $\left(l^\infty_p\right)$ является l^n_q (соответственно l^∞_p). Непрерывным двойственным для пространства l^n_1 $\left(l^\infty_1\right)$ является l^n_∞ (соответственно l^∞_∞). Непрерывные двойственные для банаховых пространств C (состоящего из всех сходящихся последовательностей с ***l_∞*-метрикой**) и C_0 (состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей с ***l_∞*-метрикой**) могут быть естественным образом идентифицированы с l^∞_1.

Пространство со скалярным произведением

Пространством со скалярным произведением (или *предгильбертоым пространством*) называется метрическое пространство $(V, \|x - y\|)$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V со *скалярным произведением* $\langle x, y\rangle$ такое что метрика нормы $\|x - y\|$ строится с использованием *нормы скалярного произведения* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Скалярное произведение $\langle\,,\rangle$ на действительном (комплексном) векторном пространстве V является *симметричной билинейной* (в комплексном случае *полуторалинейной*) формой на V, т.е. функцией $\langle\,,\rangle: V \times V \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, такой что для всех $x, y, z \in V$ и всех скалярных величин α, β имеют место следующие свойства:

1) $\langle x, x\rangle \ge 0$ с $\langle x, x\rangle$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, где $\overline{\alpha} = \overline{a + bi} = a - bi$ означает *комплексное сопряжение*;

3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

Для комплексного векторного пространства скалярное произведение называется также *эрмитовым скалярным произведением*, а соответствующее метрическое пространство – *пространством с эрмитовым скалярным произведением*.

Норма $\|\cdot\|$ в *нормированном пространстве* $(V, \|\cdot\|)$ порождается скалярным произведением тогда и только тогда, когда для всех $x, y \in V$ имеет место равенство

$$\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Гильбертово пространство

Гильбертово пространство есть пространство со скалярным произведением, которое, как метрическое пространство, является **полным**. Точнее говоря, гильбертово пространство есть полное метрическое пространство $(H, \| x-y \|)$ на действительном (комплексном) векторном пространстве H со *скалярным произведением* $\langle , \rangle$, таким что метрика нормы $\| x-y \|$ строится по *норме скалярного произведения* $\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Любое гильбертово пространство есть **банахово пространство**.

Примером гильбертова пространства служит множество всех последовательностей $x = \{x_n\}_n$ действительных (комплексных) чисел, таких что $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |^2$ сходится по гильбертовой метрике, задаваемой как

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |^2 \right)^{1/2}.$$

В качестве других примеров гильбертовых пространств можно привести любое **L_2-пространство** и любое конечномерное пространство со скалярным произведением. В частности, любое евклидово пространство является гильбертовым.

Прямое произведение двух **гильбертовых пространств** называют *пространством Лиувилля* (или *расширенным гильбертовым пространством*).

Метрика нормы Рисса

Пространство Рисса (или *векторная решетка*) есть частично упорядоченное векторное пространство $(V_{Ri}, \preceq)$, в котором выполняются следующие условия:

1. Структура векторного пространства и частично упорядоченная структура совместимы, т.е. из $x \preceq y$ следует, что $x + z \preceq y + z$, а из $x \succ 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ следует, что $ax \succ 0$.

2. Для двух любых элементов $x, y \in V_{Ri}$ существует объединение $x \wedge y \in V_{Ri}$ и пересечение (см. гл. 10).

Метрика нормы Рисса есть метрика нормы на V_{Ri}, задаваемая как

$$\| x-y \|_{Ri},$$

где $\|\cdot\|_{Ri}$ есть *норма Рисса* на V_{Ri}, т.е. такая норма, что для всех $x, y \in V_{Ri}$ неравенство $|x| \preceq |y|$, где $|x| = (-x) \vee (x)$, порождает неравенство $\| x \|_{Ri} \leq \| y \|_{Ri}$.

Пространство $(V_{Ri}, \|\cdot\|_{Ri})$ называется *нормированным пространством Рисса*. В случае полноты оно называется *банаховой решеткой*.

Компакт Банаха–Мазура

Расстояние Банаха–Мазура d_{BM} между двумя n-мерными *нормированными пространствами* $(V, \|\cdot\|_V)$ и $(W, \|\cdot\|_W)$ определяется как

$$\ln \inf_T \| T \| \cdot \| T^{-1} \|,$$

где инфимум берется по всем изоморфизмам $T : V \to W$. Оно является метрикой на множестве X^n всех классов эквивалентности n-мерных нормированных пространств, где $V \sim W$ тогда и только тогда, когда они *изоморфны*. Тогда пара (X^n, d_{BM}) является компактным метрическим пространством, называемым **компактом Банаха–Мазура**.

Фактор-метрика

В случае *нормированного пространства* $(V, \|\cdot\|_V)$ с нормой $\|\cdot\|_V$ и замкнутым подпространством W пространства V пусть $(V/W, \|\cdot\|_{V/W})$ будет нормированным пространством смежных классов $x + W = \{x + w : w \in W\}$, $x \in V$ с *фактор-нормой* $\| x + W \|_{V/VW} = \inf_{w \in W} \| x + w \|_V$.

Фактор-метрикой называется метрика нормы на V/W, заданная как

$$\| (x + W) - (y + W) \|_{V/W}.$$

Метрика тензорной нормы

Для *нормированных пространств* $(V, \|\cdot\|_V)$ и $(W, \|\cdot\|_W)$ норма $\|\cdot\|_\otimes$ на *тензорном произведении* $V \otimes W$ называется тензорной *нормой* (или *кросс-нормой*), если $\| x \otimes y \|_\otimes = \| x \|_V \| y \|_W$ для всех *разложимых* тензоров $x \otimes y$.

Метрика тензорной нормы есть метрика нормы на $V \otimes W$, заданная как

$$\| z - t \|_\otimes.$$

Для любых $z \in V \otimes W$, $z = \sum_j x_j \otimes y_j$, $x_j \in V$, $y_j \in W$ ее *проективная норма* (или π-*норма*) определяется как $\| z \|_{\mathrm{pr}} = \inf \sum_j \| x_j \|_V \| y_j \|_W$, где инфимум берется по всем представлениям z в виде суммы разложимых векторов. Это самая большая тензорная норма на $V \otimes W$.

Метрика валюации

Метрика валюации – это метрика на поле $\mathbb{F}$, заданная как

$$\| x - y \|,$$

где $\|\cdot\|$ – *валюация* на $\mathbb{F}$, т.е. функция $\|\cdot\| : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, такая что для всех $x, y \in \mathbb{F}$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$ с $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
2) $\| xy \| = \| x \| \| y \|$;
3) $\| x + y \| \leq \| x \| \| y \|$ неравенство треугольника).

Если $\| x + y \| \leq \max\{\| x \| \| y \|\}$, то валюация $\|\cdot\|$ называется *неархимедовой*. В этом случае метрика валюации будет **ультраметрикой**. Простейшим примером валюации является *тривиальное нормирование* $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}} : \| 0 \|_{\mathrm{tr}} = 0$ и $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}} = 1$ для $x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, которое является неархимедовым.

В математике существуют разные определения понятия валюации. Так, например, функция $\nu : \mathbb{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется валюацией, если $\nu(x) \geq 0$, $\nu(0) = \infty$, $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ и $\nu(x + y) \geq \min\{\nu(x), \nu(y)\}$ для всех $x, y \in \mathbb{F}$. Валюацию $\|\cdot\|$ можно получить из функции ν по формуле $\| x \| = \alpha^{\nu(x)}$ для некоторого фикси-

рованного $0 < \alpha < 1$ (см. ***p*-адическая метрика**, гл. 12). *Валюация Куршака* $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}$ задается как функция $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}: \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, такая что $|x|_{\mathrm{Krs}} \geq 0$, $|x|_{\mathrm{Krs}} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $|x|_{\mathrm{Krs}} = |x|_{\mathrm{Krs}} |y|_{\mathrm{Krs}}$ и $|x+y|_{\mathrm{Krs}} \leq C \max\{|x|_{\mathrm{Krs}}, |y|_{\mathrm{Krs}}\}$ для всех $x, y \in \mathbb{F}$ и для некоторой положительной константы C, называемой *константой валюации*. Если $C \geq 2$, то получается обычное определение валюации $\|\cdot\|$, которое будет неархимедовым, если $C \leq 1$. В целом любая валюация $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}$ *эквивалентна* некоторой валюации $\|\cdot\|$, т.е. $|\cdot|_{\mathrm{Krs}}^{p}$ при некотором $p > 0$. И наконец, для *упорядоченной группы* $(G, \cdot, e, \leq)$, снабженной нулем, *валюация* Крулла определяется как функция $|\cdot|: \mathbb{F} \to G$, такая что $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $|xy| = |x||y|$ и $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$ для любых $x, y \in \mathbb{F}$. Это является обобщением определения неархимедовой валюации $\|\cdot\|$ (см. **Обобщенная метрика**, гл. 3).

Метрика степенного ряда

Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное алгебраическое поле и пусть $\mathbb{F}\langle x^{-1}\rangle$ – поле степенных рядов вида $w = \alpha_{-m} x^m + ... + \alpha_0 + \alpha_1 x + ..., \alpha_i \in \mathbb{F}$. При заданном $l > 1$ *неархимедова валюация* $\|\cdot\|$ на $\mathbb{F}\langle x^{-1}\rangle$ определяется как

$$\| w \| = \begin{cases} l^m, & \text{если } w \neq 0, \\ 0, & \text{если } w = 0. \end{cases}$$

Метрика степенного ряда есть **метрика валюации** $\| w - v \|$ на $\mathbb{F}\langle x^{-1}\rangle$.

Часть II

ГЕОМЕТРИЯ И РАССТОЯНИЯ

Глава 6

Расстояния в геометрии

Геометрия возникла как область знаний, связанная с различными соотношениями в пространстве. Это была одна из двух областей, предшествовавших современной математике, вторая занималась изучением чисел. В настоящее время геометрические концепции достигли весьма высокого уровня абстрактности и сложности обобщений.

6.1. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В математике понятие "геодезический" является обобщением понятия "прямая линия" по отношению к искривленному пространству. Данный термин заимствован из *геодезии*, науки, занимающейся измерением размера и формы Земли.

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. **Метрическая кривая** γ есть непрерывная функция $\gamma\colon I \to X$, где I – *интервал* (т.е. непустое связное подмножество) в $\mathbb{R}$. Если γ является r раз непрерывно дифференцируемой, то она называется *регулярной кривой* класса C^r; если $r = \infty$, то γ называется *гладкой кривой*.

Вообще говоря, кривая линия может пересекать саму себя. Кривая будет называться *простой кривой* (или *дугой, путем*), если она не пересекает саму себя, т.е. является инъективной. Кривая $\gamma\colon [a, b] \to X$ называется *жордановой кривой* (или *простой замкнутой кривой*), если она не пересекает себя и $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Длина (которая может быть равна ∞) $l(\gamma)$ кривой ($\gamma\colon [a, b] \to X$ определяется как $\sup \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i))$, где верхняя грань берется по всем конечным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$ отрезка $[a, b]$. Кривая конечной длины называется *спрямляемой*. Для любой регулярной кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ зададим *натуральный параметр* s кривой γ как $s = s(t) = l(\gamma|_{[a,t]})$, где $l(\gamma|_{[a,t]})$ есть длина части γ, соответствующей интервалу $[a, t]$. Кривая с такой *натуральной* параметризацией $\gamma = \gamma(s)$ называется кривой **единичной скорости** (или *параметризованной длиной дуги*, *нормированной*); при данной параметризации для любых $t_1, t_2 \in I$ получаем $l(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = |t_2 - t_1|$ и $l(\gamma) = |b - a|$.

Длина любой кривой $\gamma\colon [a, b] \to X$ равна по меньшей мере расстоянию между ее концевыми точками: $l(\gamma) \geq d(\gamma(a), \gamma(b))$. Кривая γ, для которой $l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$, называется **геодезическим отрезком** (или *кратчайшим путем*) от $x = \gamma(a)$ до $y = \gamma(b)$ и обозначается как $[x, y]$. Таким образом, геодезический отрезок есть кратчайший путь между его концевыми точками; он является изометрическим вложением $[a, b]$ в X. В целом геодезические отрезки могут и не существовать, кроме тривиального случая, когда отрезок состоит только из одной точки. Более того, геодезический отрезок, соединяющий две точки, не обязательно единствен.

Геодезической называется кривая, которая бесконечно распространяется в обе стороны и локально ведет себя как отрезок, т.е. локально всюду является минимизатором расстояния. Точнее говоря, кривая $\gamma\colon \mathbb{R} \to X$ в естественной параметризации называется *геодезической*, если для любого $t \in \mathbb{R}$ существует такая *окрестность* U, что для любых $t_1, t_2 \in U$ имеем $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$. Таким образом, любая геодезическая есть локально изометрическое вложение всего $\mathbb{R}$ в X. Геодезическую называют **метрической прямой**, если равенство $d(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) = |t_1 - t_2|$ выполняется для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Такая геодезическая является изометрическим вложением всей действительной прямой $\mathbb{R}$ в X. Геодезическая будет называться **метрическим большим кругом**, если она является изометрическим вложением круга $S^1(0, r)$ в X. В общем случае геодезические могут и не существовать.

Геодезическое метрическое пространство

Произвольное метрическое пространство (X, d) называется **геодезическим**, если любые две точки в X могут быть соединены **геодезическим отрезком**, т.е. для любых двух точек $x, y \in X$ существует изометрия отрезка $[0, d(x, y)]$ в X. Любое полное *риманово пространство* и любое банахово пространство являются геодезическим метрическим пространством.

Произвольное метрическое пространство (X, d) называется **локально геодезическим метрическим пространством**, если любые две достаточно близкие точки в X могут быть соединены геодезическим отрезком; оно будет называться ***D*-геодезическим**, если любые две точки на расстоянии $< D$ могут быть соединены геодезическим отрезком.

Геодезическое расстояние

Геодезическое расстояние (или **расстояние кратчайшего пути**) есть длина **геодезического отрезка** (т.е. *кратчайшего пути*) между двумя точками.

Интернальная метрика

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство, в котором всякие две точки соединены спрямляемой кривой. Тогда **интернальная метрика** (или *порожденная внутренняя метрика*) D на X задается как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих две данные точки $x, y \in X$.

Метрика d на X называется **внутренней метрикой** (или **метрикой длины**), если она совпадает со своей интернальной метрикой D. Метрическое пространство с внутренней метрикой называется **пространством длины** (или *метрическим пространством путей, внутренним метрическим пространством*).

Если, кроме того, любая пара точек x, y может быть соединена кривой длины $d(x, y)$, то внутренняя метрика d называется *строго внутренней*, а пространство длины (X, d) – **геодезическим** метрическим пространством.

Полное метрическое пространство (X, d) является пространством длины тогда и только тогда, когда для любых двух $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует третья точка $z \in X$ (ε-*срединная точка*), для которой $d(x, z), d(y, z) \le \frac{1}{2} d(x, y) + \varepsilon$.

Любое полное локально компактное пространство длины является **собственным** геодезическим метрическим пространством.

***G*-пространство**

***G*-пространством** (или **пространством геодезических**) называется метрическое пространство (X, d) с геометрией, характеризуемой тем, что расширения геодези-

ческих, определяемых как локально кратчайшие линии, являются единственными. Такая геометрия есть обобщение *гильбертовой геометрии* (см. [Buse55]).

Точнее говоря, G-пространство (X, d) определяется следующими условиями:

1. Пространство является **собственным** (или *конечно компактным*), т.е. все его метрические шары компактны.

2. Оно является **выпуклым по Менгеру**, т.е. для любых различных $x, y \in X$ существует такая третья точка $z \in X$, $z \neq x, y$, что $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$.

3. Оно является *локально расширяемым*, т.е. для любого $a \in X$ существует такое $r > 0$, что для любых различных точек x, y в шаре $B(a, r)$ имеется такая точка z, отличающаяся от x и y, что $d(x,y) + d(y,z) = d(x,z)$.

4. Оно является *расширяемым единственным образом*, т.е., если в п. 3 выше для двух точек z_1 и z_2 имеет место равенство $d(y,z_1) = d(y,z_2)$, то $z_1 = z_2$.

Существование геодезических отрезков обусловливается конечной компактностью и выпуклостью Менгера: любые две точки конечно компактного выпуклого по Менгеру множества X могут быть соединены геодезическим отрезком в X. Существование геодезических обусловлено аксиомой локальной продолжаемости: если конечно компактное выпуклое по Менгеру множество X является локально расширяемым, то существует геодезическая, содержащая данный геодезический отрезок. Наконец, единственность продолжения обеспечивает допущение дифференциальной геометрии, что *линейный элемент* определяет геодезическую единственным образом.

Все *римановы и финслеровы пространства* являются G-пространствами. Одномерное G-пространство есть метрическая прямая линия или метрический большой круг. Любое двумерное G-пространство является топологическим *многообразием*.

Всякое G-пространство есть *хордовое пространство*, т.е. метрическое пространство с множеством выделенных геодезических отрезков, таких что любые две точки соединяются единственным таким отрезком (см. [BuPh87]).

Дезаргово пространство

Дезаргово пространство – G-пространство (X, d), в котором роль геодезических выполняют обычные прямые. Это значит, что X может быть топологически отображено в проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ таким образом, что каждая геодезическая пространства X отображается в прямую линию пространства $\mathbb{R}P^n$. Любое X, отображенное в $\mathbb{R}P^n$, либо должно покрывать все $\mathbb{R}P^n$ (в таком случае все геодезические X являются метрическими большими кругами одной длины), либо может рассматриваться как открытое *выпуклое* подмножество аффинного пространства A^n.

Пространство (X, d) геодезических является дезарговым пространством тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1. Геодезическая, проходящая через две различные точки, является единственной.

2. Для размерности $n = 2$ обе *теоремы Дезарга* (прямая и обратная) справедливы, а для размерности $n > 2$ любые три точки из X лежат в одной плоскости.

Среди *римановых пространств* единственными дезарговыми пространствами являются евклидовы, *гиперболические* и *эллиптические пространства*. Примером нериманова дезаргова пространства служит пространство Минковского, которое может считаться прототипом всех нериманових пространств, включая *финслеровы пространства*.

***G*-пространство эллиптического типа**

***G*-пространством эллиптического типа** называется ***G*-пространство**, в котором через две точки проходит единственная геодезическая, и все геодезические – метрические большие круги одинаковой длины.

Каждое ***G*-пространство**, в котором имеется единственная геодезическая, проходящая через каждые две данные точки, является или *G*-пространством эллиптического типа, или **прямым *G*-пространством**.

Прямое *G*-пространство

Прямым *G*-пространством называется ***G*-пространство**, в котором возможно глобальное продолжение геодезической так, чтобы любой ее отрезок оставался кратчайшим путем. Другими словами, для двух любых $x, y \in X$ существует единственный геодезический отрезок, соединяющий x и y, и единственная метрическая прямая, которой x и y принадлежат.

Всякая геодезическая в прямом *G*-пространстве есть метрическая прямая, определенная единственным образом любыми двумя ее точками. Любое двумерное прямое *G*-пространство гомеоморфно плоскости.

Все односвязные *римановы пространства* неположительной кривизны (включая евклидово и *гиперболические пространства*), гильбертовы геометрии и пространства Тейхмюллера компактных римановых поверхностей типа рода $g > 1$ (в случае их метризации **метрикой Тейхмюллера**) являются прямыми *G*-пространствами.

Метрическое пространство гиперболическое по Громову

Метрическое пространство (X, d) называется **гиперболическим по Громову**, если оно является **геодезическим** и **δ-гиперболическим** для некоторого $\delta \geq 0$.

Любое полное односвязное риманово пространство *секционной кривизны* $k \leq -a^2$ есть метрическое пространство гиперболическое по Громову с $\delta = \dfrac{\ln 3}{a}$. Важным классом метрического пространства гиперболического по Громову являются *гиперболические группы*, т.е. группы с конечным числом образующих, **словарная метрика** которых является δ-гиперболической для некоторого $\delta \geq 0$. Метрическое пространство будет **действительным деревом** в точности тогда, когда оно – метрическое пространство гиперболическое по Громову, с $\delta = 0$.

Геодезическое метрическое пространство (X, d) будет δ-гиперболическим тогда и только тогда, когда оно 4δ-*гиперболическое по Puncy*, т.е. каждый из его геодезических треугольников (соединение трех геодезических отрезков $[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z]$) является 4δ-*тонким* (или 4δ-*слабым*) *худым*: каждая из сторон треугольника находится в 4δ-*окрестности* двух других сторон (4δ-*окрестность* подмножества $A \subset X$ есть множество $\{b \in X : \inf_{a \in A} d(b, a) < 4\delta\}$).

Каждое **CAT(*k*)** пространство с $k < 0$ является гиперболическим по Громову. Каждое евклидово пространство $\mathbb{E}^n$ является CAT(0) пространством и будет гиперболическим по Громова только для $n = 1$.

CAT(*k*) пространство

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство. Пусть M^2 – односвязное двумерное *риманово многообразие постоянной кривизны* k, т.е. 2-сфера S_k^2 с $k > 0$, евклидова плоскость $\mathbb{E}^2$ с $k = 0$ или гиперболической плоскость H_k^2 с $k < 0$. Пусть D_k обозначает диаметр M^2, т.е. $D_k = \dfrac{\pi}{\sqrt{k}}$, если $k > 0$, и $D_k = \infty$, если $k \leq 0$.

Треугольник T в X состоит из трех точек в X, соединенных попарно тремя *геодезическими отрезками*; отрезки при этом называются *сторонами треугольника*. Для треугольника $T \subset X$ *сопоставимым с* T *треугольником* в M^2 будет треугольник $T' \subset M^2$ вместе с отображением f_T, которое изометрически отображает каждую сторону треугольника T на сторону T'. Треугольник T удовлетворяет **CAT(*k*)** неравенству Громова (**CAT** – первые буквы фамилий Картан (**C**artan), **A**лександров, **T**опоногов), если для каждых $x, y \in T$ имеет место неравенство

$$d(x,y) \le d_{M^2}(f_T(x), f_T(y)),$$

где f_T – отображение, соответствующее сопоставимому с T треугольнику в M^2. Таким образом, геодезический треугольник T является столь же "тонким", как и сопоставимый треугольник в M^2.

Метрическое пространство (X, d) есть **CAT(*k*) пространство**, если оно – $\boldsymbol{D_k}$**-геодезическое** (т.е. любые две точки на расстоянии $< D_k$ могут быть соединены геодезическим отрезком) и все треугольники T с суммой сторон $< 2D_k$ удовлетворяют CAT(k) неравенству.

Любое CAT(k_1) пространство есть CAT(k_2) пространство, если $k_1 < k_2$. Любое **действительное дерево** является $CAT(-\infty)$ *пространством*, т.е. является CAT(k) пространством для всех $k \in \mathbb{R}$.

Пространство Александрова с кривизной, ограниченной сверху k (или **локальное CAT(*k*) пространством**), есть метрическое пространство (X, d), в котором каждая точка $p \in X$ имеет *окрестность* U, такую что любые две точки $x, y \in U$ соединяются геодезическим отрезком и CAT(k) неравенство выполняется для всех $x, y, z \in U$. Риманово многообразие есть локальное CAT(k) пространство тогда и только тогда, когда его *секционная кривизна* не превосходит k.

Пространство Александрова с кривизной, ограниченной снизу k – метрическое пространство (X, d), в котором каждая точка $p \in X$ имеет *окрестность* U, такую что любые две точки $x, y \in U$ соединяются геодезическим отрезком, и *обратное* $CAT(k)$ *неравенство*

$$d(x,y) \ge d_{M^2}(f_T(x), f_T(y)),$$

где f_T есть отображение, соответствующее сопоставимому для T треугольнику в M^2, выполняется для всех $x, y, z \in U$.

Два приведенных выше определения различаются только знаком ($\le$ или $\ge$) выражения $d(x,y) \ge d_{M^2}(f_T(x), f_T(y))$. Если $k = 0$, указанные выше пространства называются **неположительно искривленными и неотрицательно искривленными** метрическими пространствами соответственно; они также различаются знаками ($\le$ или $\ge$, соответственно) в выражении

$$2d^2(z, m(x,y)) - (d^2(z,x) + d^2(z,y) + \frac{1}{2}d^2(x,y)),$$

где вновь x, y, z являются тремя любыми точками в окрестности U для каждого $p \in X$ и $m(x, y)$ есть срединная точка **метрического интервала** $I(x, y)$.

В CAT(0) пространстве любые две точки соединены единственным геодезическим отрезком и расстояние есть выпуклая функция. Любое CAT(0) пространство является **выпуклым по Буземану** и **птолемеевым** (см. гл. 1), а обратное неверно. То же самое справедливо на уровне локальных свойств, но в римановом пространстве все три локальных условия эквивалентны неположительности секционной кривизны. Евклидовы пространства, гиперболические пространства,

евклидовы построения и деревья являются CAT(0) пространствами. Полные CAT(0) пространства называются также *адамаровыми пространствами*.

Граница метрического пространства

Существуют разные понятия **границы** ∂X **метрического пространства** $(X,\ d)$. Ниже приводятся лишь некоторые наиболее общего характера. Обычно, если $(X,\ d)$ является локально компактным, то $X \cup \partial X$ – его *компактное расширение*.

1. **Идеальная граница.** Пусть $(X,\ d)$ – геодезическое метрическое пространство, а γ^1 и γ^2 – два **метрических луча**, т.е. геодезические с изометрией $\mathbb{R}_{\geq 0}$ в X. Эти лучи будут называться *эквивалентными*, если **хаусдорфово расстояние** между ними (соответствующее метрике d) конечно, т.е. если $\sup\limits_{t\geq 0} d(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) < \infty$. **Граница в бесконечности** (или **идеальная граница**) пространства $(X,\ d)$ есть множество $\partial_\infty X$ эквивалентных классов γ_∞ всех метрических лучей.

Если $(X,\ d)$ – полное CAT(0) пространство, то **метрика Титса** (или *асимптотический угол расхождения*) на $\partial_\infty X$ задается как

$$2\arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

для всех $\gamma^1_\infty, \gamma^2_\infty \in \partial_\infty X$, где $\rho = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{t} d(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$. Множество $\partial_\infty X$, снабженное метрикой Титса, называется **границей Титса** пространства X.

Если (X, d, x_0) – пунктированное полное CAT(-1) пространство, тогда **метрика Бурдона** (с базовой точкой x_0) на $\partial_\infty X$ определяется как

$$e^{-(x.y)}$$

для любых $x, y \in \partial_\infty X$, где $(x.y)$ обозначает **произведение Громова** $(x.y)_{x_0}$. **Сфера видимости** $(X,\ d)$ **в точке** $x_0 \in X$ есть множество классов эквивалентности метрических лучей, исходящих из x_0.

2. **Граница Громова.** Если задано пунктированное метрическое пространство $(X,\ d,\ x_0)$, то его **граница Громова** (обобщение Бакли и Коккендорфа в 2005 г. случая пространства, гиперболического по Громову) есть множество $\partial_G X$ классов эквивалентности *последовательностей Громова.* Последовательность $x = (x_i)$ в X называется *последовательностью Громова*, если произведение Громова $(x_i . x_j)_{x_0} \to \infty$ при $i, j \to \infty$. Две последовательности Громова x и y называются *эквивалентными*, если существует конечная цепь последовательностей Громова $x^k, 0 \leq k \leq k'$, так что $x = x^0$, $y = x^{k'}$ и $\lim\limits_{i,j\to\infty} \inf\left(x_i^{k-1} . x_j^k\right) = \infty$ для $0 \leq k \leq k'$.

В **собственном** геодезическом пространстве гиперболическом по Громову, $(X,\ d)$ сфера видимости не зависит от базовой точки x_0 и является естественно изоморфной своей *границе Громова* $\partial_G X$, которая может быть отождествлена с $\partial_G X$.

3. ***g*-Граница.** Обозначим через $\overline{X}_d$ метрическое пополнение $(X,\ d)$ и, рассматривая X как подмножество $\overline{X}_d$, обозначим разность $\overline{X}_d \setminus X$ как ∂X_d. Пусть (X, l, x_0) – пунктированное бесконечное **пространство длины**, т.е. его метрика совпадает с **внутренней метрикой** l пространства $(X,\ d)$. В случае измеримой

функции $g:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, ***g*-граница** (X,d,x_0) (обобщение Бакли и Коккендорфа в 2005 г. *сферической границы* и *границы Флойда*) есть $\partial_g X=\partial X_\sigma\setminus\partial X_l$, где $\sigma(x,y)=\inf\int_\gamma g(z)dl(z)$ для всех $x,\ y\in X$ (здесь инфимум берется по всем метрическим отрезкам $\gamma=[x,y]$).

4. **Граница Хочкиса.** В случае пунктированного собственно **выпуклого** Буземану метрического пространства (X,d,x_0) его **границей Хочкиса** называется множество $\partial_{\mathrm{H}}(X,x_0)$ изометрий $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to X$ с $f(0)=x_0$. Границы $\partial_{\mathrm{H}}^{x_0}X$ и $\partial_{\mathrm{H}}^{x_1}X$ являются гомеоморфными для различных $x_0,x_1\in X$. В пространстве, гиперболическом по Громову, $\partial_{\mathrm{H}}^{x_0}X$ гомеоморфно границе Громова $\partial_{\mathrm{G}}X$.

5. **Метрическая граница.** Для пунктированного метрического пространства (X,d,x_0) и неограниченного подмножества S множества $\mathbb{R}_{\geq 0}$ луч $\gamma\colon S\to X$ называется *слабо геодезическим лучом*, если для каждого $x\in X$ и каждого $\varepsilon>0$ существует целое число N, такое что неравенства $|d(\gamma(t),\gamma(0))-t|<\varepsilon$ и $|d(\gamma(t),x)-d(\gamma(s),x)-(t-s)|<\varepsilon$ выполняются для всех $s,\ t\in T$ с $s,\ t\geq N$. Пусть $\mathcal{G}(X,\ d)$ – *коммутативная унитарная* C^*-алгеброй с нормой $\|\cdot\|_\infty$, порождаемой (ограниченными, непрерывными) функциями, которые обращаются в нуль на X, постоянными функциями и функциями вида $g_y(x)=d(x,x_0)-d(x,y)$ (см. определения в разделе **Квантовое метрическое пространство**). **Метрическая граница** Рифеля $\partial_{\mathrm{R}}X$ пространства $(X,\ d)$ есть разность $\overline{X}^d\setminus X$, где X^d является *метрическим компактным расширением* $(X,\ d)$, т.е. максимальным идеальным пространством (множеством *чистых состояний*) данной C^*-алгебры. Рифель доказал, что для собственного метрического пространства $(X,\ d)$ со счетной базой граница $\partial_{\mathrm{R}}X$ включает пределы $\lim_{t\to\infty}f(\gamma(t))$ для каждого слабого геодезического луча γ и каждой функции f вышеуказанной C^*-алгебры.

Проективно плоское метрическое пространство

Метрическое пространство, в котором геодезические заданы, называется **проективно плоским**, если оно локально допускает *геодезическое* (или *проективное*) *отображение*, т.е. отображение, сохраняющее геодезические, в некоторое евклидово пространство (см. евклидов **ранг метрического пространства** в гл. 1; сходные термины: *аффинно плоское, конформно плоское* и т.п.).

Риманово пространство будет проективно плоским тогда и только тогда, когда оно имеет постоянную (секционную) кривизну.

6.2. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Проективная геометрия является частью общей геометрии, рассматривающей свойства и инварианты геометрических фигур под воздействием *оператора проектирования*. Аффинная геометрия, геометрия подобия (или метрическая геометрия) и евклидова геометрия являются частями проективной геометрии с нарастающей сложностью. Основными инвариантами проективной, аффинной, метрической и евклидовой геометрий являются соответственно ангармоническое отношение, параллельность (и относительные расстояния), углы (и относительные расстояния), абсолютные расстояния.

n-Мерное проективное пространство $\mathbb{F}P^n$ есть пространство одномерных векторных подпространств данного $(n+1)$-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{F}$. Базовое построение предполагает формирование множества классов эквивалентности ненулевых векторов в пространстве V при соблюдении отношения скалярной пропорциональности. Данная идея возвращает нас к математическому описанию *перспективы*. Использование базиса пространства V позволяет ввести *однородные координаты* точки в $\mathbb{K}P^n$, которые обычно записываются как $(x_1 : x_2 : \ldots : x_n : x_{n+1})$ – вектор длины $n+1$, отличный от $(0:0:0:\ldots:0)$. Два множества с пропорциональными координатами обозначают одну и ту же точку проективного пространства. Любая точка проективного пространства, которую можно представить как $(x_1 : x_2 : \ldots : x_n : 0)$, называется *бесконечно удаленной точкой*. Часть проективного пространства $\mathbb{K}P^n$, не являющаяся "бесконечно удаленной", т.е. множество точек проективного пространства, которые могут быть представлены как $(x_1 : x_2 : \ldots : x_n : 1)$, есть n-мерное *аффинное пространство* A^n.

Символом $\mathbb{R}P^n$ обозначается *действительное проективное пространство* размерности n, т.е. пространство одномерных векторных подпространств пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Символом $\mathbb{C}P^n$ обозначается *комплексное проективное пространство* комплексной размерности n. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ имеет естественную структуру компактного гладкого n-мерного *многообразия*. Его можно рассматривать как пространство прямых, проходящих через нулевой элемент пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ (т.е. как *пространство лучей*). Оно может рассматриваться как множество $\mathbb{R}^n$ (как *аффинное пространство*) совместно с его бесконечно удаленными точками. Его можно рассматривать также как множество точек n-мерной сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$, отождествленных с диаметрально противоположными точками.

Проективные точки, проективные прямые, проективные плоскости,…, проективные гиперплоскости пространства $\mathbb{K}P^n$ являются соответственно одномерными, двумерными, трехмерными,…, n-мерными подпространствами пространства V. Любые две проективные прямые на проективной плоскости имеют одну и только одну общую точку. *Проективное преобразование* (или *коллинеация, проективное соответствие*) есть биективное отображение проективного пространства на себя, сохраняющее коллинеарность (свойство точек располагаться на одной линии) в обоих направлениях. Любое проективное преобразование есть композиция двух *перспективных проекций*. Проективные преобразования не обеспечивают сохранение размеров или углов, однако сохраняют *тип* (т.е. точки остаются точками и прямые – прямыми), *инцидентность* (т.е. принадлежность точки прямой) и *ангармоническое отношение*. Здесь для четырех коллинеарных точек $x, y, x, t \in \mathbb{F}P^n$ их *ангармоническое отношение* задается как $(x, y, z, t) = \dfrac{(x-z)(y-t)}{(y-z)(x-t)}$, где $\dfrac{x-z}{x-t}$ обозначает частное $\dfrac{f(x)-f(z)}{f(x)-f(t)}$ для некоторой аффинной биекции f прямой $l_{x,y}$, проходящей через точки x и y, в $\mathbb{K}$. Если имеется четыре проективные прямые l_x, l_y, l_z, l_t, проходящие через точки x, y, z, t соответственно, которые проходят через данную точку, их ангармоническое отношение, заданное выражением $(l_x, l_y, l_z, l_t) = \dfrac{\sin(l_x, l_z)\sin(l_y, l_t)}{\sin(l_y, l_z)\sin(l_x, l_t)}$, совпадает с (x, y, z, t). Ангармоническое отношение

четырех комплексных чисел x, y, z, t задается как $(x, y, z, t) = \dfrac{(x-z)(y-t)}{(y-z)(x-t)}$. Оно будет действительным тогда и только тогда, когда четыре числа являются или коллинеарными или коцикличными.

Проективная метрика

Для данного выпуклого подмножества D проективного пространства $\mathbb{S}P^n$ **проективная метрика** d есть метрика на D, такая что кратчайшие пути по отношению к этой метрике являются частями проективных прямых или самими проективными прямыми. Предполагается, что выполняются следующие условия:

1. D не является подмножеством никакой гиперплоскости.

2. Для любых трех неколлинеарных точек $x, y, z \in D$ неравенство треугольника выполняется в строгом смысле: $d(x, y) < d(x, z) + d(z, y)$.

3. Если x и y – разные точки в D, то пересечение прямой $l_{x,y}$, проходящей через x и y, с D есть либо вся прямая $l_{x,y}$, образующая **метрический большой круг**, либо получено из посредством $l_{x,y}$ удаления некоторого отрезка (который может быть сведен к точке) и образует **метрическую прямую**.

Метрическое пространство (D, d) называется **проективным метрическим** пространством (см. **Проективно плоское пространство**). Проблема определения всех проективных метрик является *четвертой проблемой Гильберта*; она решена только для размерности $n = 2$. Именно, если имеется гладкая мера на пространстве гиперплоскостей в $\mathbb{R}P^n$, определим расстояние между любыми двумя точками $x, y \in \mathbb{R}P^n$ как половину меры всех гиперплоскостей, которые пересекают отрезок прямой, соединяющий x и y. Полученная метрика будет проективной – это *конструкция Буземана* проективных метрик. Для $n = 2$, как доказано Амбарцумяном ([Amba76]), все проективные метрики могут быть получены из конструкции Буземана.

В проективном метрическом пространстве одновременно не может быть двух видов прямых: они все либо метрические прямые, либо метрические большие круги одинаковой длины (*теорема Гамеля*). Пространства первого вида называются *открытыми*. Они совпадают с подпространствами аффинного пространства; геометрия открытых проективных метрических пространств есть *гильбертова геометрия*. *Гиперболическая геометрия* является гильбертовой геометрией, в которой существуют отражения от всех прямых. Именно, множество D имеет гиперболическую геометрию тогда и только тогда, когда оно является внутренностью эллипсоида. Геометрия открытых проективных пространств, множества которых совпадают со всем аффинным пространством, есть *геометрия Минковского*. *Евклидова геометрия* – это гильбертова геометрия и геометрия Минковского одновременно. Пространства второго вида называются *закрытыми*; они совпадают со всем $\mathbb{R}P^n$. *Эллиптическая геометрия* – геометрия проективного метрического пространства второго вида.

Проективная метрика полосы

Проективная метрика полосы ([BuKe53]) есть **проективная метрика** на полосе $\mathrm{St} = \left\{ x \in R^2 : -\dfrac{\pi}{J} < J_2 < \dfrac{\pi}{J} \right\}$, определенная как

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} + |\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} y_2|.$$

Следует обратить внимание на то, что St с обычной евклидовой метрикой $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ *проективным метрическим пространством* не является.

Проективная метрика полуплоскости

Проективная метрика полуплоскости ([BuKe53]) есть **проективная метрика** на $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, заданная выражением

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} + \left|\frac{1}{x_2}-\frac{1}{y_2}\right|.$$

Гильбертова проективная метрика

Для данного множества H **гильбертовой проективной метрикой** h будет **полная проективная метрика** на H. Это означает, что H содержит помимо двух произвольных различных точек x и y также точки z и t, для которых $h(x,z)+h(z,y)=h(x,y)$, $h(x,y)+h(y,t)=h(x,t)$, и является гомеоморфным выпуклому множеству в n-мерном аффинном пространстве A^n, при этом геодезические в H отображаются в прямые пространства A^n. Метрическое пространство (H, h) называется *гильбертовым проективным пространством*, а геометрия гильберта проективного пространства называются *гильбертовой геометрией*.

Формально, пусть D – непустое выпуклое открытое множество в A^n с границей ∂D, не содержащей двух собственных компланарных, но неколлинеарных отрезков (обычно граница D является строго выпуклой замкнутой кривой, а D – ее внутренностью). Пусть $x, y \in D$ находятся на прямой, пересекающей ∂D в точках z и t, при этом z расположена на стороне y и t – на стороне x. В этом случае гильбертова метрика h на D определяется как

$$\frac{r}{2}\ln(x,y,z,t),$$

где (x,y,z,t) – ангармоническое отношение x,y,z,t и r – фиксированная положительная константа.

Метрическое пространство (D, d) является G-прямым пространством. Если D – эллипсоид, то h – **гиперболическая метрика**, определяющая *гиперболическую геометрию* на D. На *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ метрика h будет совпадать с **метрикой Кэли–Клейна–Гильберта**. Если ∂D содержит компланарные, но неколлинеарные отрезки, то метрика на D может задаваться выражением $h(x,y)+d(x,y)$, где d является любой **метрикой Минковского** (обычно евклидовой метрикой).

Метрика Минковского

Метрика Минковского (или **расстояние Минковского–Гельдера**) есть **метрика нормы** конечномерного действительного **банахова пространства**.

Формально, пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное действительное векторное пространство, K – будет симметричное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$, т.е. открытая окрестность нуля, которая является ограниченной, выпуклой и *симметричной* ($x \in K$ тогда и только тогда, когда $-x \in K$). Тогда *функционал Минковского* $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, заданный формулой

$$\| x \|_K = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in \partial K\right\},$$

является *нормой* на $\mathbb{R}^n$ и метрика Минковского m определяется выражением

$$\| x - y \|_K .$$

Метрическое пространство ($\mathbb{R}^n$, m) называется *пространством Минковского*. Его можно рассматривать как n-мерное аффинное пространство A^n с метрикой m, в котором роль *единичного шара* выполняет данное центрально симметричное выпуклое тело. Геометрия пространства Минковского называется *геометрией Минковского*. Для строго выпуклого симметричного тела метрика Минковского является **проективной метрикой** и ($\mathbb{R}^n$, m) является ***G*-прямым пространством**. Геометрия Минковского является евклидовой тогда и только тогда, когда ее *единичная сфера* – эллипсоид.

Метрика Минковского m пропорциональна евклидовой метрике d_{E} на каждой прямой l, т.е. $m(x, y) = \phi(l) d_{\mathrm{E}}(x, y)$. Таким образом, метрику Минковского можно считать метрикой, определяемой во всем аффинном пространстве A^n и обладающей тем свойством, что аффинное *отношение* $\dfrac{ac}{ab}$ любых трех коллинеарных точек *a, b, c* (см. разд. 6.3) равно отношению их расстояний $\dfrac{m(a,c)}{m(a,b)}$.

Буземанова метрика

Буземанова метрика ([Buse55]) есть метрика на вещественном n-мерном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, заданная выражением

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \left| \frac{x_i}{\| x \|} - \frac{y_i}{\| y \|} \right| \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \left| \frac{x_i}{\| x \|} - \frac{y_i}{\| y \|} \right| \right\}$$

для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$, где $\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_1^2}$.

Флаговая метрика

Для данного n-мерного *проективного пространства* $\mathbb{F}P^n$ **флаговой метрикой** d называется метрика на $\mathbb{F}P^n$, заданная *флагом*, т.е. *абсолютом*, состоящим из системы m-плоскостей α_m, $m = 0, \ldots, n-1$, с α_{i-1} принадлежащей α_i для всех $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Метрическое пространство ($\mathbb{F}P^n$, d) сокращенно обозначается как F^n и называется *флаговым пространством*.

Если для пространства F^n выбрать аффинную систему координат $(x_i)_i$ так, чтобы векторы прямых, проходящих через $(n - m - 1)$-плоскость α_{n-m-1} задавались условием $x_1 = \ldots = x_m = 0$, то флаговая метрика $d(x, y)$ между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ задается по формулам

$$d(x,y) = |x_1 - y_1|, \text{ если } x_1 \neq y_1, \; d(x,y) = |x_2 - y_2|, \text{ если } x_1 = y_1,$$

$$x_2 \neq y_2, \ldots, d(x,y) = |x_k - y_k|, \text{ если } x_1 = y_1, \ldots, x_{k-1} = y_{k-1}, x_k \neq y_k, \ldots .$$

Проективное определение метрики

Проективное определение метрики есть введение в подмножествах проективного пространства метрики так, чтобы эти подпространства стали изоморфными *евклидовым, гиперболическим* или *эллиптическим пространствам*.

Для получения евклидова определения метрики в $\mathbb{R}P^n$ следует выделить в данном пространстве $(n-1)$-мерную гиперплоскость π, называемую *бесконечно удаленной гиперплоскостью,* и задать $\mathbb{E}^n$ как подмножество проективного пространства, полученное путем удаления из него данной гиперплоскости π. В терминах однородных координат π включает все точки $(x_1 : \ldots : x_n : 0)$, а $\mathbb{E}^n$ – все точки $(x_1 : \ldots : x_n : x_n)$ с $x_n \neq 0$. Следовательно, его можно представить как $\mathbb{E}^n = \{x \in \mathbb{R}P^n : \ x = (x_1 : \ldots : x_n : 1)\}$. Евклидова метрика d на $\mathbb{E}^n$ задается как

$$\sqrt{\langle x - y, \ x - y\rangle},$$

где для любых $x = (x_1 : \ldots : x_n : 1), \ y = (y_1 : \ldots : y_n : 1) \in \mathbb{E}^n$ имеем $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Для получения *гиперболического определения метрики* на $\mathbb{R}P^n$ рассматривается множество D внутренних точек действительной овальной гиперповерхности Ω второго порядка в $\mathbb{R}P^n$. **Гиперболическая метрика** d_{hyp} на D определяется выражением

$$\frac{r}{2}\left|\ln(x, y, z, t)\right|,$$

где z и t являются точками пересечения прямой $l_{x,\,y}$, проходящей через точки x и y, с поверхностью Ω, $(x,\ y,\ z,\ t)$ есть *ангармоническое отношение* точек $x,\ y,\ z,\ t$ и r – фиксированная положительная константа. Если для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ определено *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=1}^{i+1} x_i, y_i$, то гиперболическая метрика на множестве $D = \{x \in \mathbb{R}P^n : \langle x, x\rangle < 0\}$ может быть записана как

$$r \operatorname{arccosh} \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|}{\sqrt{\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа и arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Для того чтобы получить *эллиптическое определение метрики* в $\mathbb{R}P^n$, следует рассмотреть для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1}), \ y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. **Эллиптическая метрика** d_{ell} на $\mathbb{R}P^n$ задается теперь выражением

$$r \arccos \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|}{\sqrt{\langle x, x\rangle, \langle y, y\rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа, а arccosh – обратный косинус, определенный на отрезке $[0, \pi]$.

Во всех рассмотренных случаях некоторые гиперповерхности второго порядка остаются инвариантными относительно **движений**, т.е. проективных преобразований, сохраняющих данную метрику. Эти гиперповерхности называются *абсо-*

лютами. Для случая евклидового определения метрики абсолютом является воображаемая (n – 2)-мерная овальная поверхность второго порядка, а именно вырожденный абсолют $x_1^2 + ... + x_n^2 = 0,\ x_{n+1} = 0$. Для случая гиперболического определения метрики абсолют выражается как действительная (n – 1)-мерная овальная гиперповерхность второго порядка, в простейшем случае абсолют $-x_1^2 + x_n^2 + ... + x_{n+1}^2 = 0$. Для случая эллиптического определения метрики абсолютом является воображаемая (n – 1)-мерная овальная гиперповерхность второго порядка, а именно абсолют $x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 0$.

6.3. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ

n-Мерное *аффинное пространство* над полем $\mathbb{F}$ есть множество A^n (с элементами, называемыми *точками* аффинного пространства), которому соответствует n-мерное векторное пространство V над $\mathbb{F}$ (называемое *пространством, ассоциированным* с A^n), так что для любого $a \in A^n,\ A = a + V = \{a + v : v \in V\}$. Другими словами, если $a = (a_1, ..., a_n),\ b = (b_1, ..., b_n) \in A^n,$ то вектор $\vec{ab} = (b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$ принадлежит V. В аффинном пространстве можно складывать вектор с точкой, чтобы получить другую точку, и вычитать точки для получения векторов, однако нельзя складывать точки, поскольку отсутствует нулевой элемент. Если даны точки $a, b, c, d \in A^n$, так что $c \neq d$, а векторы $\vec{ab}$ и $\vec{cd}$ являются коллинеарными, то скаляр λ, задаваемый условием $\vec{ab} = \lambda \vec{cd}$, называется *аффинным отношением ab* и *cd* и обозначается как $\frac{ab}{cd}$.

Аффинное преобразование (или *аффинность*) есть биективное отображение A^n на себя с сохранением *коллинеарности* (т.е. все находящиеся на прямой точки продолжают оставаться на прямой и после преобразования) и *отношения расстояний* (например, срединная точка отрезка остается срединной и после преобразования). В этом смысле термин *аффинный* указывает на особый класс *проективных преобразований*, которые не перемещают объекты из аффинного пространства на бесконечно удаленную плоскость или наоборот. Любое аффинное преобразование есть совокупность *вращений*, *параллельных переносов*, *подобий* и *сдвигов*. Множество всех аффинных преобразований A^n образует группу $Aff(A^n)$, называемую *общей аффинной группой* пространства A^n. Каждый элемент $f \in Aff(A^n)$ может быть представлен формулой $f(a) = b,\ b_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} a_j + c_j$, где $((p_{ij}))$ – обратимая матрица.

Подгруппа $Aff(A^n)$, включающая аффинные преобразования с $\det((p_{ij})) = 1$, называется *равноаффинной группой* A^n. *Равноаффинное пространство* есть аффинное пространство с равноаффинной группой преобразований. Фундаментальные инварианты равноаффинного пространства – объемы параллелепипедов. В равноаффинной плоскости A^2 любые два вектора v_1, v_2 имеют инвариант $|v_1 \times v_2|$ (модуль их векторного произведения) – объем параллелограмма, построенного на v_1 и v_2. Если имеется гладкая кривая $\gamma = \gamma(t)$, ее *аффинный параметр* (или *равноаффинная длина дуги*) есть инвариантный параметр, задаваемый формулой

$s = \int_{t_0}^{t} |\gamma' \times \gamma''|^{1/3}\, dt$. Инвариант $k = \frac{d^2\gamma}{ds^2} \times \frac{d^3\gamma}{ds^3}$ называется *равноаффинной кривизной* кривой γ. Переходя к общей аффинной группе, рассмотрим еще два инварианта: *аффинную длину дуги* $\sigma = \int k^{1/2} ds$ и *аффинную кривизну* $k = \frac{1}{k^{3/2}} \frac{dk}{ds}$.

Для A^n, $n > 2$ *аффинный параметр* (или *равноаффинная длина дуги*) кривой $\gamma = \gamma(t)$ задается формулой $s = \int_{t_0}^{t} \left|\gamma', \gamma'', ..., \gamma^{(n)}\right|^{2/n(n+1)} dt$, где инвариант $(v_1, ..., v_n)$ является (ориентированным) объемом, порожденным векторами $v_1, ..., v_n$, равным определителю $n \times n$ матрицы, i-й столбец которой есть вектор v_i.

Аффинное расстояние

Для данной *аффинной плоскости* A^2 ее *линейный элемент* (a, l_a) состоит из точки $a \in A^2$ и прямой $l_a \subset A^2$, проходящей через точку a.

Аффинное расстояние есть расстояние на множестве всех линейных элементов множества A^2, заданное как

$$2f^{1/3},$$

где для данных линейных элементов (a, l_a) и (b, l_b) величина f есть площадь треугольника abc, если c есть точка пересечения прямых l_a и l_b. Аффинное расстояние между (a, l_a) и (b, l_b) может быть интерпретировано как аффинная длина дуги параболы ab, такой что l_a и l_b касаются параболы соответственно в точках a и b.

Аффинное псевдорасстояние

Пусть A^2 – *равноаффинная плоскость* и $\gamma = \gamma(s)$ – кривая в A^2, заданная как функция *аффинного параметра* s. **Аффинное псевдорасстояние** dp_{aff} на A^2 задается формулой

$$dp_{\text{aff}}(a, b) = \left| \vec{ab} \times \frac{d\gamma}{ds} \right|,$$

т.е. равно площади поверхности параллелограмма, построенного на векторах $\vec{ab}$ и $\frac{d\gamma}{ds}$, где b – произвольная точка из A^2, a – точка на γ и $\frac{d\gamma}{ds}$ – касательный вектор к кривой γ в точке a.

Аффинное псевдорасстояние для *равноаффинного пространства* A^3 может быть определено по этой же схеме как

$$\left| \left(\vec{ab}, \frac{d\gamma}{ds}, \frac{d^2\gamma}{ds^2} \right) \right|,$$

где $\gamma = \gamma(s)$ – кривая в A^3, определенная как функция *аффинного параметра* s, $b \in A^3$, a – точка кривой γ, а векторы $\frac{d\gamma}{ds}$ и $\frac{d^2\gamma}{ds^2}$ получены в точке a.

Для A^n, $n > 3$ имеем $dp_{\text{aff}}(a,b) = \left| \left(\vec{ab},\ \frac{d\gamma}{ds}, ..., \frac{d^{n-1}\gamma}{ds^{n-1}} \right) \right|$. При произвольной параметризации $\gamma = \gamma(t)$ получим $dp_{\text{aff}}(a,b) = \left| \left(\vec{ab},\ \gamma', ..., \gamma^{(n-1)} \right) \right| \left| (\gamma', ..., \gamma^{(n-1)}) \right|^{1-n/1+n}$.

Аффинная метрика

Аффинная метрика – метрика на *неразвертываемой поверхности* $r = r(u_1, u_2)$ в *равноаффинном пространстве* A^3, заданная ее метрическим тензором $((g_{ij}))$:

$$g_{ij} = \frac{a_{ij}}{\left| \det((a_{ij})) \right|^{1/4}},$$

где $a_{ij} = (\partial_1 r,\ \partial_2 r,\ \partial_{ij} r),\ i, j \in \{1, 2\}$.

6.4. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Термином **неевклидова геометрия** описываются как *гиперболическая геометрия* (или *геометрия Лобачевского, геометрия Лобачевского–Больяй–Гаусса*), так и *эллиптическая геометрия* (иногда ее также называют *римановой геометрией*), которые отличаются от *евклидовой* (или *параболической*) *геометрии*. Основным различием между евклидовой и неевклидовой геометриями является природа параллельных прямых. В евклидовой геометрии, если мы имеем прямую l и точку a, которая ей не принадлежит, то мы можем провести через эту точку только одну прямую, параллельную l. В гиперболической геометрии существует бесконечное множество прямых, проходящих через точку a и параллельных l. В эллиптической геометрии параллельных прямых вообще не существует.

Сферическая геометрия также является "неевклидовой", однако в ней не действует аксиома, утверждающая, что любые две точки задают только одну прямую.

Сферическая метрика

Пусть $S^n(0,r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\}$ – сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром 0 и радиусом $r > 0$.

Сферическая метрика (или **метрика большого круга**) d_{sph} есть метрика на $S^n(0,r)$, определенная как

$$r \arccos \left(\frac{\left| \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i \right|}{r^2} \right),$$

где arccos – арккосинус на отрезке [0, π]. Это – длина дуги большого круга, прохо-

дящего через x и y. Используя стандартное скалярное произведение $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$ на $\mathbb{R}^{n+1}$, сферическую метрику можно записать как $r \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}}$.

Метрическое пространство $(S^n(0, r), d_{\text{sph}})$ называется *n-мерным сферическим пространством*. Это – пространство кривизны $1/r^2$ (r – радиус кривизны), которое является моделью n-мерной *сферической геометрии*. Большие круги сферы – его геодезические, все геодезические являются замкнутыми и имеют одинаковую длину (см., например, [Blum70]).

Эллиптическая метрика

Пусть $\mathbb{R}P^n$ – действительное n-мерное проективное пространство. **Эллиптической метрикой** d_{ell} называется метрика на $\mathbb{R}P^n$, определенная как

$$r \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}},$$

для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1}),\ y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$, где $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$, r – фиксированная положительная константа и arccos – арккосинус на отрезке [0, π].

Метрическое пространство $(\mathbb{R}P^n, d_{\text{ell}})$ называется *n-мерным эллиптическим пространством* и представляет собой модель n-мерной *эллиптической геометрии*. Оно является пространством кривизны $1/r^2$ (r – радиус кривизны). При $r \to \infty$ метрические формулы эллиптической геометрии превращаются в формулы евклидовой геометрии (или становятся лишенными смысла).

Если $\mathbb{R}P^n$ рассматривается как множество $E^n(0,\ r)$, полученное из сферы $S^n(0, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром 0 и радиусом r посредством отождествления диаметрально противоположных точек, то эллиптическая метрика на $E^n(0,\ r)$ может быть представлена как $d_{\text{sph}}(x, y)$, если $d_{\text{sph}}(x, y) \le \frac{\pi}{2} r$ и как $\pi r - d_{\text{sph}}(x, y)$, если $d_{\text{sph}}(x, y) > \frac{\pi}{2} r$, где d_{sph} – **сферическая метрика** на $S^n(0,\ r)$. Таким образом, не существует двух точек множества $E^n(0,\ r)$ на расстоянии, превышающем $\frac{\pi}{2} r$. Эллиптическое пространство $E^n(0,\ r)d_{\text{ell}})$ называется *сферой Пуанкаре*.

Если $\mathbb{R}P^n$ рассматривается как множество E^n прямых, проходящих через нулевой элемент в $\mathbb{R}^{n+1}$, то эллиптическая метрика на E^n определяется как угол между соответствующими подпространствами.

n-Мерное эллиптическое пространство есть *риманово пространство* постоянной положительной кривизны. Это – единственное такое пространство, которое топологически эквивалентно проективному пространству (см., например, [Blum70], [Buse55]).

Эрмитова эллиптическая метрика

Пусть $\mathbb{C}P^n$ – n-мерное комплексное проективное пространство. **Эрмитова эллиптическая метрика** d_{ell}^H (см., например, [Buse55]) есть метрика на $\mathbb{C}P^n$, определенная как

$$r \arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}}$$

для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1}),\ y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$, где $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{x}_i y_i$, r – фиксированная положительная константа и arccos – арккосинус на отрезке $[0, \pi]$.

Метрическое пространство $\left(\mathbb{C}P^n, d_{\text{ell}}^H\right)$ называется n-мерным *эрмитовым эллиптическим пространством* (см. **Метрика Фубини–Штуди**, гл. 7).

Метрика эллиптической плоскости

Метрика эллиптической плоскости есть **эллиптическая метрика** на *эллиптической плоскости* $\mathbb{R}P^2$. Если $\mathbb{R}P^2$ рассматривается как *сфера Пуанкаре* (т.е. сфера в $\mathbb{R}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками) диаметра 1, касающаяся расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ в точке $z = 0$, то, при стереографической проекции с "Северного полюса" (0,0,1), $\overline{\mathbb{C}}$ с отождествленными точками z и $-\frac{1}{z}$ является моделью эллиптической плоскости и метрика d_{ell} эллиптической плоскости на ней определяется своим *линейным элементом* $ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}$.

Псевдоэллиптическое расстояние

Псевдоэллиптическое расстояние (или *эллиптическое псевдорасстояние*) dp_{ell} есть расстояние на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с отождествленными точками z и $-\frac{1}{z}$, определенное как

$$\left|\frac{z-u}{1+\bar{z}u}\right|.$$

Именно, $dp_{\text{ell}}(z,u) = \operatorname{tg} d_{\text{ell}}(z,u)$, где dp_{ell} – **метрика эллиптической плоскости**.

Гиперболическая метрика

Пусть $\mathbb{R}P^2$ – n-мерное вещественное проективное пространство и пусть для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1}),\ y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$ задано *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i$.

Гиперболическая метрика d_{hyp} есть метрика на множестве $H^n = \{x \in \mathbb{R}P^n : \langle x, x\rangle < 0\}$, определенная как

$$r \operatorname{arccosh} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа и arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса. При таком построении точки множества H^n могут рассматриваться как одномерные подпространства *псевдоевклидова пространства* $\mathbb{R}^{n,1}$ внутри конуса $C = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x\rangle = 0\}$.

Метрическое пространство (H^n, d_{hyp}) называется *n-мерным гиперболическим пространством*. Оно является моделью n-мерной *гиперболической геометрии*, пространством кривизны $-1/r^2$ (r – радиус кривизны). При замене r на ir все метрические формулы гиперболической геометрии перейдут в соответствующие формулы эллиптической геометрии. При $r \to \infty$ формулы каждой из систем дают формулы евклидовой геометрии (или становятся лишенными смысла).

Если H^n рассматривается как множество $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < K\right\}$, где $K > 1$ – произвольная фиксированная константа, то гиперболическую метрику можно записать как

$$\frac{r}{2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\gamma(x,y)}}{1-\sqrt{1-\gamma(x,y)}},$$

где $\gamma(x,y) = \dfrac{\left(K - \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(K - \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}{\left(K - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}$ и r – положительное число с $\operatorname{tg}\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$.

Если H^n рассматривается как подмногообразие $(n+1)$-мерного *псевдоевклидова пространства* $\mathbb{R}^{n,1}$ со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} x_i y_i$ (именно, как верхний лист $\{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x\rangle = -1,\ x_1 > 0\}$ двухполостного *гиперболоида вращения*), то гиперболическая метрика на H^n порождается **псевдоримановой метрикой** на $\mathbb{R}^{n,1}$ (см. **Метрика Лоренца**, гл. 26).

n-Мерное гиперболическое пространство есть *риманово пространство* постоянной отрицательной кривизны. Это единственное такое пространство, которое является **полным** и топологически эквивалентным евклидову пространству (см., например, [Blum70], [Buse55]).

Эрмитова гиперболическая метрика

Пусть $\mathbb{C}P^n$ – n-мерное комплексное проективное пространство и пусть для любых $x = (x_1 : \ldots : x_{n+1}),\ y = (y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$ задано *скалярное произведение* $\langle x, y\rangle = -\bar{x}_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \bar{x}_i y_i$.

Эрмитова гиперболическая метрика d_{hyp}^H (см., например, [Buse55]) есть метрика на множестве $\mathbb{C}H^n = \{x \in \mathbb{C}P^n : \langle x, x\rangle < 0\}$, задаваемая как

$$r \operatorname{arccosh} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}},$$

где r – фиксированная положительная константа и arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Метрическое пространство $\left(\mathbb{C}H^n, d_{\text{hyp}}^H\right)$ называется n-мерным *эрмитовым гиперболическим пространством*.

Метрика Пуанкаре

Метрика Пуанкаре d_{P} есть **гиперболическая метрика** для *модели диска Пуанкаре* (или *модели конформного диска*) гиперболической геометрии. В данной модели каждая точка *единичного диска* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ называется *гиперболической точкой*, сам диск Δ – гиперболической плоскостью, дуги окружностей (и диаметры) в Δ, которые являются ортогональными к *абсолюту* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, называются *гиперболическими прямыми.* Каждая точка из Ω называется *идеальной точкой*. Угловые измерения в данной модели такие же, как и в гиперболической геометрии. Метрика Пуанкаре на Δ задается ее *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{\left(1 - z_1^2 - z_2^2\right)^2}.$$

Расстояние между двумя точками z и u диска Δ может быть записано как

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\overline{u}|+|z-u|}{|1-z\overline{u}|-|z-u|} = \operatorname{arctgh}\frac{|z-u|}{|1-z\overline{u}|}.$$

В терминах ангармонического *отношения* оно равно

$$\frac{1}{2}\ln(z,u,z^*,u^*) = \frac{1}{2}\ln\frac{(z^*-z)(u^*-u)}{(z^*-u)(u^*-z)},$$

где z^* и u^* являются точками пересечения гиперболической прямой линии, проходящей через z и u, с Ω, z^* со стороны u и u^* – со стороны z.

В *модели полуплоскости Пуанкаре* гиперболической геометрии *гиперболическая плоскость* есть верхняя полуплоскость $H^2 = \{z \in \mathbb{C} : z_2 > 0\}$, а *гиперболические прямые* – полуокружности и полупрямые, которые ортогональны действительной оси. *Абсолют* (т.е. множество *идеальных точек*) есть действительная ось вместе с бесконечно удаленной точкой. Угловые измерения в данной модели такие же, как и в гиперболической геометрии. *Линейный элемент* **метрики Пуанкаре** на H^2 задается по формуле

$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2} = \frac{dz_1^2 + dz_2^2}{z_2^2}.$$

Расстояние между двумя точками z, u может быть записано как

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|z-\overline{u}|+|z-u|}{|z-\overline{u}|-|z-u|} = \operatorname{arctgh}\frac{|z-u|}{|z-\overline{u}|}.$$

В терминах ангармонического отношения оно равно

$$\frac{1}{2}\ln(z,u,z^*,u^*) = \frac{1}{2}\ln\frac{(z^*-z)(u^*-u)}{(z^*-u)(u^*-z)},$$

где z^* – идеальная точка полупрямой, исходящей из z и проходящей через u, и u^* – идеальная точка полупрямой, исходящей из u и проходящей через z.

В общем случае **гиперболическая метрика** в любой *области* $D \subset \mathbb{C}$, имеющей по крайней мере три граничные точки, задается как прообраз метрики Пуанкаре на Δ при *конформном отображении* $f : D \to \Delta$. Ее *линейный элемент* имеет форму

$$ds^2 = \frac{|f'(z)|^2 |dz|^2}{(1-|f(z)|^2)^2}.$$

Расстояние между двумя точками z и u из D может быть представлено как

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|1-f(z)\overline{f(u)}|+|f(z)-f(u)|}{|1-f(z)\overline{f(u)}|-|f(z)-f(u)|}.$$

Псевдогиперболическое расстояние

Псевдогиперболическое расстояние (или **расстояние Глисона**, *гиперболическое псевдорасстояние*) dp_{hyp} есть метрика на единичном диске $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, заданная как

$$\left|\frac{z-u}{1-\bar{z}u}\right|.$$

Именно, $dp_{\text{hyp}}(z,u) = \operatorname{tgh} d_{\text{P}}(z,u)$, где d_{P} – **метрика Пуанкаре** на Δ.

Метрика Кэли–Клейна–Гильберта

Метрика Кэли–Клейна–Гильберта d_{CKH} – **гиперболическая метрика** для *модели Клейна* (или *модели проективного диска, модели Бельтрами–Клейна*) гиперболической геометрии. В этой модели гиперболическая плоскость реализуется как *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и *гиперболические прямые* – как хорды диска Δ. Каждая точка *абсолюта* $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ называется *идеальной точкой*. Угловые измерения в данной модели искажены. **Метрика Кэли–Клейна–Гильберта** на Δ задается ее **метрическим тензором** $((g_{ij})), i, j = 1,2$:

$$g_{11} = \frac{r^2\left(1-z_2^2\right)}{\left(1-z_1^2-z_2^2\right)^2}, \quad g_{12} = \frac{r^2 z_1 z_2}{\left(1-z_1^2-z_2^2\right)^2}, \quad g_{22} = \frac{r^2\left(1-z_1^2\right)}{\left(1-z_1^2-z_2^2\right)^2},$$

где r – произвольная положительная константа. Расстояние между точками z и u из Δ может быть записано как

$$r\operatorname{arccosh}\left(\frac{1-z_1u_1-z_2u_2}{\sqrt{1-z_1^2-z_2^2}\ \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}}\right),$$

где arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Метрика Вейерштрасса

Для данного действительного n-мерного **пространства скалярного произведения** $(\mathbb{R}^n, \langle,\rangle)$, $n \geq 2$ **метрика Вейерштрасса** d_{W} есть метрика на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\operatorname{arccosh}\left(\sqrt{1+\langle x,x\rangle}\ \sqrt{1+\langle y,y\rangle}-\langle x,y\rangle\right),$$

где arccosh обозначает неотрицательные величины обратного гиперболического косинуса.

Здесь $\left(x, \sqrt{1+\langle x,x\rangle}\right) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}$ являются *координатами Вейерштрасса* точки $x \in \mathbb{R}^n$ и метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_{\mathrm{W}})$ может быть отождествлено с *моделью Вейерштрасса* гиперболической геометрии.

Метрика Кэли–Клейна–Гильберта $d_{\mathrm{CKH}}(x,y) = \operatorname{arccosh} \dfrac{1-\langle x,y\rangle}{\sqrt{1-\langle x,x\rangle}\,\sqrt{1-\langle y,y\rangle}}$ на открытом шаре $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,x\rangle < 1\}$ может быть получена из d_{W} посредством равенства $d_{\mathrm{CKH}}(x,y) = d_{\mathrm{W}}(\mu(x), \mu(y))$, где $\mu : \mathbb{R}^n \to B^n$ является *отображением Вейерштрасса*: $\mu(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-\langle x,x\rangle}}$.

Квазигиперболическая метрика

Для данной *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ **квазигиперболическая метрика** есть метрика на D, задаваемая как

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \frac{|\,dz\,|}{\rho(z)},$$

где инфимум берется по множеству Γ всех спрямляемых кривых, соединяющих x и y в D, $\rho(z) = \inf\limits_{u \in \partial D} \| z-u \|_2$ – расстояние между z и границей ∂D, $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Эта метрика является **метрикой, гиперболической по Громову**, если область D – *равномерная*, т.е. существуют такие константы C, C', что каждая пара точек x, $y \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой $\gamma \in D$ длины $l(\gamma)$, не превышающей $C\,|\,x-y\,|$, и неравенство $\min\{l(\gamma(x,z)), l(\gamma(z,y))\} \leq C'\rho(z)$ выполняется для всех $z \in \gamma$.

Для $n = 2$ **гиперболическая метрика** на D может быть задана выражением

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \frac{2\,|\,f'(z)\,|}{1-|\,f(z)\,|^2}\,|\,dz\,|,$$

где $f : D \to \Delta$ есть любое конформное отображение области D на *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |\,z\,| < 1\}$. Для $n \geq 3$ эта метрика определяется только для полугиперплоскости H^n и для *открытого единичного шара* B^n как инфимум по всем $\gamma \in \Gamma$ интегралов $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{|\,dz\,|}{z_n}$ и $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{2\,|\,dz\,|}{1-\|\,z\,\|_2^2}$ соответственно.

Аполлонова метрика

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ – *область*, такая что ее дополнение не содержится в гиперплоскости или сфере.

Аполлоновой метрикой (или **метрикой Барбилиана**, [Barb35]) называется метрика на D, задаваемая с помощью ангармонического отношения следующим

образом:

$$\sup_{a,b\in\partial D} \ln \frac{\| a-x \|_2 \| b-y \|_2}{\| a-y \|_2 \| b-x \|_2},$$

где ∂D – граница D и $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**.

Полуаполлонова метрика

Для данной *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ **полуаполлоновой метрикой** называется метрика на D, задаваемая как

$$\sup_{a\in\partial D} \left| \ln \frac{\| a-y \|_2}{\| a-x \|_2} \right|,$$

где ∂D – граница D и $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика будет **гиперболической по Громову** только тогда, когда область D имеет вид $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$, т.е. имеет всего одну граничную точку.

Метрика Геринга

Для *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ **метрика Геринга** (или $\tilde{j}_D$-*метрика отношения расстояний*) есть метрика на D, задаваемая как

$$\frac{1}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{\| x-y \|_2}{\rho(x)} \right) \left(1 + \frac{\| x-y \|_2}{\rho(y)} \right) \right),$$

где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\rho(x) = \inf\limits_{u\in\partial D} \| x-u \|_2$ – расстояние между x и границей ∂D области D.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**.

Метрика Вуоринена

Для данной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ **метрика Вуоринена** (или j_D-*метрика отношения расстояний*) есть метрика на D, задаваемая как

$$\ln \left(1 + \frac{\| x-y \|_2}{\min\{\rho(x), \rho(y)\}} \right),$$

где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ $\rho(x) = \inf\limits_{u\in\partial D} \| x-u \|_2$ – расстояние между x и границей ∂D области D.

Данная метрика будет **гиперболической по Громову** только тогда, когда область D имеет вид $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$,, т.е. имеет всего одну граничную точку.

Метрика Ферранда

Для данной *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ **метрика Ферранда** есть метрика на D, задаваемая как

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} \int_\gamma \sup_{a,b\in\partial D} \frac{\| a-b \|_2}{\| z-a \|_2 \| z-b \|_2} | dz |,$$

где инфимум берется по множеству Γ всех спрямляемых кривых, соединяющих x и y в D, ∂D – границf D и $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**, если D является равномерной, т.е. существуют константы C, C', такие что каждая пара точек $x, y \in D$ может быть соединена спрямляемой кривой $\gamma \in D$ длины $l(\gamma)$, не превосходящей $C|x-y|$, и неравенство $\min\{l(\gamma(x,z)), l(\gamma(z,y))\} \le C'\rho(z)$ имеет место для всех $z \in \gamma$.

Метрика Сейтенранта

Для данной *области* $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \mathbb{R}^n$ **метрика Сейтенранта** (или **метрика ангармонического отношения**) есть метрика на D, задаваемая как

$$\sup_{a,b \in \partial D} \ln\left(1 + \frac{\|a-x\|_2 \, \|b-y\|_2}{\|a-b\|_2 \, \|x-y\|_2}\right),$$

где ∂D – граница D и $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

Данная метрика является **гиперболической по Громову**.

Метрика модулюса

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \mathbb{R}^n$ – некоторая *область* с границей ∂D, имеющая положительную емкость.

Метрика модулюса (Гал, 1960) есть метрика на D, задаваемая как

$$\inf_{C_{xy}} M(\Delta(C_{xy}, \partial D, D)),$$

где $M(\Gamma)$ является *конформным модулюсом* семейства кривых Γ и C_{xy} есть континуум, такой что для некоторой кривой $\gamma : [0,1] \to D$ мы имеем следующие свойства: $C_{xy} = \gamma([0,1])$, $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$ (см. **Экстремальная метрика**, гл. 8).

Данная метрика будет **гиперболической по Громову**, если D – открытый шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x\rangle < 1\}$ или односвязная область в $\mathbb{R}^2$.

Вторая метрика Ферранда

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \ne \mathbb{R}^n$ – *область*, такая что $|\mathbb{R}^n \setminus \{D\}| \ge 2$. **Второй метрикой Ферранда** будет метрика на D, задаваемая как

$$\left(\inf_{C_x, C_y} M(\Delta(C_x, C_y, D)\right)^{1/1-n},$$

где $M(\Gamma)$ является *конформным модулюсом* семейства кривых Γ и C_z ($z = x, y$) есть континуум, такой что для некоторой кривой $\gamma : [0,1] \to D$ мы имеем следующие свойства: $C_z = ([0,1]))$, $z \in |\gamma_z|$ и $\gamma_z(t) \to \partial D$ при $t \to 1$ (см. **Экстремальная метрика**, гл. 8).

Данная метрика будет **гиперболической по Громову**, если D – открытый шар $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x\rangle < 1\}$ или односвязная область в $\mathbb{R}^2$.

Параболическое расстояние

Параболическое расстояние есть метрика на $\mathbb{R}^{n+1}$, рассматриваемом как $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, определяемая как

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} + |\, t_x - t_y \,|^{1/m}, \quad m \in \mathbb{N}$$

для любых $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ может интерпретироваться как многомерное *пространство-время*.

Обычно используется значение $m = 2$. Существуют некоторые варианты параболического расстояния, например параболическое расстояние

$$\sup\{|\, x_1 - y_1 \,|, |\, x_2 - y_2 \,|^{1/2}\}$$

на $\mathbb{R}^2$ (см. также **Метрика ковра Рикмана**, гл. 19) или **параболическое расстояние полупространства** на $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$, задаваемое как

$$\frac{|\, x_1 - y_1 \,| + |\, x_2 - y_2 \,|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{|\, x_2 - y_2}} + \sqrt{|\, x_3 - y_3 \,|}.$$

Глава 7

Римановы и эрмитовы метрики

Римановой геометрией называется многомерное обобщение внутренней геометрии двумерных поверхностей евклидова пространства $\mathbb{E}^2$. Она занимается изучением вещественных *гладких многообразий*, снабженных **римановыми метриками**, т.е. семействами положительно определенных симметричных билинейных форм $((g_{ij}))$ на их касательных пространствах, которые гладко меняются от точки к точке. Геометрия таких (римановых) многообразий базируется на *линейном элементе* $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j$. С его помощью определяются, в частности, локальные понятия угла, длины кривых и объема. Из них посредством интегрирования могут быть получены другие, глобальные величины. Так, величина может быть рассмотрена как длина вектора $(dx_1,..., dx_n)$; длина дуги кривой γ выражается теперь как $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j}$; тогда **внутренняя метрика** на римановом многообразии задается как инфимум длин кривых, соединяющих две данные точки многообразия. Таким образом, риманова метрика не является обычной метрикой, но порождает обычную метрику, именно, внутреннюю метрику, которую иногда называют **римановым расстоянием**, на любом связном римановом многообразии; риманова метрика является бесконечно малой формой соответствующего риманова расстояния.

В качестве особых случаев римановой геометрии рассматриваются два стандартных случая – *эллиптическая геометрия* и *гиперболическая геометрия неевклидовой геометрии*, а также сама *евклидова геометрия*.

Если билинейные формы $((g_{ij}))$ являются невырожденными, но неопределенными, то мы получаем *псевдориманову геометрию*. Для размерности 4 (и *сигнатуры* (1, 3)) такая геометрия является основным объектом общей теории относительности. Если $ds = F(x_1,..., x_n, dx_1,..., dx_n)$, где F – действительная положительно определенная выпуклая функция, которую нельзя задать как квадратный корень из симметричной билинейной формы (как это делается в римановой геометрии), то мы получим *финслерову геометрию*, представляющую собой обобщение римановой геометрии.

Эрмитова геометрия занимается изучением *комплексных многообразий*, снабженных **эрмитовыми метриками**, т.е. семействами положительно определенных симметричных сескилинейных форм на их касательных пространствах, которые гладко меняются от точки к точке. Они являются комплексным аналогом римановой геометрии. Особый класс эрмитовых метрик образуют метрики Кехлера, имеющие замкнутую фундаментальную форму w. Обобщение эрмитовых метрик дает нам **комплексные финслеровы метрики**, которые нельзя выразить в терминах билинейных симметричных положительно определенных сескилинейных форм.

7.1. РИМАНОВЫ МЕТРИКИ И ОБОБЩЕНИЯ

Произвольное *действительное n-мерное многообразие с границей* M^n есть **хаусдорфово пространство**, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо открытому подмножеству $\mathbb{E}^n$, либо открытому подмножеству замкнутого полупространства пространства $\mathbb{E}^n$. Множество точек, имеющих открытые окрестности, гомеоморфные $\mathbb{E}^n$, называется *множеством внутренних точек* многообразия; оно всегда является непустым. Дополнение внутреннего множества точек называется *границей* многообразия и представляет собой $(n-1)$-мерное многообразие. Если граница многообразия M^n пуста, то мы получаем *действительное n-мерное многообразие без границы*.

Многообразие без границы называется *замкнутым*, если оно компактно, и *открытым* – иначе.

Открытое множество M^n вместе с гомеоморфизмом между данным открытым множеством и некоторым открытым множеством из $\mathbb{E}^n$ называется *координатной картой*. Семейство покрывающих множество M^n карт называется *атласом* на M^n. Гомеоморфизмы двух перекрывающихся карт дают нам отображение одного подмножества $\mathbb{E}^n$ в некое другое подмножество $\mathbb{E}^n$. Если все эти отображения непрерывно дифференцируемы, то множество M^n называется *дифференцируемым многообразием*. Если все эти отображения являются k раз непрерывно дифференцируемыми, то многообразие будет называться C^k многообразием; если они бесконечное число раз дифференцируемы, то многообразие называется *гладким многообразием* (или C^∞ *многообразием*).

Атлас многообразия называется *ориентированным*, если все координатные преобразования между картами являются положительными, т.е. якобиан координатных преобразований между любыми двумя картами положителен в любой точке. *Ориентируемым многообразием* называется многообразие, которое допускает наличие ориентированного атласа.

Многообразия наследуют многие локальные свойства евклидова пространства. В частности, они являются локально путь-связными, локально компактными и локально метризуемыми. Любое гладкое риманово многообразие изометрически вложимо (Нэш, 1956) в некоторое конечномерное евклидово пространство.

С каждой точкой на дифференцируемом многообразии ассоциированы касательное *пространство* и двойственное ему *ко-касательное пространство.* Формально, пусть $M^n - C^A$ многообразие, $k \geq 1$, и p – некоторая точка из M^n. Зададим карту $\varphi : U \to \mathbb{E}^n$, где U – открытое подмножество множества M^n, содержащее точку p. Предположим, что две кривые $\gamma^1 : (-1,1) \to M^n$ и $\gamma^2 : (-1,1) \to M^n$ со значениями $\gamma^1(0) = \gamma^2(0) = p$ заданы так, что обе величины $\varphi \cdot \gamma^1$ и $\varphi \cdot \gamma^2$ являются дифференцируемыми в точке 0. В этом случае γ^1 и γ^2 называются *касательными* в точке 0, если обычные производные для $\varphi \cdot \gamma^1$ и $\varphi \cdot \gamma^2$ совпадают в 0: $(\varphi \cdot \gamma^1)'(0) = (\varphi \cdot \gamma^2)'(0)$. Если функции $\varphi \cdot \gamma^i : (-1,1) \to \mathbb{E}^n$, $i = 1,2$ заданы с помощью n действительных координатных функций $(\varphi \cdot \gamma^i)_1(t), ..., (\varphi \cdot \gamma^i)_n(t)$, то вышеуказанное условие будет означать, что их якобианы $\left(\frac{d(\varphi \cdot \gamma^i)_1(t)}{dt}, ..., \frac{d(\varphi \cdot \gamma^i)_n(t)}{dt} \right)$ совпадают в 0. Это отношение является отношением эквивалентности, а класс эквивалентности $\gamma'(0)$ кривой γ называется *касательным вектором* многообразия

M^n в точке p. *Касательное пространство* $T_p(M^n)$ многообразия M^n в точке p определяется как множество всех касательных векторов в точке p. Функция $(d\varphi)_p : T_p(M^n) \to \mathbb{E}^n$, задаваемая условием $(d\varphi)_p(\gamma'(0)) = (\varphi \cdot \gamma)'(0)$, является биективной и может быть использована для перенесения операций линейного пространства из $\mathbb{E}^n$ на $T_p(M^n)$.

Все касательные пространства $T_p(M^n)$, $p \in M^n$, "склеенные вместе", образуют *касательное расслоение* $T(M^n)$ многообразия M^n. Любой элемент из $T(M^n)$ есть пара (p, v), где $v \in T_p(M^n)$. Если для открытой окрестности U точки p функция $\varphi : U \to \mathbb{R}$ является координатной картой, то прообраз V окрестности U в $T(M^n)$ допускает отображение $\psi : V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, определяемое как $\psi(p, v) = (\varphi(p), d\varphi(p))$. Это определяет структуру гладкого $2n$-мерного многообразия на $T(M^n)$. Аналогичным образом можно получить *кокасательное расслоение* $T^*(M^n)$ многообразия M^n, используя для этого кокасательные пространства $T_p^*(M^n)$, $p \in M^n$.

Векторное поле на многообразии M^n есть *сечение* его касательного расслоения $T(M^n)$, т.е. гладкая функция $f : M^n \to T(M^n)$, которая каждой точке $p \in M^n$ ставит в соответствие вектор $v \in T_p(M^n)$.

Связь (или *ковариантная производная*) является способом определения производной векторного поля на многообразии. Формально, *ковариантная производная* ∇ вектора u (определенного в точке $p \in M^n$) в направлении вектора v (определенного в той же точке p) есть правило, которое задает третий вектор в точке p, называемый $\nabla_v u$ и обладающий свойствами производной. Риманова метрика единственным образом определяет особую ковариантную производную, называемую *связью Леви–Чивита*. Она представляет собой связь ∇ без кручения касательного расслоения, сохраняющую данную риманову метрику.

Риманов тензор кривизны R является стандартным способом выражения *кривизны римановых многообразий*. Риманов тензор кривизны может быть задан в терминах *связи Леви–Чивита* ∇ формулой

$$R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w,$$

где $R(u, v)$ – линейное преобразование касательного пространства многообразия M^n; линейно по каждому аргументу. Если значения $u = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $v = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ являются полями координатных векторов, то $[u, v] = 0$ и формулу можно упростить: $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_w w$, т.е. тензор кривизны служит мерой антикоммутативности ковариантной производной. Линейное преобразование $w \to R(u, v)w$ называют также *преобразованием кривизны*.

Тензор кривизны Риччи (или *кривизна Риччи*) Ric получается как *след* полного тензора кривизны R. Для случая римановых многообразий его можно рассматривать как лапласиан риманова метрического тензора. Тензор кривизны Риччи является линейным оператором на касательном пространстве в данной точке. Используя ортонормированный базис $(e_i)_i$ в касательном пространстве $T_p(M^n)$, получаем формулу

$$\mathrm{Ric}(u) = \sum_i R(u, e_i)e_i.$$

Результат не зависит от выбора ортонормированного базиса. Начиная с размерности 4, кривизна Риччи уже не описывает тензор кривизны полностью.

Скаляр Риччи (или *скалярная кривизна*) Sc риманова многообразия M^n является полным следом тензора кривизны; используя ортонормированный базис $(e_i)_i$ в точке $p \in M^n$, мы получаем равенство

$$\mathrm{Sc} = \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = \sum_i \langle \mathrm{Ric}(e_i), e_i \rangle.$$

Секционная кривизна $K(\sigma)$ риманова многообразия M^n определяется как *кривизна Гаусса* σ-*сечения* в точке $p \in M^n$. В данном случае, имея 2-плоскость σ в касательном пространстве $T_p(M^n)$, σ-*сечение* есть локально определенная часть поверхности, для которой плоскость σ является касательной в точке p, полученной из геодезических, исходящих из p в направлениях образа σ при экспоненциальном отображении.

Метрический тензор

Метрическим тензором (или *основным тензором, фундаментальным тензором*) называется симметричный тензор ранга 2, используемый для измерения расстояний и углов в вещественном n-мерном дифференцируемом многообразии M^n. После выбора локальной системы координат $(x_i)_i$ метрический тензор возникает как действительная симметричная $(n \times n)$ матрица $((g_{ij}))$.

Задание метрического тензора на n-мерном дифференцируемом многообразии M^n порождает скалярное произведение (т.е. симметричную билинейную, однако в общем случае не являющуюся положительно определенной форму) $\langle , \rangle_p$ на касательном пространстве $T_p(M^n)$ в любой точке $p \in M^n$, задаваемое как

$$\langle x, y \rangle_p = g_p(x, y) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j,$$

где $g_{ij}(p)$ – значение метрического тензора в точке $p \in M^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in T_p(M^n)$. Совокупность всех этих скалярных произведений называется **метрикой** g с метрическим тензором $((g_{ij}))$. Длина ds вектора $(dx_1, ..., dx_n)$ выражается квадратичной дифференциальной формой

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j.$$

которая называется *линейным элементом* (или первой *фундаментальной формой*) метрики g. Длина кривой γ выражается формулой $\int_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j}$. В общем случае она может быть действительной, чисто мнимой или нулевой (*изотропная кривая*).

Сигнатурой метрического тензора называется пара (p, q) положительных (p) и отрицательных (q) *собственных значений* матрицы $((g_{ij}))$. Сигнатура называется *неопределенной*, если значения p и q являются ненулевыми, и *положительно определенной*, если $q = 0$. Соответственно, риманова метрика – метрика g с положительно определенной сигнатурой $(p, 0)$, а псевдориманова метрика – метрика g с неопределенной сигнатурой (p, q).

Невырожденная метрика

Невырожденной метрикой называется метрика g с метрическим тензором $((g_{ij}))$, для которого *метрический определитель* $\det((g_{ij})) \neq 0$. Все римановы и псевдоримановы метрики являются невырожденными.

Вырожденной метрикой называется метрика g с метрическим тензором $((g_{ij}))$, для которого метрический пределитель $\det((g_{ij})) = 0$ (см. **Полуриманова метрика** и **Полупсевдориманова метрика**). Многообразие с вырожденной метрикой называется *изотропным многообразием*.

Диагональная метрика

Диагональной метрикой называется метрика g с метрическим тензором $((g_{ij}))$, для которого $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Евклидова метрика является диагональной метрикой, так как ее метрический тензор имеет вид $g_{ij} = 1$, $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$.

Риманова метрика

Рассмотрим действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, в котором каждое касательное пространство снабжено *скалярным произведением* (т.е. симметричной положительно определенной билинейной формой), гладко изменяющимся от точки к точке.

Римановой метрикой на M^n является семейство скалярных произведений $\langle , \rangle_p$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$ – по одному для каждой точки $p \in M^n$.

Каждое скалярное произведение $\langle , \rangle_p$ полностью задается скалярными произведениями $\langle e_i, e_j \rangle_p = g_{ij}(p)$ элементов $e_1, ..., e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{E}^n$, т.е. действительной симметричной и положительно определенной $n \times n$ матрицей $((g_{ij})) = ((g_{ij}(p)))$, называемой **метрическим тензором**. Именно, $\langle x, y \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j$, где $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in T_p(M^n)$. Гладкая функция g полностью определяет риманову метрику.

Риманова метрика на M^n не является обычной метрикой на M^n. Однако для связного многообразия M^n каждая риманова метрика на M^n порождает обычную метрику на M^n (именно, **внутреннюю метрику** на M^n): для любых двух точек $p, q \in M^n$ **риманово расстояние** между ними определено как

$$\inf_{\gamma} \int_0^1 \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} dt = \inf_{\gamma} \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt,$$

где инфимум берется по всем спрямляемым кривым $\gamma : [0,1] \to M^n$, соединяющим точки p и q.

Римановым многообразием (или *римановым пространством*) называется действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное римановой метрикой. Теория римановых пространств называется *римановой геометрией*. Простейшим примером римановых пространств являются евклидовы пространства, *гиперболические пространства* и *эллиптические пространства*. Риманово пространство будет называться *полным*, если оно является **полным** метрическим пространством.

Конформная метрика

Конформной структурой векторного пространства V называется класс попарно гомотетичных евклидовых метрик на V. Любая евклидова метрика d_E на V задает некоторую конформную структуру $\{\lambda d_E : \lambda > 0\}$.

Конформная структура многообразия – поле конформных структур на касательных пространствах или, что то же, класс *конформно эквивалентных римановых метрик*. Две римановы метрики g и h на гладком многообразии M^n называются *конформно эквивалентными*, если для $g = f \cdot h$ некоторой положительной функции f на M^n, называемой *конформным фактором*.

Конформная метрика – риманова метрика, представляющая конформную структуру (см. **Конформно инвариантная метрика**, гл. 8).

Конформное пространство

Конформным пространством (или *инверсивным пространством*) называется евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, расширенное с помощью *идеальной точки* (*точки в бесконечности*). Посредством *конформных преобразований* (т.е. непрерывных преобразований, сохраняющих локальные углы) идеальная точка может быть переведена в обычную. Следовательно, в конформном пространстве сфера и плоскость неразличимы: плоскость – это сфера, проходящая через идеальную точку.

Конформные пространства исследуются в *конформной геометрии* (или *геометрии, сохраняющей углы, геометрии Мёбиуса, инверсивной геометрии*), которая изучает свойства фигур, остающихся инвариантными при конформных преобразованиях. Это – множество преобразований, отображающих сферы в сферы, т.е. порождаемых евклидовыми преобразованиями совместно с *инверсиями*, которые в координатной форме являются сопряженными с $x_i \to \dfrac{r^2 x_i}{\sum\limits_j x_j^2}$, где r – радиус инверсии. Инверсия в сферу становится автоморфизмом с периодом 2. Любой угол переводится в равный угол.

Двумерное конформное пространство является *римановой сферой*, на которой конформные преобразования задаются *преобразованиями Мёбиуса* $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$.

В общем случае *конформное отображение* между двумя римановыми многообразиями есть такой диффеоморфизм между ними, что обратный образ метрики становится конформно эквивалентным прообразу. **Конформное евклидово пространство** – это *риманово пространство*, допускающее конформное отображение на некоторое евклидово пространство.

В общей теории относительности конформные преобразования рассматриваются на *пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$, расширенном двумя идеальными точками.

Пространство постоянной кривизны

Пространством постоянной кривизны называется *риманово пространство* M^n, для которого *секционная кривизна* $K(\sigma)$ является постоянной величиной во всех двумерных направлениях σ.

Пространственная форма – связное полное пространство постоянной кривизны. **Плоское пространство** – пространственная форма нулевой кривизны.

Евклидово пространство и плоский тор являются пространственными формами нулевой кривизны (т.е. плоскими пространствами), сфера – пространственная форма положительной кривизны, а *гиперболическое пространство* – пространственная форма отрицательной кривизны.

Обобщенные римановы пространства

Обобщенным римановым пространством называется метрическое пространство с **внутренней метрикой**, для кривизны которого приняты определенные ограничения. Такие пространства включают в себя *пространства ограниченной кривизны, римановы пространства* и т.п. Обобщенные римановы пространства отличаются от римановых не только большей обобщенностью, но и тем, что они определяются и исследуются только на основе их метрики без учета координат.

Пространство с ограниченной кривизной ($\le k$ и $\ge k'$) является обобщенным римановым пространством, которое определяется следующим условием: для любой последовательности г*еодезических треугольников* T_n, сужающихся в точку, имеют место неравенства

$$k \ge \overline{\lim} \frac{\bar{\delta}(T_n)}{\sigma\left(T_n^0\right)} \ge \underline{\lim} \frac{\bar{\delta}(T_n)}{\sigma\left(T_n^0\right)} \ge k',$$

где *геодезический треугольник* $T = xyz$ является тройкой геодезических отрезков $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ (стороны треугольника T), соединяющих попарно три различные точки x, y, z, величины $\bar{\delta}(T^0) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ выражает *угловой дефект* геодезического треугольника T и $\delta(T^0)$ – площадь евклидова треугольника T^0 со сторонами той же длины. **Внутренняя метрика** на пространстве ограниченной кривизны называется **метрикой ограниченной кривизны**. Такое пространство превращается в риманово, если выполняются два дополнительных условия: локальная компактность пространства (этим обеспечивается локальное существование геодезических) и локальное расширение геодезических. Если при этом $k = k'$, то пространство является римановым пространством с постоянной кривизной k (см. **Пространство геодезических**, гл. 6).

Пространство кривизны $\le k$ определяется условием $\overline{\lim} \frac{\bar{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \le k$. В таком пространстве любая точка имеет некоторую окрестность, в которой сумма $\alpha + \beta + \gamma$ углов геодезического треугольника T не превышает сумму $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k$ углов треугольника T^k со сторонами той же длины в пространстве постоянной кривизны k. Внутренняя метрика такого пространства называется k-**вогнутой метрикой**.

Пространство кривизны $\ge k$ определяется условием $\underline{\lim} \frac{\bar{\delta}(T_n)}{\sigma(T_n^0)} \le k$. В таком пространстве любая точка имеет некоторую окрестность, в которой $\alpha + \beta + \gamma \ge \alpha_k + \beta_k + \gamma_k$ для треугольников T и T^k. Внутреннюю метрику такого пространства называют K-**вогнутой метрикой**.

Пространство Александрова является обобщенным римановым пространством с ограниченной верхней, нижней или интегральной кривизной.

Полная риманова метрика

Риманова метрика g на многообразии M^n называется **полной**, если M^n образует полное метрическое пространство по отношению к g. Любая риманова метрика на компактном многообразии является полной.

Риччи-плоская метрика

Риччи-плоской метрикой называется риманова метрика, тензор кривизны которой обращается в нуль.

Плоское многообразие Риччи представляет собой риманово многообразие, снабженное Риччи-плоской метрикой. *Плоские многообразия Риччи* являются вакуумным решением *евклидова характеристического полинома* и особыми случаями *многообразий Кехлера–Эйнштейна*. К важным плоским многообразиям Риччи относятся *многообразия Калаби–Яу* и *гипермногообразия Кехлера*.

Метрика Оссермана

Метрикой Оссермана называется риманова метрика, для которой риманов тензор кривизны R является *оссермановым*. Это означает, что собственные значения *оператора Якоби* $\mathcal{J}(x)\colon y \to R(y,x)x$ на *единичной сфере* S^{n-1} пространства $\mathbb{E}^n$ будут постоянными, т.е. независимыми от единичных векторов x.

***G*-инвариантная метрика**

***G*-инвариантной метрикой** называется риманова метрика g на дифференцируемом многообразии M^n, которая не изменяется при любых преобразованиях данной *группы Ли* $(G,\cdot,\ id)$. Группа $(G,\cdot,\ id)$ называется *группой движений* (или *группой изометрий*) риманова пространства (M^n, g).

Метрика Иванова–Петровой

Пусть R – римановым тензором кривизны риманова многообразия M^n и $\{x,\ y\}$ – ортогональный базис ориентированной 2-плоскости π в касательном пространстве $T_p(M^n)$.

Метрикой Иванова–Петровой называется риманова метрика на M^n, для которой собственные значения антисимметричного оператора кривизны $\mathcal{R}(\pi) = R(x,y)$ ([IvSt95]) зависят только от точки p риманова многообразия M^n, но не от плоскости π.

Метрика Золла

Метрикой Золла называется риманова метрика на гладком многообразии M^n, геодезические которого являются простыми замкнутыми кривыми равной длины. Двумерная сфера S^2 допускает множество таких метрик, помимо очевидных метрик постоянной кривизны. В терминах цилиндрических координат $(z,\theta)(z \in [-1,1],\ \theta \in [0,2\pi])$ *линейный элемент*

$$ds^2 = \frac{(1+f(z))^2}{1-z^2}dz^2 + (1-z^2)d\theta^2$$

задает метрику Золла на сфере S^2 для любой гладкой нечетной функции $f:[-1,1] \to (-1,1)$, которая обращается в нуль в концевых точках интервала.

Циклоидальная метрика

Циклоидальная метрика – это риманова метрика на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$, задаваемая *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{2x_1}.$$

Она называется циклоидальной, поскольку ее геодезические являются цикло идальными кривыми. Соответствующее расстояние $d(x, y)$ между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}^2_+$ эквивалентно расстоянию

$$\rho(x,y) = \frac{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{|x_2 - y_2|}}$$

в том смысле, что $d \leq C\rho$ и $\rho \leq Cd$ для некоей положительной константы C.

Метрика Бергера

Метрикой Бергера называется риманова метрика на *сфере Бергера* (т.е. сжатой в одном направлении сфере S^3), задаваемая *линейным элементом*

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + \cos^2\alpha(d\psi + \cos\theta d\phi)^2,$$

где α – константа, а θ, ϕ, ψ – *углы Эйлера*.

Метрика Карно-Каратеодори

Распределение (или *поляризация*) на M^n есть подрасслоение касательного расслоения $T(M^n)$ многообразия M^n. При наличии поляризации $H(M^n)$ векторное поле в $H(M^n)$ называется *горизонтальным*. Кривая γ на M^n называется *горизонталь*

ной (или *выделенной, допустимой*) по отношению к $H(M^n)$, если $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}(M^n)$ для любого t. Распределение $H(M^n)$ называется *абсолютно неинтегрируемым*, если *скобки Ли* $[...,[H(M^n), H(M^n)]]$ поляризации $H(M^n)$ перекрывают касательное расслоение $T(M^n)$, т.е. для всех $p \in M^n$ любой касательный вектор v из $T_p(M^n)$ может быть представлен как линейная комбинация векторов следующих видов: u, $[u, w]$, $[u, [w, t]]$, $[u, [w, [t, s]]]$,... $\in T_p(M^n)$, где все векторные поля u, w, t, s,... являются горизонтальными.

Метрикой Карно–Каратеодори (или *C–C метрикой*) называется метрика на многообразии M^n с абсолютно неинтегрируемым горизонтальным распределением $H(M^n)$, задаваемая набором g_c положительно определенных *скалярных произ ведений* на $H(M^n)$. Расстояние $d_c(p, q)$ между любыми точками $p, q \in M^n$ опре деляется как инфимум g_c-длин горизонтальных кривых, соединяющих точки p и q.

Подримановым многообразием (или *поляризованным многообразием*) назы вается многообразие M^n, снабженное метрикой Карно–Каратеодори. Оно является обобщением риманова многообразия. Грубо говоря, для измерения расстояний в подримановом многообразии можно следовать только вдоль кривых, являющихся касательными к горизонтальным пространствам.

Псевдориманова метрика

Рассмотрим действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, в котором каждое касательное пространство $T_p(M^n)$, $p \in M^n$ снабжено гладко изме-

няющимся от точки к точке *скалярным произведением*, которое является невырожденным, но неопределенным.

Псевдоримановой метрикой на M^n называется совокупность скалярных произведений $\langle , \rangle_p$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$, $p \in M^n$, по одному для каждой точки $p \in M^n$.

Каждое скалярное произведение $\langle , \rangle_p$ полностью определено скалярными произведениями $\langle e_i, e_j \rangle_p = g_{ij}(p)$ элементов $e_1, ..., e_n$ стандартного базиса в $\mathbb{E}^n$, т.е. действительной симметричной неопределенной $n \times n$ матрицей $((g_{ij})) = ((g_{ij}(p)))$, называемой **метрическим тензором** (см. **Риманова метрик**а, где метрический тензор является действительной симметричной положительно определенной $n \times n$ матрицей). Именно, $\langle x, y \rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p) x_i y_j$, где $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in$

$\in T_p(M^n)$. Гладкая функция g полностью определяет псевдориманову метрику.

Длина ds вектора $(dx_1, ..., dx_n)$ выражается квадратической дифференциальной формой

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j .$$

Длина кривой $\gamma : [0,1] \to M^n$ выражается формулой $\int\limits_\gamma \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j} =$

$= \int\limits_0^1 \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt$. В общем случае она может быть действительной, чисто мнимой или нулевой (*изотропная кривая*).

Псевдориманова метрика на M^n является метрикой с фиксированной, но неопределенной сигнатурой (p, q), $p + q = n$. Псевдориманова метрика является невырожденной, т.е. ее метрический определитель $\det((g_{ij})) \neq 0$. Поэтому она является **невырожденной неопределенной метрикой**.

Псевдориманово многообразие (или *псевдориманово пространство*) – действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное псевдоримановой метрикой. Теория псевдоримановых пространств называется *псевдоримановой геометрией*.

Моделью псевдориманова пространства с сигнатурой (p, q) является *псевдоевклидово пространство* $\mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n$ – действительное n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное метрическим тензором $((g_{ij}))$ с сигнатурой (p, q), заданным как $g_{11} = ... = g_{pp} = 1$, $g_{p+1,\, p+1} = ... = g_{nn} = -1$, $g_{ij} = 0$ для $i \neq j$. *Линейный элемент* соответствующей метрики задается как

$$ds^2 = dx_1^2 + ... + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - ... - dx_n^2 .$$

Лоренцева метрика

Лоренцева метрика (или **метрика Лоренца**) – псевдориманова метрика с сигнатурой $(1, p)$.

Лоренцевым многообразием называется многообразие, снабженное лоренцевой метрикой. В общей теории относительности принципиально предположение, что

пространство–время может моделироваться как лоренцево многообразие с сигнатурой (1, 3). Пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ с плоской **метрикой Минковского** является моделью лоренцева многообразия.

Метрика Оссермана–Лоренца

Метрикой Оссермана–Лоренца называется лоренцева метрика, для которой тензор римановой кривизны R является *оссермановым*. Это означает, что собственные значениия *оператора Якоби* $\mathcal{Y}(x)\colon y \to R(y,x)x$ не зависят от единичных векторов x.

Лоренцево многообразие будет *оссермановым* тогда и только тогда, когда оно является многообразием постоянной кривизны.

Метрика Бляшке

Метрика Бляшке на невырожденной гиперповерхности есть псевдориманова метрика, ассоциированная с аффинной нормалью вложения $\phi\colon M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, где M^n является n-мерным многообразием, а $\mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается как аффинное пространство.

Полуриманова метрика

Полуримановой метрикой на действительном n-мерном дифференцируемом многообразии M^n называется вырожденная риманова метрика, т.е. совокупность положительно полуопределенных *скалярных произведений* $\langle x,y\rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p)x_iy_j$ на касательных пространствах $T_p(M^n)$, $p \in M^n$; метрический определитель $\det((g_{ij})) = 0$.

Полуримановым многообразием (или *полуримановым пространством*) называется действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное полуримановой метрикой.

Моделью полуриманова многообразия является *полуевклидово пространство* $\mathbb{R}^n_d$, $d \geq 1$ (иногда обозначаемое как $\mathbb{R}^n_{n-d}$), т.е. действительное n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное полуримановой метрикой. Это означает, что существует некоторое скалярное произведение, такое что по отношению к надлежащим образом выбранному базису скалярное произведение $\langle x,x\rangle$ вектора на себя будет иметь вид $\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{n-d} x_i^2$. При этом $d \geq 1$ число называется *дефектом* (или *положительным дефицитом*) пространства.

Метрика Грушина

Метрикой Грушина называется полуриманова метрика на $\mathbb{R}^2$, задаваемая линейным элементом

$$ds^2 = dx_1^2 + \frac{\delta x_2^2}{x_1^2}.$$

Полупсевдориманова метрика

Полупсевдориманова метрика на действительном n-мерном дифференцируемом многообразии M^n – вырожденная псевдориманова метрика, т.е. совокупность вырожденных неопределенных *скалярных произведений* $\langle x,y\rangle_p = \sum_{i,j} g_{ij}(p)x_iy_j$ на

касательных пространствах $T_p(M^n)$, $p \in M^n$; метрический определитель $\det(g_{ij}) = 0$. Именно, полупсевдориманова метрика является **вырожденной неопределенной метрикой.**

Полупсевдоримановым многообразием (или *полупсевдоримановым пространством*) называется действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное полупсевдоримановой метрикой.

Моделью полупсевдориманова многообразия является *полупсевдоевклидово пространство* $\mathbb{R}^n_{\substack{l_1,\dots,l_r \\ m_1,\dots,m_{r-1}}}$, т.е. действительное n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное полупсевдоримановой метрикой. Это означает, что существует r скалярных произведений $\langle x,y\rangle_a = \sum \varepsilon_{i_a} x_{i_a} y_{i_a}$, где $a = 1, \dots, r$, $0 = m_0 < \dots < m_r = n$, $i_a = m_{a-1} + 1, \dots, m_a$, $\varepsilon_{i_a} = \pm 1$ и -1 среди чисел ε_{i_a} встречается l_a раз. Произведение $\langle x,y\rangle_a$ определено для тех векторов, для которых все координаты x_i, $i \le m_{a-1}$ или $i > m_a + 1$, равны нулю. Первый скалярный квадрат произвольного вектора x является вырожденной квадратичной формой $\langle x,x\rangle_1 = -\sum_{i=1}^{l_1} x_i^2 + \sum_{j=l_1+1}^{n-d} x_j^2$. Число $l_1 \ge 0$ называется *индексом*, а число $d = n - m_1$ – *дефектом* пространства. Если $l_1 = \dots = l_r = 0$, то мы получаем *полуевклидово пространство.* Пространства $\mathbb{R}^n_m$ и $\mathbb{R}^n_{k,l}$ и называются *квазиевклидовыми пространствами.*

Полупсевдонеевклидово пространство $\mathbb{S}^n_{\substack{l_1,\dots,l_r \\ m_1,\dots,m_{r-1}}}$ может быть определено как гиперсфера в пространстве $\mathbb{R}^n_{\substack{l_1,\dots,l_r \\ m_1,\dots,m_{r-1}}}$ с отождествленными антиподальными точками. Если $l_1 = \dots = l_r$, то пространство будет называться полуэллиптическим (или полунеевклидовым) пространством. Если существует , то пространство называется полугиперболическим пространством.

Финслерова метрика

Рассмотрим действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^N, в котором каждое касательное пространство $T_p(M^n)$, $p \in M^n$ снабжено банаховой нормой $\|\cdot\|$, такой что банахова норма как функция позиции, является гладкой и матрица (g_{ij}),

$$g_{ij} = g_{ij}(p,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \| x \|^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

является положительно определенной для любого $p \in M^n$ и любого $x \in T_p(M^n)$.

Финслеровой метрикой на M^n называется совокупность банаховых норм $\|\cdot\|$ на касательных пространствах T_pM^n, по одной для каждого $p \in M^n$. *Линейный элемент* этой метрики имеет форму

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j.$$

Финслерова метрика может задаваться как действительная положительно определенная выпуклая функция $F(p, x)$ координат точки $p \in M^n$ и компонент вектора

$x \in T_p(M^n)$, действующего в точке p. Функция $F(p, x)$ является положительно однородной первой степени в x: $F(p, \lambda x) = \lambda F(p, x)$ для каждого $\lambda > 0$. Значение $F(p, x)$ интерпретируется как длина вектора x. *Финслеров метрический тензор* имеет форму $(g_{ij}) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(p,x)}{\partial x_i dx_j} \right)$. Длина кривой $\gamma : [0,1] \to M^n$ задается как $\int_0^1 F\left(p, \frac{dp}{dt}\right) dt$. Для каждой фиксированной точки p финслеров метрический тензор в переменных x является римановым.

Финслерова метрика является обобщением римановой метрики, где общее определение длины $\| x \|$ вектора $x \in T_p(M^n)$ не обязательно задается в виде квадратного корня из симметричной билинейной формы, как это делается в римановом случае.

Финслерово многообразие (или *финслерово пространство*) – это действительное n-мерное дифференцируемое многообразие M^n, снабженное финслеровой метрикой. Теория финслеровых пространств называется *финслеровой геометрией.* Различие между *римановым* и *финслеровым* пространствами состоит в том, что первое локально ведет себя как евклидово пространство, а второе – как *пространство Минковского,* или, аналитически, в том, что эллипсоиду в римановом случае соответствует произвольная выпуклая поверхность, в качестве центра которой взято начало координат.

Обобщенным финслеровым пространством называется пространство с **внутренней метрикой**, на которую накладываются определенные ограничения в отношении поведения кратчайших кривых, т.е. кривых, длины которых равны расстоянию между их конечными точками. Такие пространства включают в себя **пространства геодезических**, финслеровы пространства и т.п. Обобщенные финслеровы пространства отличаются от финслеровых не только большей степенью обобщения, но и тем, что они определяются и исследуются с помощью метрики, без использования координат.

Метрика Кропиной

Метрикой Кропиной называется финслерова метрика F_{Kr} на вещественном n-мерном многообразии M^n, задаваемая как

$$\frac{\sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j}{\sum_i b_i(p) x_i}$$

для любых $p \in M^n$ и $x \in T_p(M^n)$, где (g_{ij}) – является риманов метрический тензоро и $b(p) = (b_i(p))$ – векторное поле.

Метрика Рандерса

Метрика Рандерса – финслерова метрика F_{Ra} на действительном n-мерном многообразии M^n, задаваемая как

$$\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} x_i x_j} + \sum_i b_i(p) x_i$$

для любых $p \in M^n$ и $x \in T_p(M^n)$, где (g_{ij}) – риманов метрический тензоро и $b(p) = (b_i(p))$ – векторное поле.

Метрика Клейна

Метрикой Клейна называется риманова метрика *на открытом единичном шаре* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \|_2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{\| y \|_2^2 - \left(\| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 \right)}}{1 - \| x \|_2^2}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle \ , \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$.

Метрика Функа

Метрикой Функа называется финслерова метрика F_{Ru} на *открытом единичном шаре* в $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{\| y \|_2^2 - \left(\| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 \right)} + \langle x, y \rangle}{1 - \| x \|_2^2}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle \ , \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$. Это – **проективная метрика.**

Метрика Шена

Для данного вектора $a \in \mathbb{R}^n$, $\| a \|_2 < 1$ **метрикой Шена** называется финслерова метрика F_{Sh} на *открытом единичном шаре* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \|_2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{\| y \|_2^2 - \left(\| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 \right)} + \langle x, y \rangle}{1 - \| x \|_2^2} + \frac{\langle a, y \rangle}{1 + \langle a, x \rangle}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle \ , \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$. Это – **проективная метрика**. При $a = 1$ она превращается в **метрику Функа.**

Метрика Бервальда

Метрикой Бервальда называется финслерова метрика F_{Be} на *открытом единичном шаре* $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \| x \|_2 < 1\}$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемая как

$$\frac{\left(\sqrt{\| y \|_2^2 - \left(\| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 \right)} + \langle x, y \rangle \right)}{\left(1 - \| x \|_2^2 \right)^2 \sqrt{\| y \|_2^2 - \left(\| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y \rangle^2 \right)}}$$

для любых $x \in B^n$ и $y \in T_x(B^n)$, где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^n$ и $\langle \ , \rangle$ – обычное *скалярное произведение* на $\mathbb{R}^n$. Это – **проективная метрика.**

В общем случае каждая финслерова метрика на многообразии M^n порождает *пульверизацию* (обычное однородное дифференциальное уравнение второго порядка) $y_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} - 2G^i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$, которой определяются геодезические. Финслерова метрика

называется **метрикой Бервальда,** если коэффициенты пульверизации $G^i = G^i(x, y)$ являются квадратичными по $y \in T_x(B^n)$ в любой точке $x \in M^n$, т.е. $G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y^i y^k$. Каждая метрика Бервальда аффинно эквивалентна некоторой римановой метрике.

Метрика Дугласа

Метрикой Дугласа называется финслерова метрика, для которой *коэффициенты пульверизации* $G^i = G^i(x, y)$ имеют вид

$$G^i = \frac{1}{2}\Gamma^i_{jk}(x)y_i y_k + P(x,y)y_i.$$

Каждая финслерова метрика, которая проективно эквивалентна **метрике Бервальда**, является метрикой Дугласа. Каждая известная метрика Дугласа является (локально) проективно эквивалентной метрике Бервальда.

Метрика Брайанта

Пусть α – угол с $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ и пусть для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$A = \| y \|_2^4 \sin^2 2\alpha + \left(\| y \|_2^2 \cos 2\alpha + \| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y\rangle^2\right)^2,$$

$$B = \| y \|_2^4 \cos 2\alpha + \| x \|_2^2 \| y \|_2^2 - \langle x, y\rangle^2,$$

$$C = \langle x, y\rangle \sin 2\alpha, \quad D = \| y \|_2^2 + 2 \| x \|_2^2 \cos 2\alpha + 1.$$

Тогда (**проективную**) финслерову метрику F мы получим как

$$\sqrt{\frac{\sqrt{A} + B}{2D} + \left(\frac{C}{D}\right)^2} + \frac{C}{D}.$$

На двумерной *единичной сфере* S^2 она называется **метрикой Брайанта.**

Метрика Кавагучи

Метрикой Кавагучи называется метрика на гладком n-мерном многообразии M^n, задаваемая элементом дуги ds регулярной кривой $x = x(t),\ t \in [t_0, t_1]$ и выраженная формулой

$$ds = F\left(x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^k x}{dt^k}\right)dt,$$

где *метрическая функция* F удовлетворяет условиям Цермело: $\sum_{x=1}^{k} sx^{(s)}F_{(s)i} = F$,

$\sum_{s=r}^{k}\binom{s}{k}x^{(s-r+1)i}F_{(s)i} = 0$, $x^{(s)i} = \frac{d^s x^i}{dt^s}$, $F_{(s)i} = \frac{\partial F}{\partial x^{(s)i}}$ и $r = 2, ..., k$. Этими условиями обеспечивается независимость элемента дуги ds от параметризации кривой $.x = x(t)$

Многообразие Кавагучи (или *пространство Кавагучи*) – это гладкое многообразие, снабженное метрикой Кавагучи. Оно является обобщением *финслерова многообразия.*

Суперметрика Де Витта

Суперметрикой **Де-Витта** (или *суперметрикой Уилера – Де-Витта*) $G = (G_{ijkl})$ называется обобщение римановой (или псевдоримановой) метрики $g = g(g_{ij})$, используемой для вычисления расстояний между точками данного многообразия, на случай расстояний между метриками на этом многообразии.

Точнее говоря, для данного связного гладкого трехмерного многообразия M^3 рассмотрим пространство $\mathcal{M}(M^3)$ всех римановых (или псевдоримановых) метрик на M^n. Идентифицируя точки $\mathcal{M}(M^3)$, связанное диффеоморфизмом M^3, можно получить пространство Geom(M^3) 3-*геометрий* (заданной топологии), точками которого являются классы диффеоморфно эквивалентных метрик. Пространство Geom(M^3) называется *суперпространством.* Оно играет важную роль в некоторых формулировках квантовой гравитации.

Суперметрикой, т.е. "метрикой метрик", называется метрика на $\mathcal{M}(M^3)$ (или на Geom(M^3)), используемая для измерения расстояний между метриками на M^3 (или между их классами эквивалентности). Если имеется метрика $g = (g_{ij}) \in \mathcal{M}(M^3)$, то

$$\| \delta g \|^2 = \int\limits_{M^3} d^3x G^{ijkl}(x)\delta g_{ij}(x)\delta g_{kl}(x).$$

где G^{ijkl} – величина, обратная **суперметрике Девитта**

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk} - \lambda g_{ij}g_{kl}).$$

Величина λ параметризует расстояние между метриками $\mathcal{M}(M^3)$ в и может принимать любые действительные значения, кроме $\lambda = \frac{2}{3}$, при котором суперметрика становится *сингулярной.*

Суперметрика Лунда–Реджи

Суперметрика Лунда–Реджи (или **симплициальная суперметрика**) является аналогом с**уперметрики Де-Витта** и используется для измерения расстояний между *симплициальными* 3-*геометриями* в *симплициальном пространстве конфигураций.*

Более точно, если имеется замкнутое симплициальное трехмерное многообразие M^3, состоящее из нескольких *тетраэдров* (т.е. трехмерных *симплексов*), то *симплициальная геометрия* на M^3 задается присвоением значений квадратов длин сторон элементами из M^3 и выведением во внутренности каждого тетраэдра плоской римановой геометрии, соответствующей этим значениям. Квадраты длин должны быть положительными и удовлетворять неравенствам треугольника и их аналогам для тетраэдров, т.е. все квадраты мер (длин, площадей, объемов) должны быть неотрицательными (см. **неравенство тетраэдра,** гл. 3). Множество $\mathcal{T}(M^3)$ всех симплициальных геометрий на M^3 называется *симплициальным пространством конфигураций.*

Суперметрика Лунда–Реджи (G_{mn}) на множестве $\mathcal{T}(M^3)$ порождается суперметрикой Девитта на $\mathcal{M}(M^3)$ с использованием для изображения точек в $\mathcal{T}(M^3)$ таких метрик в $\mathcal{M}(M^3)$, которые являются кусочно плоскими в тетраэдрах.

Суперметрики в доказательстве Перельмана

Предложенная У. Терстоном *гипотеза геометризации* предполагает, что после двух хорошо известных декомпозиций любое трехмерное многообразие допускает

в качестве остаточных компонент только одну из восьми *терстоновских модельных геометрий*. Если данная гипотеза верна, то отсюда следует справедливость знаменитой гипотезы Пуанкаре (1904) о том, что любое трехмерное многообразие, в котором каждая простая замкнутая кривая может быть непрерывно деформирована в точку, гомеоморфно трехмерной сфере.

В 2003 г. Перельман дал набросок доказательства гипотезы Терстона с использованием некой суперметрики на пространстве всех римановых метрик данного гладкого трехмерного многообразия. В потоке Риччи расстояния уменьшаются в направлении положительной кривизны, поскольку метрика зависима от времени. Модификация Перельмана стандартного потока Риччи позволила систематически удалять возникающие сингулярности.

7.2. РИМАНОВЫ МЕТРИКИ В ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Применительно к теории информации обычно используются специальные римановы метрики, перечень которых представлен ниже.

Информационная метрика Фишера

В статистике, теории вероятностей и информационной геометрии **информационной метрикой Фишера** (или **метрикой Фишера, метрикой Рао**) называется риманова метрика для статистического дифференциального многообразия (см., например, [Amar85], [Frie98]). В этом случае речь идет о придании свойств дифференциальной геометрии семейству классических плотностей распределения теории вероятностей.

Формально, пусть $p_\theta = p(x,\theta)$ – семейство плотностей, перенумерованных n параметрами $\theta = (\theta_1,...,\theta_n)$, которые образуют *параметрическое многообразие P*. **Информационной метрикой Фишера** $g = g_\theta$ на P называется риманова метрика, задаваемая *информационной матрицей Фишера* $((I(\theta)_{ij}))$, где

$$I(\theta)_{ij} = \mathbb{E}_\theta = \left[\frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \ln p_\theta}{\partial \theta_j} \right] = \int \frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial \theta_j} p(x,\theta) dx.$$

Это – симметричная билинейная форма, которая дает нам классическую меру (*меру Рао*) для статистической различимости параметров распределения. Полагая $i(x,\theta) = -\ln p(x,\theta)$, получим эквивалентное выражение

$$I(\theta)_{ij} = \mathbb{E}_\theta \left[\frac{\partial^2 i(x,\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] = \int \frac{\partial^2 i(x,\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} p(x,\theta) dx.$$

Без использования языка координат, получим

$$I(\theta)(u,v) = \mathbb{E}_\theta [u(\ln p_\theta) \cdot v(\ln p_\theta)],$$

где u и v – векторы, касательные к параметрическому многообразию P, а $u(\ln p_\theta) = \frac{d}{dt} \ln p_{\theta + tu | t=0}$ – производная от $\ln p_\theta$ по направлению u.

Многообразие распределения плотностей M является образом параметрического многообразия P при отображении $\theta \to p_\theta$ с некоторыми условиями

регулярности. Вектор u, касательный к данному многообразию, имеет вид $u = \frac{d}{dt} \ln p_{\theta+tu|t=0}$, и метрика Фишера $g = g_p$ на M, полученная из метрики g_θ на P, может быть записана в виде

$$g_p(u,v) = \mathbb{E}_p\left[\frac{u}{p} \cdot \frac{v}{p}\right].$$

Метрика Фишера и Рао

Пусть $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p > 0\}$ – симплекс строго положительных вероятностных векторов. Элемент $p \in \mathcal{P}_n$ является плотностью n-точечного множества $\{1, ..., n\}$ с $p(i) = p_i$. Элемент u касательного пространства $T_p(\mathcal{P}_n) = \{u \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} u_i = 0\}$ в точке $p \in \mathcal{P}_n$ есть функциея на множестве с $\{1, ..., n\}$ с $u(i) = u_i$.

Метрика Фишера Рао g_p на $\mathcal{P}_n$ является римановой метрикой, определяемой выражением

$$g_p(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i v_i}{p_i}$$

для любых $u, v \in T_p(\mathcal{P}_n)$, т.е. является **информационной метрикой Фишера** на $\mathcal{P}_n$. Метрика Фишера – Рао является единственной (с точностью до постоянного множителя) римановой метрикой на $\mathcal{P}_n$, сужаемой при стохастическом отображении ([Chen72]).

Метрика Фишера – Рао изометрична (см. отображение $p \to 2(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_n})$) стандартной метрике на открытом подмножестве сферы радиуса *два* в $\mathbb{R}^n$. Такое отождествление $\mathcal{P}_n$ позволяет получить на $\mathcal{P}_n$ **геодезическое расстояние**, называемое **расстоянием Фишера** (или **расстоянием Бхаттачарья 1**), посредством формулы

$$2 \arccos\left(\sum_i p_i^{1/2} q_i^{1/2}\right).$$

Метрика Фишера–Рао может быть расширена на множество $\mathcal{M}_n = \{p \in \mathbb{R}^n,\ p_i > 0\}$ всех конечных строго положительных мер на множестве $\{1, ..., n\}$. В этом случае геодезическое расстояние на $\mathcal{M}_n$ можно записать как

$$2\left(\sum_i \left(\sqrt{p_i} - \sqrt{q_i}\right)^2\right)^{1/2}$$

для любых $p, q \in \mathcal{M}_n$ (см. **Метрика Хеллинджера,** гл. 14).

Монотонная метрика

Пусть $\mathcal{M}_n$ будет множество всех комплексных $n \times n$ матриц, а $\mathcal{M} \subset M_n$ – многообразие всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц. Пусть

$\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{D} = \{\rho \in \mathcal{M} : \operatorname{Tr}\rho = 1\}$ – будет многообразие всех *матриц плотности.* Касательным пространством для $\mathcal{M}$ в точке $\rho \in \mathcal{M}$ является множество $T_p(\mathcal{M}) = \{x \in M_n : x = x^*\}$, т.е. множество всех *эрмитовых* $n \times n$ *матриц.* Касательное пространство $T_\rho(\mathcal{D})$ в точке $\rho \in \mathcal{D}$ есть подпространство бесследовых (т.е. имеющих нулевой след) матриц в $T_\rho(\mathcal{M})$.

Риманова метрика λ на $\mathcal{M}$ **называется монотонной** метрикой, если неравенство

$$\lambda_{h(\rho)}(h(u), h(u)) < \lambda_\rho(u, u)$$

выполняется для любых $\rho \in \mathcal{M}$, любых $u \in T_\rho(\mathcal{M})$ и любых вполне положительных сохраняющих следы отображений h, называемых *стохастическими отображениями.* В действительности ([Petz96]), λ является монотонной тогда и только тогда, когда ее можно представить как $\lambda_\rho(u, v) = \operatorname{Tr} u J_\rho(u, u)$, где J_ρ – оператор вида $J_\rho = \dfrac{1}{f(L_\rho / R_\rho)R_\rho}$. Здесь L_ρ и R_ρ – левый и правый операторы умножения, а f: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ – оператор монотонной функции, который симметричен, т.е. $f(t) = tf(t^{-1})$, и *нормирован,* т.е. $f(1) = 1$. $J_\rho(v) = \rho^{-1}v$, если v и ρ коммутируют между собой, т.е. любая монотонная метрика равна **информационной метрике Фишера** на коммутативных подмногообразиях. Следовательно, монотонные метрики являются обобщением информационной метрики Фишера на классе плотностей распределения (классический или коммутативный случай) на класс матриц плотности (квантовый или некоммутативный случай), применяемых в квантовой статистике и теории информации. Именно $\mathcal{D}$ является пространством точных состояний n-уровневой квантовой системы.

Монотонную метрику $\lambda_\rho(u, v \operatorname{Tr} u \dfrac{1}{f(L_\rho / R_\rho)R_\rho}(v)$ можно записать иначе как $\lambda_\rho(u, v) = \operatorname{Tr} uc(L_\rho R_\rho)(v)$, где функция $c(x, y) = \dfrac{1}{f(x/y)y}$ является функцией Морозова–Ченцова, относящейся к λ.

Метрика Буреса является наименьшей монотонной метрикой, полученной для $f(t) = \dfrac{1+i}{2}$ (для $c(x, y) = \dfrac{2}{x+y}$). В этом случае $J_\rho(v) = g$, $\rho g + g\rho = 2v$, есть *симметричная логарифмическая производная.*

Метрика правой логарифмической производной является наибольшей монотонной метрикой, соответствующей функции $f(t) = \dfrac{2t}{1+t}$ (функции $c(x, y) = \dfrac{x+y}{2xy}$). В этом случае $J_\rho(v) = \dfrac{1}{2}(\rho^{-1}v + v\rho^{-1})$ – *правая логарифмическая производная.*

Метрика Боголюбова–Кубо–Мори получается при $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ (при $c(x, y) = \dfrac{\ln x - \ln y}{x - y}$). Ее можно записать как $\lambda_\rho(u, v) = \dfrac{\partial^2}{\partial s \partial t} \operatorname{Tr}(\rho + su) ln(\rho + tv)\,|_{s,t=0}$.

Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона λ_ρ^α являются монотонными для $\alpha \in [-3,3]$. Для $\alpha = \pm 1$ получаем метрику Боголюбова–Кубо–Мори; для $\alpha = \pm 3$ получаем мет-

рику правой логарифмической производной. Наименьшей в семействе является метрика **Вигнера–Янасе–Дайсона**, полученная для $\alpha = 0$.

Метрика Буреса

Метрика Буреса (или **статистическая метрика**) есть монотонная метрика на многообразии $\mathcal{M}$ всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц, задаваемая выражением $\lambda_\rho(u,v) = \operatorname{Tr} u J_\rho(v)$, где $J_\rho(v) = g$, $\rho g + g\rho = 2v$, есть *симметричная логарифмическая производная.* Это наименьшая из монотонных метрик.

Для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ **расстояние Буреса,** т.е. **геодезическое расстояние,** определяемое метрикой Буреса, может быть представлено как

$$2\sqrt{\operatorname{Tr}\rho_1 + \operatorname{Tr}\rho_2 - 2\operatorname{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2\rho_1^{1/2}\right)^{1/2}}.$$

На подмногообразии $\mathcal{D} = \{\rho \in \mathcal{M} : \operatorname{Tr}\rho = 1\}$ матриц плотности оно имеет форму

$$2\arccos \operatorname{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right)^{1/2}.$$

Метрика правой логарифмической производной

Метрика правой логарифмической производной (или *RLD-метрика*) есть **монотонная метрика** на $\mathcal{M}$ многообразии всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц задаваемая уравнением

$$\lambda_\rho(u,v) = \operatorname{Tr} u J_\rho(v),$$

где $J_\rho(v) = \frac{1}{3}(\rho^{-1}v + v\rho^{-1})$ – *правая логарифмическая производная.* Это – наибольшая монотонная метрика.

Метрика Боголюбова–Кубо–Мори

Метрика Боголюбова-Кубо-Мори (или *BKM-метрика*) есть монотонная метрика на $\mathcal{M}$ многообразии всех комплексных положительно определенных $n \times n$ матриц, задаваемая уравнением

$$\lambda_\rho^\alpha(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \operatorname{Tr}\, f_\alpha(\rho + su)\ln(\rho + tv)\,|_{s,t=0}\,.$$

Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона

Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона (или *WYD-метрики*) образуют семейство метрик на многообразии $\mathcal{M}$ всех комплексных положительно определенных матриц, задаваемых уравнением

$$\lambda_\rho^\alpha(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \operatorname{Tr}\, f_\alpha(\rho + tu)\, f_{-\alpha}(\rho + sv)\,|_{s,t=0}\,.$$

где $f_\alpha(x) = \frac{2}{1-\alpha} x^{\frac{1-\alpha}{2}}$, если $\alpha \neq 1$, и $\ln x$, если $\alpha = 1$. Эти метрики будут монотонными для $\alpha \in [-3,3]$. Для $\alpha = \pm 1$ получим метрику **Боголюбова–Кубо–Мори**, а для $\alpha = \pm 3$ – **метрику правой логарифмической производной**.

Метрика Вигнера–Янасе (или *WY-метрика*) λ_ρ является метрикой Вигнера–Янасе–Дайсона λ_ρ^0, полученной для $\alpha = 0$. Ее можно записать как

$$\lambda_\rho(u, v) = 4 \operatorname{Tr} u\left(\sqrt{L_\rho} + \sqrt{R_\rho}\right)^2 (v),$$

и она является наименьшей метрикой семейства. Для любых $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$ **геодезическое расстояние,** задаваемое WY-метрикой, будет иметь вид

$$2\sqrt{\operatorname{Tr}\rho_1 + \operatorname{Tr}\rho_2 - 2\operatorname{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right)}.$$

На подмногообразии $\mathcal{D} = \{\rho \in \mathcal{M} : \operatorname{Tr}\rho = 1\}$ матриц плотности оно будет равно

$$2 \arccos \operatorname{Tr}\left(\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right).$$

Метрика Конна

Грубо говоря, **метрика Конна** – это обобщение (из пространства всех вероятностных мер множества X на *пространство состояний* любой унитальной C-алгебры) **метрики Канторовича, Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна**, заданной как **липшицево расстояние между мерами.**

Пусть M^n – гладкое n-мерное многообразие. Пусть $A = C^\infty(M^n)$ – (коммутативная) алгебра гладких комплекснозначных функций на M^n, представленных операторами умножения на гильбертовом пространстве $H = L^2(M^n, S)$ квадратично интегрируемых секций расслоения спиноров на M^n: $(f\xi)(p) = f(p)\xi(p)$ для всех $f \in A$ и всех $\xi \in H$. Пусть D – *оператор Дирака.* Пусть коммутатор $[D, f]$ для $f \in A$ есть *умножение Клиффорда* на градиент ∇f, такое что его оператор нормы $\|\cdot\|$ в H задается как $\|[D, f]\| = \sup_{p \in M^n} \|\nabla f\|$.

Метрикой Конна называется **внутренняя метрика** на M^n, задаваемая выражением

$$\sup_{f \in A_i \,|\, \|[D,f]\| \le 1} |f(p) - f(q)|.$$

Данное определение может быть применено также к дискретным пространствам и даже обобщено на "некоммутативные пространства" (*унитальные C^*-алгебры*). В частности, для помеченного связного локально конечного графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $\mathbf{V} = \{v_1, ..., v_n, ...\}$ метрика Конна задается как

$$\sup_{\|[D,f]\| = \|df\| \le 1} \left| f_{v_i} - f_{v_j} \right|$$

для любых $v_i, v_j \in V$, где $\left\{ f = \sum f_{v_i} v_i : \ \sum \left| f_{v_i} \right|^2 < \infty \right\}$ является множеством формальных сумм f, образующих гильбертово пространство, и $\|[D, f]\|$ определяется как $\|[D, f]\| = \sup \left(\sum_{k=1}^{\deg(v_1)} (f_{v_k} - f_{v_i}) \right)^{1/2}$.

7.3. ЭРМИТОВЫ МЕТРИКИ И ИХХ ОБОБЩЕНИЯ

Векторным расслоением называется такая геометрическая конструкция, в которой каждой точке топологического пространства M ставится в соответствие векторное пространство так, что все эти векторные пространства, "склеенные вместе", образуют другое топологическое пространство E. Непрерывное отображение π: $E \to M$ называется *проекцией* E на M. Для каждой точки $p \in M$ векторное пространство $\pi^{-1}(p)$ называется *элементарной нитью* векторного расслоения. *Действительным* (*комплексным*) *векторным расслоением* называется такое векторное расслоение π: $E \to M$, элементарные нити $\pi^{-1}(p)$, $p \in M$ которого являются действительными (комплексными) векторными пространствами.

В *действительном векторном расслоении* для каждой точки $p \in M$ элементарная нить $\pi^{-1}(p)$ локально выглядит как векторное пространство $\mathbb{R}^n$, т.е. имеется *открытая окрестность* U точки p, натуральное число n и гомеоморфизм φ: $U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$, такой что для всех $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ мы получаем $\pi(\varphi(x, v) = v$, и отображение $v \to \varphi(x, v)$ дает нам изоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и $\pi^{-1}(x)$. Множество U совместно с φ называется *локальной тривиализацией* расслоения. Если существует "глобальная тривиализация", то действительное векторное расслоение называется $\pi: M \times \mathbb{R}^n \to M$ *тривиальным*. Аналогичным образом в комплексном векторном расслоении для каждой точки $p \in M$ элементарная нить $\pi^{-1}(p)$ локально выглядит как векторное пространство $\mathbb{C}^n$. Основным примером комплексного векторного расслоения является тривиальное расслоение $\pi: U \times \mathbb{C}^n \to U$, где U – открытое подмножество множества $\mathbb{R}^k$.

Важными особыми случаями действительного векторного расслоения являются *касательное расслоение* $T(M^n)$ и *кокасательное расслоение* $T^*(M^n)$ *действительного n-мерного многообразия* $M^n_{\mathbb{R}} = M^n$. Важными особыми случаями комплексного векторного расслоения являются касательное расслоение и кокасательное расслоение *комплексного n-мерного многообразия.*

Именно, комплексное n–мерное многообразие $M^n_{\mathbb{C}}$ является топологическим пространством, в котором каждая точка обладает окрестностью, гомеоморфной открытому множеству n-мерного комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$, и имеется такой атлас карт, в котором смена координат между картами осуществляется аналитически. (Комплексное) касательное расслоение $T_{\mathbb{C}}(M^n_{\mathbb{C}})$ комплексного многообразия $M^n_{\mathbb{C}}$ есть векторное расслоение всех (комплексных) *касательных пространств* $M^n_{\mathbb{C}}$ в каждой точке $p \in M^n_{\mathbb{C}}$. Его можно получить как комплексификацию $T_{\mathbb{R}}(M^n_{\mathbb{R}}) \otimes \mathbb{C} = T(M^n) \otimes \mathbb{C}$ соответствующего действительного касательного расслоения, и оно будет называться *комплексифицированным касательным* расслоением $M^n_{\mathbb{C}}$. *Комплексифицированное кокасательное расслоение* $M^n_{\mathbb{C}}$ получается аналогичным образом как $T^*(M^n) \otimes \mathbb{C}$. Любое комплексное n-мерное многообразие $M^n_{\mathbb{C}} = M^n$ можно рассматривать как особый случай действительного $2n$-мерного многообразия, снабженного *комплексной структурой* на каждом касательном пространстве. *Комплексная структура* на действительном векторном пространстве V является структурой комплексного векторного пространства на V, которая совместима с первоначальной действительной структурой. Она полностью

определяется оператором умножения на число , роль которого может выполнять произвольное линейное преобразование $J: V \to V$, $J^2 = -id$, где *id* есть *тождественное отображение.*

Связь (или *ковариантная производная*) является способом определение производной векторного поля вдоль другого векторного поля в векторном расслоении. **Метрической связью** называется линейная связнь в векторном расслоении π: $E \to M$, снабженном билинейной формой в элементарных нитях, для которой параллельный перенос вдоль произвольной кусочно гладкой кривой в M сохраняет форму, т.е. *скалярное произведение* двух векторов не изменяется при параллельном переносе. Для случая невырожденной симметричной билинейной формы метрическая связь называется *евклидовой связью*. Для случая невырожденной антисимметричной билинейной формы метрическая связь называется симплектической связью.

Метрика расслоения

Метрикой расслоения называется метрика на векторном расслоении.

Эрмитова метрика

Эрмитовой метрикой на комплексном векторном расслоении π: $E \to M$ называется совокупность **эрмитовых скалярных произведений** (т.е. положительно определенных симметричных сескилинейных форм) на каждой элементарной нити $E_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in M$, которые гладко меняются с точкой p в M. Любое комплексное векторное расслоение имеет эрмитову метрику.

Основным примером векторного расслоения является тривиальное расслоение $\pi: U \times \mathbb{C}^n \to U$, где U – открытое множество в $\mathbb{R}^k$. В этом случае эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$ и, следовательно, эрмитова метрика на расслоении $\pi: U \times \mathbb{C}^n \to U$ задается выражением

$$\langle u, v \rangle = u^T H \overline{v},$$

где H – положительно определенная *эрмитова матрица*, т.е. комплексная $n \times n$ матрица, отвечающая условиям $H^* = \overline{H}^T = H$ и $\overline{v}^T H v > 0$ для всех $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. В простейшем случае мы получаем $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i$.

Важным особым случаем является эрмитова метрика h на комплексном многообразии M^n, т.е. на комплексифицированном касательном расслоении $T(M^n) \otimes \mathbb{C}$ многообразия M^n. Она является эрмитовым аналогом римановой метрики. В этом случае $h = g + iw$, где ее действительная часть g является римановой метрикой, а ее мнимая часть w – невырожденной антисимметричной билинейной формой, называемой *фундаментальной формой.* Здесь мы имеем и $g(J(x), J(y)) = g(x, y)$, $w(J(x), J(y)) = w(x, y)$ и $w(x, y) = g(x, J(y))$, где оператор J является оператором комплексной структуры на M^n, как правило, $J(x) = ix$. Любая из форм g, w полностью определяет h. Термин "эрмитова метрика" относится также и к соответствующей римановой метрике g, которая придает многообразию эрмитову M^n структуру.

На комплексном многообразии эрмитову метрику h можно выразить в локальных координатах через эрмитов симметричный тензор $((h_{ij}))$:

$$h = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\overline{z}_j,$$

где $((h_{ij}))$ является положительно определенной эрмитовой матрицей. Тогда соответствующая фундаментальная форма w примет вид $w = \frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j$.

Эрмитовым многообразием (или *эрмитовым пространством*) называется комплексное многообразие, снабженное эрмитовой метрикой.

Метрика Кехлера

Метрикой Кехлера (или *кехлеровой метрикой*) называется эрмитова метрика $h = g + iw$ на комплексном многообразии M^n, фундаментальная форма w которой является *замкнутой,* т.е. удовлетворяет условию $dw = 0$. *Кэлерово многообразие* является комплексным многообразием, снабженным кэлеровой метрикой.

Если h выражена в локальных координатах, т.е. $h = \sum_{i,j} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j$, то соответствующую форму w можно записать как $w = \frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$, где $\wedge$ является антисимметричным *V-произведением*, т.е. $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ (следовательно, $dx \wedge dx = 0$). Именно, w является *дифференциальной 2-формой* на M^n, т.е. тензором второго порядка, антисимметричным относительно перестановки любой пары индексов: $w = \sum_{i,j} f_{ij} h_{ij} dx^i \wedge dx^i$, где f_{ij} есть функция на M^n. В*нешняя производная dw* формы w задается как $dw = \sum_{i,j}\sum_{k} \frac{\partial f_{ij}}{dx_k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_k$. Если $dw = 0$, то w является *симплектической* (т.е. замкнутой невырожденной) дифференциальной 2-формой. Такие дифференциальные 2-формы называются *формами Кехлера.*

Термин "**метрика Кехлера**" можно отнести также и к соответствующей римановой метрике g, которая придает многообразию M^n кехлерову структуру. Тогда многообразие Кехлера определяется как комплексное многообразие, снабженное римановой метрикой и кэлеровой формой на соответствующем действительном многообразии.

Метрика Хессе

Для гладкой функции f на открытом подмножестве действительного векторного пространства соответствующая метрика Хессе определяется как

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Метрику Хессе называют также **аффинной метрикой Кехлера,** поскольку метрика Кехлера на комплексном многообразии имеет аналогичное описание вида $\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$.

Метрика Калаби–Яо

Метрикой Калаби–Яо называется **метрика Кехлера,** которая **является Риччи-плоской.**

Многообразие Калаби–Яо (или *пространство Калаби–Яо*) – односвязное комплексное многообразие, снабженное метрикой Калаби–Яо. Его можно рассмат-

ривать как $2n$–мерное (шестимерный случай представляет особый интерес) гладкое многообразие с группой голономии (т.е. множеством линейных преобразований касательных векторов, проистекающих из параллельного переноса вдоль замкнутых контуров) в специальной унитарной группе.

Метрика Кехлера–Эйнштейна

Метрика Кехлера–Эйнштейна (или **метрика Эйнштейна**) – **метрика Кехлера** на комплексном многообразии M^n, у которой *тензор кривизны Риччи* пропорционален метрическому тензору. Эта пропорциональность является аналогом *уравнения поля Эйнштейна* в общей теории относительности.

Многообразием Кехлера–Эйнштейна (или *многообразием Эйнштейна*) называется комплексное многообразие, снабженное метрикой Кехлера–Эйнштейна. В этом случае тензор кривизны Риччи, рассматриваемый как оператор на касательном пространстве, является умножением на константу.

Такая метрика существует на любой *области* $D \subset \mathbb{C}^n$, которая является ограниченной и *псевдовыпуклой.* Ее можно задать *линейным элементом*

$$ds^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i d\bar{z}_j,$$

где u есть решение *краевой задачи*: $\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) = e^{2u}$ на D, и на $u = \infty$ на ∂D.

Метрика Кехлера–Эйнштейна является полной метрикой. На единичном диске $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ она совпадает с **метрикой Пуанкаре.**

Метрика Ходжа

Метрика Ходжа – метрика Кехлера, *фундаментальная форма w* которой определяет интегральный класс когомологий или, эквивалентно, имеет интегральные периоды.

Многообразие Ходжа – комплексное многообразие, снабженное метрикой Ходжа. Компактное комплексное многообразие является многообразием Ходжа тогда и только тогда, когда оно изоморфно гладкому алгебраическому подмногообразию некоторого комплексного проективного пространства.

Метрика Фубини–Штуди

Метрика Фубини–Штуди – метрика Кехлера на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, определяемая через э*рмитово скалярное произведение* $\langle\ ,\ \rangle$в $\mathbb{C}^{n+1}$. Она задается *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{\langle x, x\rangle\langle dx, dx\rangle - \langle x, d\bar{x}\rangle\langle \bar{x}, dx\rangle}{\langle x, x\rangle^2}.$$

Расстояние между двумя точками $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$, $(y_1 : \ldots : y_{n+1}) \in \mathbb{C}P^n$, где $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}), y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbf{C}n\backslash\{0\}$, равно

$$\arccos \frac{|\langle x, y\rangle|}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}}.$$

Метрика Фубини–Штуди является **метрикой Ходжа.** Пространство $\mathbb{C}P^n$, снабженное метрикой Фубини–Штуди, называется эрмитовым эллиптическим пространством (см. **Эрмитова эллиптическая метрика**).

Метрика Бергмана

Метрикой Бергмана называется **метрика Кехлера** на ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, задаваемая *линейным элементом*

$$ds^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \ln K(z,z)}{\partial z_i \partial z_j} dz_i d\bar{z}_j,$$

где $K(z, u)$ является *функцией ядра Бергмана.* Метрика Бергмана инвариантна относительно автоморфизмов области D; она является полной, если область D однородна. Для *единичного диска* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ метрика Бергмана совпадает с **метрикой Пуанкаре** (см. также ***p*-метрика Бергмана**, гл. 13).

Функция ядра Бергмана определяется следующим образом: рассмотрим область $D \subset \mathbb{C}^n$, в которой существуют аналитические функции $f \neq 0$ класса $L_2(D)$ по отношению к лебеговой мере; множество этих функций образует гильбертово пространство $L_{2,a}(D) \subset L_2(D)$ с ортогональным базисом $(\phi_i)_i$; *функция ядра Бергмана* в области $D \times D \subset \mathbb{C}^{2n}$ задается как $K_D(z,u) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\phi_i(u)}$.

Гиперкехлерова метрика

Гиперкехлеровой метрикой называется риманова метрика g на $4n$-мерном *римановом многообразии,* совместимая с кватернионной структурой на касательном расслоении многообразия. Именно, метрика g является метрикой Кехлера по отношению к трем структурам Кехлера (I, w_I, g), (J, w_J, g) и (K, w_K, g), соответствующим комплексным структурам, как эндоморфизмам касательного расслоения, которые отвечают условиям кватернионной взаимосвязи

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -JIK = -1.$$

Гиперкехлеровым многообразием называется риманово многообразие, снабженное гиперкехлеровой метрикой. Это – особый случай многообразия Кехлера. Все гиперкехлеровы многообразия являются Риччи-плоскими. Компактные четырехмерные гиперкехлеровы многообразия называются K_3-*поверхностями* и изучаются в алгебраической геометрии.

Метрика Калаби

Метрика Калаби – гиперкехлерова метрика на кокасательном расслоении $T^*(\mathbb{C}P^{n+1})$ *комплексного проективного пространства* $\mathbb{C}P^{n+1}$. Для $n = 4k + 4$ эта метрика может быть задана *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-r^{-1}} + \frac{1}{4} r^2 (1-r^{-4}) \lambda^2 + r^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) + \frac{1}{2}(r^2-1)(\sigma_{1\alpha}^2 + \sigma_{2\alpha}^2) + \frac{1}{2}(r^2+1)\left(\sum_{1\alpha}^{2} + \sum_{2\alpha}^{2} \right),$$

где $\left(\lambda, \nu_1, \nu_2, \sigma_{1\alpha}, \sigma_{2\alpha}, \sum\sum_{1\alpha\ 2\alpha} \right)$ с α, пробегающим k значений, являются левоинвариантными *1-формами* (т.е. линейными действительными функциями) на смежном классе $SU(k + 2)/U(k)$. Здесь является *унитарной группой*, состоящей из комплексных $k \times k$ *унитарных матриц*, а $SU(k)$ – *специальной унитарной группой* с определителем 1.

Для $k = 0$ метрика Калаби и **метрика Эугучи–Хэнсона** совпадают.

Метрика Стензеля

Метрикой Стензеля называется гиперкехлерова метрика на кокасательном расслоении $T^*(S^{n+1})$ сферы S^{n+1}.

***SO*(3)-инвариантная метрика**

***SO*(3)-инвариантной метрикой** называется 4-мерная гиперкехлерова метрика с *линейным элементом*, заданным в формализме Бианки-IX как

$$ds^2 = f^2(t)dt^2 + \sigma^2(t)\sigma_1^2 + b^2(t)\sigma_2^2 + c^2(t)\sigma_3^2,$$

где инвариантные *1-формы* σ_1, σ_2, σ_3, из $SO(3)$ выражены в терминах *углов Эйлера* θ, ψ, ϕ как $\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sin\psi d\theta - \sin\theta\cos\psi d\phi)$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\cos\psi d\theta + \sin\theta\sin\psi d\phi)$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}(d\psi + son\theta d\phi)$ и нормализация выбрана так, что $\sigma_1 \wedge \sigma_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}d\sigma_k$. Координату t всегда можно выбрать с использованием соответствующей перепараметризации так, что $f(t) = \frac{1}{2}abc$.

Метрика Атья–Хитчина

Метрика Атья–Хитчина является полной регулярной *SO*(3)-инвариантной метрикой с *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{1}{4}a^2b^2c^2\left(\frac{dk}{k(1-k^2)K^2}\right)^2 + a^2(k)\sigma_1^2 + b^2(k)\sigma_2^2 + c^2(k)\sigma_3^2,$$

где a, b, c – функции от k, $ab = -K(k)(E(k) - K(k))$, $bc = -K(k)(E(k) - (1 - k^2)K(k))$, $ac = -K(k)(E(k)$ и $K(k)$, $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с $0 < k < 1$. Координата t задается по формуле $t = \frac{2K(1-k^2)}{\pi K(k)}$ с точностью до аддитивной постоянной.

Метрика Тауба-NUT

Метрикой Тауба-NUT называется **полная регулярная *SO*(3)-инвариантная метрика** с *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{1}{4}\frac{r+m}{r-m}dr^2 + (r^2 - m^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + 4m^2\frac{r-m}{r+m}\sigma_3^2,$$

где m – соответствующий модульный параметр, координата r связана с t формулой $r = m + \frac{1}{2mt}$.

Метрика Эугучи и Хэнсона

Метрикой Эугучи–Хэнсона называется **полная регулярная *SO*(3)-инвариантная метрика** с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{a}{r}\right)^4} + r^2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)\sigma_3^2\right),$$

где α – модульный параметр, координата r связана с координатой t формулой $r_2 = a^2 \coth(a^2 t)$.

Метрика Эугучи–Хэнсона совпадает с четырехмерной **метрикой Калаби.**

Комплексная финслерова метрика

Комплексной финслеровой метрикой называется полунепрерывная сверху функция $F : T(M^*) \to \mathbb{R}_+$ на комплексном многообразии M^n с аналитическим касательным расслоением $T(M^n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. F^2 является гладкой на $\breve{M}^n$,, где $\breve{M}^n$ – дополнение (в $T(M^n)$) нулевого сечения.
2. $F(p, x) > 0$ для всех и $p \in M^n$ и .

$$x \in M_p^n.$$

3. $F(p, \lambda x) = |\lambda| F(p, x)$ для всех $p \in M^n$, $x \in T_p(M^n)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Функция $G = F^2$ может быть локально выражена в терминах координат $(p_1, ..., p_n, x_1, ..., x_n)$; *финслеров метрический тензор* комплексной финслеровой метрики задается матрицей $((G_{ij})) = \left(\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2 \partial x_i \partial}{\partial x_i \partial \overline{x}_j} \right) \right)$, называемой *матрицей Леви.*

Если матрица $((G_{ij}))$ является положительно определенной, то комплексная финслерова метрика F называется *строго псевдовыпуклой.*

Полуметрика, уменьшающая расстояния

Пусть d – полуметрика, заданная на некотором классе $\mathcal{M}$ комплексных многообразий, содержащем *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Она называется **полуметрикой, уменьшающей расстояния** для всех аналитических отображений, если для любого аналитического отображения $f : M_1 \to M_2, M_1, M_2 \in \mathcal{M}$ неравенство $d(f(p), f(q)) \le d(p, q)$ справедливо для всех $p, q \in M_1$ (см. **Метрика Кобайаши, Метрика Каратеодори, Метрика Ву**).

Метрика Кобайаши

Пусть **D** – *область* в $\mathbb{C}^n$. Пусть $\mathcal{O}(\Delta, D)$ – множество всех аналитических отображений f: $\Delta \to D$, где $\Delta = \{z \in \mathbb{C} | z| < 1\}$ – *единичный диск.*

Метрика Кобайаши (или **метрика Кобайаши – Ройдена**) F_K есть комплексная финслерова метрика, заданная как

$$F_K(z,u) = \inf\{\alpha > 0 : \exists f \in \mathcal{O}(\Delta, D),\ f(0) = z, \alpha f'(0) = u\}$$

для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она является обобщением **метрики Пуанкаре** на многомерные области. $F_K(z,u) \ge F_C(z,u)$, где F_C – **метрика Каратеодори.** Если D выпукла и $d(z,u) = \inf\left\{\lambda : z + \frac{u}{\alpha} \in D, \text{ если } |\alpha| > \lambda\right\}$, то $\frac{d(z,u)}{2} \le F_K(z,u) = F_C(z,u) \le$ $\le d(z,u)$.

Для комплексного многообразия M^n **полуметрика Кобайаши** задается как $F_K(p,u) = \inf\{\alpha > 0 : \exists f \in \mathcal{O}(\Delta, M^n),\ f(0) = p, \alpha f'(0) = u\}$ для всех $p \in M^n$ и $u \in T_p(M^n)$. $F_K(p, u)$ является полунормой касательного вектора u, называемой *полунормой Кобайаши.* F_K будет метрикой, если многообразие M^n *тугое,* т.е. $\mathcal{O}(\Delta, M^n)$ является *нормальным семейством.*

Полуметрика Кобайаши является бесконечно малой формой так называемого **полурасстояния Кобайаши** (или *псевдорасстояния Кобайаши*) K_{M^n} на M^n, которое определяется следующим образом. Для заданных $p, q \in M^n$ *цепь дисков* α от p до q есть семейство точек $p = p^0, p^1, ..., p^k = q$ из M^n, пар точек $a^1, b^1; ...; a^k, b^k$ единичного диска Δ и аналитических отображений $f_1, ..., f_k$ из Δ в M^n, таких что $f_j(a^j) = p^{j-1}$ и $f_j(b^j) = p^j$ для всех j. *Длина* $l(\alpha)$ цепи α равна $d_p(a^1, b^1) + ... + d_p(a^k, b^k)$, где d_p есть метрика Пуанкаре. Полурасстояние Кобайаши K_{M^n} на M^n – это полуметрика на M^n, заданная как

$$K_{M^n}(p, q) = \inf_{\alpha} l(\alpha),$$

где инфимум взят по всем длинам $l(\alpha)$ цепей дисков α от p до q.

Полурасстояние Кобайаши является **уменьшающим расстояния** для всех аналитических отображений. Это наибольшая из всех полуметрик на M^n, которые являются уменьшающими расстояния для всех аналитических отображений из Δ в M^n, где расстояния на Δ измеряются в метрике Пуанкаре. K_Δ совпадает с метрикой Пуанкаре, а $K_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$.

Многообразие называется *гиперболическим по Кобайаши,* если полурасстояние Кобайаши является на нем метрикой. Многообразие будет гиперболическим по Кобайаши тогда и только тогда, когда оно биголоморфно ограниченной однородной области.

Метрика Кобайаши–Буземана

Полуметрикой Кобайаши–Буземана на комплексном многообразии M^n называется дважды двойственный образ **полуметрики Кобайаши** на M^n. Она является метрикой, если M^n – *тугое* многообразие.

Метрика Каратеодори

Пусть D будет область в $\mathbb{C}^n$, и $\mathbb{O}(D, \Delta)$ – множество всех аналитических отображений f: $D \to \Delta$, где $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid z| < 1\}$ – *единичный диск.*

Метрикой Каратеодори F_C называется **комплексная финслерова метрика,** заданная как

$$F_C(z, u) = \sup\left\{\left|f'(z)u\right| : \ f \in \mathbb{O}(D, \Delta)\right\}$$

для любых $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она является обобщением **метрики Пуанкаре** на многомерные области. $F_C(z, u) \le F_K(z, u)$, где F_K – метрика Кобайаши. Если D выпукла и

$$d(z, u) = \inf\left\{\lambda : z + \frac{u}{\alpha} \in D, \ \text{если} \ |\alpha| > \lambda\right\}, \ \text{то} \ \frac{d(z, u)}{2} \le F_C(z, u) = F_K(z, u) \le d(z, u).$$

Для комплексного многообразия M^n **полуметрика Каратеодори** F_C определяется как

$$F_C(p, u) = \sup\left\{\left|f'(p)u\right| : f \in \mathbb{O}(M^n, \Delta)\right\}$$

для всех $p \in M^n$ и $u \in T_p(M^n)$. F_C является метрикой, если M^n – тугое.

Полурасстояние Каратеодори (или *псевдорасстояние Каратеодори*) C_M является полуметрикой на комплексном многообразии M^n, заданной как

$$C_{M^n}(p, q) = \sup\left\{d_P(f(p), f(q)) : f \in \mathbb{O}(M^n, \Delta)\right\},$$

где d_P – **метрика Пуанкаре.** В общем случае интегральная полуметрика для бесконечно малой формы полуметрики Каратеодори **является** внутренней для полурасстояния Каратеодори, но не совпадает с ним.

Полурасстояние Каратеодори является **уменьшающим расстояния** для всех аналитических отображений. Это наименьшая полуметрика, уменьшающая расстояния. C_Δ совпадает с метрикой Пуанкаре, а $C_{C^n} \equiv 0$.

Метрика Азукавы

Пусть D – *область* в C^n. Пусть $g_D(z,u) = \sup\{f(u) : f \in K_D(z)\}$, где $K_D(z)$ – множество всех *логарифмически плюрисубгармонических функций* f: $D \to [0,1)$, таких что существуют M, $r > 0$ с $F(u) \le M\| u - z \|_2$ для всех $u \in B(z,r) \subset D$:; здесь $\| \cdot \|$ – l_2-норма на $\mathbb{C}^n$, а $B(z,r) = \{x \in \mathbb{C}^n : \| z - x_2 \|_2 < r\}$.

Метрика Азукавы (в общем случае, полуметрика) F_A есть **комплексная финслеровая метрика,** определяемая как

$$F_A(z,u) = \lim_{\lambda \to 0} \sup \frac{1}{|\lambda|} g_D(z, z+\lambda)$$

для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она "лежит между" **метрикой Каратеодори** F_C и **метрикой Кобайаши** $F_K : F_C(z,u) \le F_A(z,u) \le F_K(z,u)$ для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Если область D выпукла, то все эти метрики совпадают.

Метрика Азукавы является бесконечно малой формой так называемого **полурасстояния Азукавы.**

Метрика Сибони

Пусть D – *область* в C^n. Пусть $K_D(z)$ – множество всех *логарифмически плюрисубгармонических функций* f: $D \to [0,1)$, таких что существуют M, $r > 0$ с $f(u) \le M \| u - z \|_2$ для всех $u \in B(z,r) \subset D$; здесь $\| \cdot \|_2$ – l_2-норма на $\mathbb{C}^n$, а $B(z,r) = \{x \in \mathbb{C}^n : \| z - x \|_2 < r\}$. Пусть $C^2_{\text{loc}}(z)$ – множество всех функций класса C^2 в некоторой открытой окрестности точки z.

Метрика Сибони (в общем случае, полуметрика) F_S есть **комплексная финслерова метрика,** задаваемая уравнением

$$F_S(z,u) = \sup_{f \in K_D(z) \cap C^2_{\text{loc}}(z)} \sqrt{\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z) u_i \bar{u}_j}$$

для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$. Она "лежит между" **метрикой Каратеодори** F_C и **метрикой Кобайаши** $F_K : F_C(z,u) \le F_S(z,u) \le F_A(z,u) \le F_K(z,u)$ для всех $z \in D$ и $u \in \mathbb{C}^n$, где F_A есть **метрика Азукавы.** Если область D выпукла, то все эти метрики совпадают.

Метрика Сибони является бесконечно малой формой так называемого **полурасстояния Сибони.**

Метрика Ву

Метрикой Ву W_{M^n} называется полунепрерывная сверху эрмитова метрика на комплексном многообразии M^n, которая является **уменьшающей расстояния** для всех аналитических отображений. Именно, для двух n-мерных комплексных много-

образий M_1^n и M_2^n и $W_{M_2^n}(f(p), f(q) \le \sqrt{n} W_{M_1^n}(p,q)$ неравенство выполняется для всех $p,q \in M_1^n$.

Инвариантные метрики, включая метрики Каратеодори, Кобайаши, Бергмана и Кехлера–Эйнштейна, играют важную роль в теории комплексных функций и выпуклой геометрии. Метрики Каратеодори и Кобайаши применяются в основном из-за свойства уменьшения расстояния, но они почти никогда не являются эрмитовыми метриками. С другой стороны, метрика Бергмана и метрика Кехлера–Эйнштейна являются эрмитовыми (более того, метриками Кехлера), однако обычно они не являются метриками, уменьшающими расстояния.

Метрика Тейхмюллера

Римановой поверхностью R называется одномерное комплексное многообразие. Две римановы поверхности R_1 и R_2 называются *конформно эквивалентными,* если существует биективная аналитическая функция (т.е. конформный гомеоморфизм) из R_1 в R_2. Точнее, рассмотрим замкнутую риманову поверхность R_0 данного *рода* $g \ge 2$. Для замкнутой римановой поверхности R рода построим пару (R, f), где f: $R_0 \to R$ – гомеоморфизм. Две пары (R, f) и (R_1, f_1) называются конформно эквивалентными, если существует конформный гомеоморфизм h: $R \to R_1$, такой что отображение $(f_1)^{-1} \cdot h \cdot f : R_0 \to R_0$ гомотопно тождественному отображению.

Абстрактная риманова поверхность $R^* = (R, f)^*$ – это класс эквивалентности всех римановых поверхностей, конформно эквивалентных R. Множество всех классов эквивалентности называется *пространством Тейхмюллера* $T(R_0)$ поверхности R_0. Для замкнутых поверхностей R_0 данного рода g пространства $T(R_0)$ являются изометрически изоморфными, что позволяет говорить о пространстве *Тейхмюллера* T_g пространств ода g. T_g есть комплексное многообразие. Если R_0 получено из компактной поверхности рода $g \ge 2$ посредством удаления n точек, то комплексная размерность T_g равна $3g - 3 + n$.

Метрика Тейхмюллера – это метрика на T_g, определенная как

$$\frac{1}{2} \inf_h \ln K(h)$$

для любых $R_1^*, R_2^* \in T_g$, где $h : R_1 \to R_2$ есть квазиконформный гомеоморфизм, гомотопический тождественному отображению, а $K(h)$ – *максимальне растяжение для h*. Именно, существует единственное экстремальное отображение, называемое *отображением Тейхмюллера,* которое минимизирует максимальное растяжение для всех таких h, и расстояние между R_1^* и R_2^* равно $\frac{1}{2} \ln K$, где константа K является растяжением отображения Тейхмюллера.

В терминах *экстремальной длины* $\mathrm{ext}_{R^*}(\gamma)$ расстояние между R_1^* и R_2^* можно записать как

$$\frac{1}{2} \ln \sup_\gamma \frac{\mathrm{ext}_{R_1^*}(\gamma)}{\mathrm{ext}_{R_2^*}(\gamma)},$$

где супремум грань берется по всем простым замкнутым кривым на R_0.

Пространство Тейхмюллера T_g с метрикой Тейхмюллера на нем является **геодезическим** метрическим пространством (более того, **прямым G-пространством**), однако оно не является ни гиперболическим по Громову, ни **глобально неотрицательно искривленным по Буземану**.

Квазиметрика Терстона на *пространстве Тейхмюллера* T_g задается как

$$\frac{1}{2}\inf_h \ln \| h \|_{\mathrm{Lip}}$$

для любых $R_1^*, R_2^* \in T_g$, где $h: R_1 \to R_2$ – квазиконформный гомеоморфизм, гомотопический тождественному отображению, а $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ – *липшицева норма* на множестве всех инъективных функций $f: X \to Y$, задаваемая как $\| f \|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{x,y \in X, x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}$.

Пространство модулей R_g конформных классов римановых поверхностей рода g получается путем факторизации T_g некоторой счетной группой его автоморфизмов, называемой *модулярной группой*. Примерами метрик, связанных с модулями и пространствами Тейхмюллера, помимо метрики Тейхмюллера, являются **метрика Вейля-Петерсона, метрика Квилена, метрика Каратеодори, метрика Кобайаши, метрика Бергмана**, *метрика Чен Ян Мока, метрика Макмуллена, асимптотическая метрика Пуанкаре, метрика Риччи, возмущенная метрика Риччи, VHS-метрика.*

Метрика Вейля–Петерсона

Метрикой Вейля–Петерсона называется **метрика Кехлера** на пространстве Тейхмюллера $T_{g,n}$ абстрактных римановых поверхностей рода g с n разрывами и отрицательной эйлеровой характеристикой.

Метрика Вайля–Петерсона является **гиперболической по Громову** тогда и только тогда, когда (Брок и Фарб, 2006) комплексная размерность $3g - 3 + n$ пространства $T_{g,n}$ не больше, чем 2.

Метрика Гиббонса–Мантона

Метрика Гиббонса–Мантона является $4n$-мерной **гиперкехлеровой метрикой** на пространстве модулей n-монополей при допущении изометрического действия n-мерного тора T^n. Она может быть также описана с помощью гиперкехлеровой факторизации плоского кватернионного векторного пространства.

Метрика Замолодчикова

Метрикой Замолодчикова называется метрика на пространстве модулей двумерных конформных теорий поля.

Метрики на детерминантных прямых

Пусть M^n – n-мерное компактное гладким многообразие, а F – плоское векторное расслоение на M^n. Пусть $H^\bullet(M^n, F) = \otimes_{i=0}^n H^i(M^n, F)$ – *когомология де Рама многообразия* M^n с коэффициентами из F. Для n-мерного векторного пространства V его детерминантная прямая $\det V$ определяется как верхняя внешняя степень V, т.е. $\det V = \wedge^n V$. Для конечномерного градуированного векторного пространства $V = \otimes_{i=0}^n V_i$ детерминантная прямая пространства V задается как тензорное произведение $\det V = \otimes_{i=0}^n (\det V_i)^{(-1)^i}$. Следовательно, детерминантную прямую

$\det H^{\cdot}(M^n, F)$ когомологии $H^{\cdot}(M^n, F)$ можно записать как $\det H^{\cdot}(M^n, F) = \otimes_{i=0}^{n} (\det H^i(M^n, F))^{(-1)^i}$.

Метрикой Рейдемейстера называется метрика на $H^{\cdot}(M^n, F)$, определяемая заданной гладкой триангуляцией многообразия M^n и классическим кручением Рейдемейстера–Франца.

Пусть g^F и $g^{T(M^n)}$ – будут гладкие метрики на векторном расслоении F и касательном расслоении $T(M^n)$ соответственно. Эти метрики порождают каноническую L^2-**метрику** $h^{H^*(M^n, F)}$ на $H^{\cdot}(M^n, F)$. **Метрика Рэя–Синглера** на $\det H^{\cdot}(M^n, F)$ может быть определена как произведение метрики, порожденной на $\det H^{\cdot}(M^n, F)$ метрикой $h^{H^{\cdot}(M^n, F)}$, и аналитического *кручения Рэя–Синглера.* **Метрику Милнора** на $\det H^{\cdot}(M^n, F)$ можно определить аналогичным способом, используя *аналитическое кручение Милнора.* Если g^F плоская, то обе приведенные выше метрики совпадают с метрикой Рейдемейстера. Применив коэйлерову структуру, можно определить *модифицированную метрику Рэя–Синглера* на $\det H^{\cdot}(M^n, F)$.

Метрикой Пуанкаре–Рейдемейстера называется метрика на когомологической детерминантной прямой $\det H^{\cdot}(M^n, F)$ замкнутого связного ориентированного нечетномерного многообразия M^n. Ее можно построить, комбинируя деформацию Рейдемейстера с двойственностью Пуанкаре. Точно так же можно задать скалярное произведение Пуанкаре–Рейдемейстера на $\det H^{\cdot}(M^n, F)$,, которое полностью определяет метрику Пуанкаре–Рейдемейстера, но содержит дополнительный знак или фазовую информацию.

Метрикой Квилена называется метрика на прообразе когомологической детерминантной прямой компактного эрмитова одномерного комплексного многообразия. Ее можно задать как произведение L^2-метрики и аналитического кручения Рэя–Синглера.

Суперметрика Кехлера

Суперметрика Кехлера – обобщение метрики Кехлера на *супермногообразие. Супермногообразие* есть обобщение обычного многообразия с использованием *фермионных,* а также *бозонных* координат. Бозонные координаты – обычные числа, в то время как фермионные координаты являются *грассмановыми числами.*

Метрика Хофера

Симплектическим многообразием (M^n, w), $n = 2k$ называется гладкое четномерное многообразие M^n, снабженное *симплектической формой*, т.е. замкнутой невырожденной 2-формой w.

Лагранжевым многообразием называется k-мерное гладкое подмногообразие L^k симплектического многообразия (M^n, w), $n = 2k$, такое что форма w тождественно равна нулю на L^k, т.е. для любого $p \in L^k$ и любых $x, y \in T_p(L^k)$ имеем $w(x, y) = 0$.

Пусть $L(M^n, \Delta)$ – множество всех лагранжевых подмногообразий замкнутого симплектического многообразия (M^n, w), диффеоморфного данному лагранжеву подмногообразию Δ. Гладкое семейство $\alpha = \{L_t\}_t$, $t \in [0,1]$ лагранжевых подмногообразий $L_t \in L(M^n, \Delta)$ называется точным путем, соединяющим L_0 и L_1, если существует гладкое отображение $\Psi : \Delta \times [0,1] \to M^n$, такое что для каждого

$t \in [0,1]$ имеют место соотношения $\Psi(\Delta \times \{t\}) = L_t$ и $\Psi * w = dH_t \wedge dt$ для некоторой гладкой функции $H: \Delta \times [0,1] \to \mathbb{R}$. *Длина Хофера* $l(\alpha)$ точного пути α задается как

$$l(\alpha) = \int_0^1 \left\{ \max_{p \in \Delta} H(p,t) - \min_{p \in \Delta} H(p,t) \right\} dt.$$

Метрика Хофера на множестве $L(M^n, \Delta)$ определяется как

$$\inf_{\alpha} l(\alpha)$$

для любых $L_0, L_1 \in L(M^n, \Delta)$, где инфимум берется по всем точным путям на $L(M^n, \Delta)$, соединяющим L_0 и L_1.

Метрику Хофера можно определить аналогичным способом на группе Ham(M^n, w) *гамильтоновых диффеоморфизмов* замкнутого симплектического многообразия (M^n, w), элементы которого являются разовыми отображениями *гамильтоновых потоков* ϕ_t^H: это $\inf_{\alpha} l(\alpha)$, где инфимум берется по всем гладким путям $\alpha = \{\phi_t^H\}$, $t \in [0,1]$, соединяющим ϕ и ψ.

Метрика Сасакьяна

Метрика Сасакьяна – метрика положительной скалярной кривизны на *контактном многообразии,* естественно адаптированном к *контактной структуре.* Контактное многообразие, снабженное Метрикой Сасакьяна, называется *пространством Сасакьяна* и является нечетномерным аналогом *многообразий Кехлера.*

Метрика Картана

Форма Киллинга (или форма *Киллинга–Картана*) на конечномерной *алгебре Ли* Ω над полем $\mathbb{F}$ есть симметричная билинейная форма

$$B(x,y) = \mathrm{Tr}(ad_x \cdot d_y),$$

где Tr обозначает *след* линейного оператора и ad_x является образом x под действием *сопряженного представления* Ω, т.е. линейного оператора на векторном пространстве Ω, заданного правилом $z \to [x,z]$, где [,] – скобки Ли.

Пусть e_1, ..., e_n – базис алгебры Ли Ω и $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^k e_k$, где γ_{ij}^k – соответствующие *структурные постоянные.* Тогда форма Киллинга задается по формуле

$$B(x_i, x_j) = g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_{il}^k \gamma_{ik}^l.$$

Метрический тензор ((g_{ij})) называется, особенно в теоретической физике, **метрикой Картана.**

Глава 8

Расстояния на поверхностях и узлах

8.1. ОБЩИЕ МЕТРИКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Поверхность – действительное двумерное *многообразие* M^2, т.е. **хаусдорфово пространство,** каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной или плоскости $\mathbb{E}^2$, или замкнутой полуплоскости (см. гл. 7).

Компактная ориентируемая поверхность называется *замкнутой,* если она не имеет границы, и *поверхностью с краем* – иначе. Существуют и компактные неориентируемые поверхности (замкнутые или с краем); простейшей такой поверхностью является *лист Мёбиуса.* Некомпактные поверхности без границы называются открытыми.

Любая замкнутая связная поверхность гомеоморфна либо сфере с g (цилиндрическими) ручками или сфере с g *лентами Мёбиуса* (т.е. лентами, скрученными подобно листу Мёбиуса). В обоих случаях число g называется *родом* поверхности. При наличии ручек поверхность ориентируема и называется *тором, двойным тором* и *тройным тором* для $g = 1, 2$ и 3 соответственно. Для случая лент Мёбиуса поверхность неориентируема и называется *действительной проективной плоскостью, бутылкой Клейна и поверхностью Дика* соответственно для $g = 1, 2$ и 3. Род поверхности – это максимальное число непересекающихся простых замкнутых кривых, которые могут быть вырезаны из поверхности без потери связности (теорема жордановой кривой для поверхностей).

Характеристика Эйлера–Пуанкаре поверхности равно (одинаковому для всех многогранных разложений данной поверхности) числу $\chi = v - e + f$, где v, e и f – количество соответственно вершин, ребер и граней разложения. Если поверхность ориентируема, то имеет место равенство $\chi = 2 - 2g$, если нет, то $\chi = 2 - g$. Каждая поверхность с краем гомеоморфна сфере с соответствующим количеством (непересекающихся) дыр (т.е. того, что остается после удаления открытого диска) и ручек или лент Мёбиуса. Если h – количество дыр, то для ориентируемой поверхности выполняется равенство $\chi = 2 - 2g - h$, а равенство $\chi = 2 - g - h$, для неориентируемой.

Числом связности поверхности называется наибольшее число замкнутых сечений, которые можно провести по поверхности, не разделяя ее на две и более частей. Это число равно $3 - \chi$ для замкнутых поверхностей и $2 - \chi$ – для поверхностей с краем. Поверхность с числом связности 1, 2 и 3 называется соответственно *односвязной, двусвязной* и *трехсвязной.* Сфера является односвязной поверхностью, а тор – трехсвязной.

Поверхность можно рассматривать как метрическое пространство с собственной **внутренней метрикой** или как пространственную фигуру. Поверхность в $\mathbb{E}^3$ называется *полной,* если оно образует **полное** метрическое пространство по отношению к своей внутренней метрике.

Поверхность называется *дифференцируемой, регулярной* или *аналитической* соответственно, если в окрестности каждой ее точки она может быть

выражена как

$$r = r(u, v) = r(x_1(u, v), x_2(u, v), r_3(u, v)),$$

где *радиус-вектор* $r = (u, v)$ является дифференцируемым, *регулярным* (т.е. достаточное число раз дифференцируемым) или действительно аналитическим соответственно, при том что вектор-функция удовлетворяет условию $r_u \times r_v \neq 0$.

Любая регулярная поверхность имеет внутреннюю метрику с линейным элементом (или *первой фундаментальной формой*)

$$ds^2 = dr^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2,$$

где $E(u, v) = \langle r_u, r_u \rangle$, $F(u, v) = \langle r_u, r_v \rangle$, $G(u, v) = \langle r_v, r_v \rangle$. Длина кривой, определяемой на поверхности по формулам $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [0,1]$ равна

$$\int_0^1 \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,dt,$$

а расстояние между любыми точками $p, q \in M^2$ задается как инфимум длин всех кривых на M^2, соединяющих p и q. **Риманова метрика** является обобщением первой фундаментальной формы поверхности.

Применительно к поверхностям рассматриваются два вида кривизны: *гауссова кривизна* и *средняя кривизна.* Для их расчета в заданной точке поверхности рассмотрим пересечение поверхности плоскостью, содержащей фиксированный *нормальный вектор*, т.е. вектор, перпендикулярный поверхности в данной точке. Данное пересечение – плоская кривая. *Кривизна* k этой плоской кривой называется *нормальной кривизной* поверхности в заданной точке. При изменении плоскости нормальная кривизна k также будет меняться, и мы получим два экстремальных значения – максимальную кривизну k_1 и минимальную кривизну k_2, называемые *главными кривизнами* поверхности. Кривизна считается *положительной,* если кривая изгибается в том же направлении, что и выбранная нормаль, и *отрицательной* – иначе. *Гауссова кривизна* равна $K = k_1 k_2$ (она может быть полностью задана в терминах первой фундаментальной формы). *Средняя кривизна* $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Минимальной поверхностью называется поверхность со средней кривизной, равной нулю, или, эквивалентно, поверхность минимальной площади при заданном крае.

Римановой поверхностью называется одномерное *комплексное многообразие* или двумерное действительное многообразие с комплексной структурой, т.е. такое, в котором локальные координаты в окрестностях точек соотносятся через комплексные аналитические функции. Ее можно представить как деформированный вариант комплексной плоскости. Все римановы поверхности являются ориентируемыми. Замкнутые римановы поверхности представляют собой геометрические модели *комплексных алгебраических кривых*. Каждое связное риманово пространство можно преобразовать в *полное* двумерное *риманово многообразие* с постоянным радиусом кривизны, равным 0,1 или 1. Римановы поверхности с кривизной –1 называются *гиперболическими,* каноническим примером таких поверхностей является *единичный диск* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Римановы поверхности с

нулевой кривизной называются *параболическими,* типовым примером является плоскость $\mathbb{C}$. Римановы поверхности с радиусом кривизны 1 называются *эллиптическими.* Типовым примером таковых является *риманова сфера* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Регулярная метрика

Внутренняя метрика поверхности называется **регулярной**, если ее можно определить с помощью *линейного элемента*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где коэффициенты формы ds^2 являются регулярными функциями.

Любая регулярная поверхность, заданная формулой $r = r(u, v)$, обладает регулярной метрикой с *линейным элементом* ds^2, где $E(u,v) = \langle r_u, r_u \rangle$, $F(u,v) = \langle r_u, r_v \rangle$, $G(u,v) = \langle r_v, r_v \rangle$.

Аналитическая метрика

Внутренняя метрика поверхности называется **аналитической,** если она может быть определена с помощью *линейного элемента*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

где коэффициенты формы ds^2 являются аналитическими функциями.

Любая аналитическая поверхность, заданная формулой $r = r(u, v)$, обладает аналитической метрикой с *линейным элементом* $d\,s^2$, где $E(u,v) = \langle r_u, r_u \rangle$, $F(u,v) = \langle r_u, r_v \rangle$, $G(u,v) = \langle r_v, r_v \rangle$.

Метрика положительной кривизны

Метрика положительной кривизны – внутренняя метрика *поверхности положительной кривизны.*

Поверхностью положительной кривизны называется поверхность в $\mathbb{E}^3$, которая в каждой точке обладает положительной гауссовой кривизной.

Метрика отрицательной кривизны

Метрикой отрицательной кривизны называется внутренняя метрика *поверхности отрицательной кривизны*.

Поверхность отрицательной кривизны – поверхность в $\mathbb{E}^3$, которая в каждой точке обладает отрицательной гауссовой кривизной. Поверхность отрицательной кривизны локально имеет седловидную (вогнутую) структуру. Внутренняя геометрия поверхности постоянной отрицательной кривизны (в частности, псевдосферы) локально совпадает с геометрией *плоскости Лобачевского.* В $\mathbb{E}^3$ не существует поверхности, внутренняя геометрия которой полностью совпадает с геометрией плоскости Лобачевского (т.е. полной регулярной поверхности с постоянной отрицательной кривизной).

Метрика неположительной кривизны

Метрикой неположительной кривизны называется внутренняя метрика *седловидной поверхности.*

Седловидная поверхность является обобщением поверхности отрицательной кривизны: дважды непрерывно дифференцируемая поверхность называется седловидной тогда и только тогда, когда в каждой точке поверхности ее гауссова кривизна является неположительной. Такие поверхности можно рассматривать как антиподы *выпуклых поверхностей,* однако они не образуют такого естественного класса, как выпуклые поверхности.

Метрика неотрицательной кривизны

Метрикой неотрицательной кривизны называется внутренняя метрика *выпуклой поверхности.*

Выпуклая поверхность – это *область* (т.е. связное открытое множество) на границе выпуклого тела в $\mathbb{E}^3$ (в некотором смысле это антипод седловидной поверхности). Вся граница выпуклого тела называется *полной выпуклой поверхностью.* Если тело конечно (ограничено), то полная выпуклая поверхность называется *замкнутой.* Иначе она называется *бесконечной* (бесконечная выпуклая поверхность гомеоморфна плоскости или цилиндру круглого сечения).

Любая выпуклая поверхность M^2 в $\mathbb{E}^3$ является *поверхностью ограниченной кривизны. Полная гауссова кривизна* $w(A)=\int\int_A K(x)d\sigma(x)$ множества $A\subset M^2$ всегда неотрицательна (здесь $\sigma(\cdot)$ – *площадь,* а $K(x)$ – *гауссова кривизна* M^2 в точке x), т.е. выпуклая поверхность может рассматриваться как *поверхность неотрицательной кривизны.*

Внутренняя метрика выпуклой поверхности называется **выпуклой метрикой** (не следует путать с **метрической выпуклостью**, см. гл. 1) применительно к теории поверхностей, т.е. она удовлетворяет *условию выпуклости*: сумма углов любого треугольника, стороны которого являются кратчайшими кривыми, не меньше, чем π.

Метрика с альтернативной кривизной

Метрикой с альтернативной кривизной называется внутренняя метрика на поверхности с альтернативной (положительной или отрицательной) гауссовой кривизной.

Плоская метрика

Плоская метрика – внутренняя метрика на *развертываемой поверхности,* т.е. поверхности, на которой гауссова кривизна всюду равна нулю.

Метрика ограниченной кривизны

Метрикой ограниченной кривизны называется внутренняя метрика ρ на *поверхности ограниченной кривизны.*

Поверхность M^2 с внутренней метрикой называется поверхностью ограниченной кривизны, если существует последовательность таких римановых метрик ρ_n, заданных на M^2, что для любого компактного множества $A\subset M^2$ имеет место условие равномерной сходимости $\rho_n\to\rho$, и последовательность $|w_n|(A)$ является ограниченной, где $|w_n|(A)=\int\int_A K(x)d\sigma(x)$ – *тотальная абсолютная кривизна* метрики ρ_n (здесь $K(x)$ – гауссова кривизна поверхности M^2 в точке x, а $\sigma(\cdot)$ – *площадь*).

Λ-метрика

Λ-метрикой (или *метрикой типа* Λ) называется **полная** метрика на поверхности с кривизной, ограниченной сверху отрицательной константой.

Λ-метрика не имеет вложений в $\mathbb{E}^3$. Это является обобщением классического результата Гильберта (1901): в $\mathbb{E}^3$ не существует каких-либо регулярных поверхностей постоянной отрицательной кривизны (т.е. поверхностей, внутренняя геометрия которых полностью совпадает с геометрией плоскости Лобачевского).

(*h*, Δ)-метрика

(*h*, Δ)-метрикой называется метрика на поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной.

Полная (*h*, Δ)-метрика не допускает *регулярных изометрических вложений* в трехмерное евклидово пространство (см. **Λ-метрика**).

***G*-расстояние**

Связное множество G точек на поверхности M^2 называется геодезическим регионом, если для каждой точки $x \in G$ существует *диск* $B(x, r)$ с центром в x, такой что $B_G = G \cap B(x,r)$ имеет одну из следующих форм: $B_G = B(x,r)$ (x – *регулярная внутренняя точка* G); B_G – полудиск $B(x, r)$ (x – *регулярная граничная точка* G); B_G – сектор $B(x, r)$, не являющийся полудиском (x – *угловая точка* G); B_G состоит из конечного числа секторов $B(x, r)$, которые не имеют иных общих точек, кроме x (x – *узловая точка* G).

***G*-расстояние** между любыми точками x и $y \in G$ определяется как инфимум длин всех спрямляемых кривых, соединяющих x и $y \in G$ и полностью принадлежащих G.

Конформно инвариантная метрика

Пусть R – риманова поверхность. *Локальный параметр* (или *локальный униформизирующий параметр, локальный униформизатор*) является комплексной переменной z, рассматриваемой как непрерывная функция $z_{p0} = \phi_{p0}(p)$ точки $p \in R$, которая задана всюду в некоторой окрестности (параметрической окрестности) $V(p_0)$ точки $p_0 \in R$ и которая реализует гомеоморфное отображение (параметрическое отображение) $V(p_0)$ на диск (*параметрический диск*) $\Delta(p_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r(p_0)\}$, где $\phi_{p0}(p_0) = 0$. Под действием параметрического отображения любая точечная функция $g(p)$, определяемая в параметрической окрестности $V(p_0)$, становится функцией локального параметра $z : g(p) = g(\phi_{p_0}^{-1}(z)) = G(z)$.

Конформно инвариантной метрикой называется дифференциал $\rho(z)|dz|$ на римановой поверхности R, который инвариантен относительно выбора локального параметра z. Таким образом, каждому локальному параметру $z(z : U \to \overline{\mathbb{C}})$ ставится в соответствие функция $\rho_z : z(U) \to [0, \infty]$ так, что для любых локальных параметров z_1 и z_2 имеем

$$\frac{\rho_{z_2}(z_2(p))}{\rho_{z_1}(z_1(p))} = \left|\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right| \text{ для любых } p \in U_1 \cap U_1 \cap U_2.$$

Каждый линейный дифференциал $\lambda(z)dz$ и каждый *квадратичный дифференциал* $Q(z)dz^2$ порождают конформно инвариантные метрики $|\lambda(z)|\,|dz|$ и $|Q(z)|^{1/2}\,|dz|$ соответственно (см. ***Q*-метрика**).

***Q*-метрика**

***Q*-метрикой** называется **конформно инвариантная метрика** $\rho(z)|dz| = |Q(z)|^{1/2}|dz|$ на римановой поверхности R, задаваемая через *квадратичный дифференциал* $Q(z)dz$.

Квадратичный дифференциал $Q(z)dz^2$ – нелинейный элемент на римановой поверхности R, который инвариантен относительно к выбора локального параметра z. Таким образом, каждому локальному параметру $z(z : U \to \overline{\mathbb{C}})$ ставится в

соответствие функция $Q_z : (U) \to \overline{\mathbb{C}}$ такая, что для любых локальных параметров z_1 и z_2 имеем

$$\frac{Q_{z_2}(z_2(p))}{Q_{z_1}(z_1(p))} = \left(\frac{dz_1(p)}{dz_2(p)}\right)^2$$

для любых $p \in U_1 \cap U_2$.

Экстремальная метрика

Экстремальной метрикой называется конформно инвариантная метрика в *задаче модулюса* для семейства Γ локально спрямляемых кривых на римановой поверхности *R*, которая реализует инфимум в определении *модулюса* $M(\Gamma)$.

Формально, пусть Γ – семейство локально спрямляемых кривых на римановой поверхности *R* и пусть *P* – непустой класс конформно инвариантных метрик $\rho(z)|dz|$ на *R,* таких что $\rho(z)$ является квадратично интегрируемой в *z*-плоскости для каждого локального параметра *z*, а интегралы

$$A_\rho(R) = \int\int_R \rho^2(z)dxdy \quad \text{и} \quad L_\rho(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \int_y \rho(z)|dz|$$

не являются одновременно равными 0 или ∞ (подразумевается, что каждый из вышеприведенных интегралов – это интеграл Лебега). *Модулюс семейства кривых* Γ определяется как

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P} \frac{A_\rho(R)}{(L_\rho(\Gamma))^2}.$$

Экстремальная длина семейства кривых Γ равна $\sup_{\rho\in P} \frac{(L_\rho(U))^2}{A_\rho(R)}$, т.е. является величиной, обратной $M(\Gamma)$.

Задача модулюса для Γ определяется следующим образом: пусть P_L – подкласс *P*, такой что для любых $\rho \in (z)|dz| \in P_L$ и любой $\gamma \in \Gamma$ имеем $P_L \neq \emptyset$, Если , то модулюс $M(\Gamma)$ семейства Γ может быть записан как $M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R)$. Каждая метрика из P_L называется **допустимой метрикой** для задачи модулюса на Γ. Если существует ρ^*, для которой

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in P_L} A_\rho(R) = A_{\rho^*}(R),$$

метрика $\rho^*|dz|$ называется **экстремальной метрикой** для задачи модулюса на Γ.

Метрика поверхности Фреше

Пусть (*X, d*) – произвольное метрическое пространство, M^2 – компактное двумерное многообразие, *f* – непрерывное отображение f: $M^2 \to X$, называемое *параметризованной поверхностью,* а σ: $M^2 \to M^2$ – гомеоморфизм M^2 на себя. Две параметризированных поверхности f_1 и f_2 называются *эквивалентными,* если $\inf_\sigma \max_{\rho\in M^2} d(f_1(p), f_2(\sigma(p)) = 0$, где инфимум берется по всем возможным гомеоморфизмам σ. Класс f^* параметризированных поверхностей, эквивалентных *f*,

называется *поверхностью Фреше*. Это является обобщением понятия поверхности в евклидовом пространстве для случая произвольного метрического пространства (X, d).

Метрикой поверхности Фреше называется метрика на множестве всех поверхностей Фреше, определяемая как

$$\inf_{\sigma} \max_{p \in M^2} d(f_1(p), f_2(\sigma(p)))$$

для любых поверхностей Фреше f_1^* и f_2^*, где инфимум берется по всем возможным гомеоморфизмам σ (см. **Метрика Фреше**).

8.2. ВНУТРЕННИЕ МЕТРИКИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

В данном разделе перечислены внутренние метрики, определяемые их *линейными элементами* (которые в действительности, являются двумерными **римановыми метриками**) для некоторых избранных поверхностей.

Метрика квадрики

Квадрикой (или *квадратичной поверхностью, поверхностью второго порядка*) называется множество точек в $\mathbb{E}^3$, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени. Существует 17 классов таких поверхностей, в том числе *эллипсоиды, однополостные* и *двухполостные гиперболоиды, эллиптические параболоиды, гиперболические параболоиды, эллиптические, гиперболические* и *параболические цилиндры и конические поверхности.*

Цилиндр, например, может быть в параметрической форме задан с помощью следующих уравнений:

$$x_1(u, v) = a\cos v, \quad x_2(u, v) = a\sin v, \quad x_3(u, v) = u.$$

Внутренняя метрика на нем задается *линейным элементом*

$$ds^2 = du^2 + a^2 dv^2.$$

Эллиптический конус (т.е. конус с эллиптическим сечением) определяется в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x_1(u, v) = a\frac{h-u}{h}\cos v, \quad x_2(u, v) = b\frac{h-u}{h}\sin v, \quad x_3(u, v) = u,$$

где h – *высота*, a – *большая полуось* и b – малая полуось конуса. Внутренняя метрика на конусе задается *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{h^2 + a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v}{h^2} du^2 + s\frac{(a^2 - b^2)(h-u)\cos v \sin v}{h^2} du dv +$$
$$+ \frac{(h-u)^2(a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)}{h^2} dv^2.$$

Метрика сферы

Сфера является *квадрикой,* координаты которой в декартовой системе выражены уравнением $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2 = r^2$, где точка (a, b, c) – центр сферы, а $r > 0$ – ее радиус. Сфера радиуса r с центром в начале координат может быть

задана в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x_1(\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi, \quad x_2(\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi, \quad x_3(\theta,\phi) = r\cos\phi,$$

где *азимутальный угол* $\phi \in [0, 2\pi]$ и *полярный угол* $\theta \in [0, \pi]$. Внутренняя метрика на сфере (именно, двумерная **сферическая метрика**) задается *линейным элементом*

$$ds^2 = r^2 d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi^2.$$

Сфера радиуса r имеет постоянную положительную гауссову кривизну, равную r.

Метрика эллипсоида

Эллипсоид – квадрика, заданная декартовым уравнением $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$, или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(\theta,\phi) = a\cos\phi\sin\theta, \quad x_2(\theta,\phi) = b\sin\phi\sin\theta, \quad x_3(\theta,\phi) = c\cos\theta,$$

где *азимутальный угол* $\phi \in [0, 2\pi]$ и *полярный угол* $\theta \in [0, \pi]$ Внутренняя метрика на эллипсоиде задается *линейным элементом*

$$ds^2 = (b^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi)\sin^2\theta d\phi^2 + (b^2 - a^2)\cos\phi\sin\phi\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi +$$
$$+ ((a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) d\theta^2.$$

Метрика сфероида

Сфероидом называется *эллипсоид* с двумя одинаковыми по длине осями. Он является также *поверхностью вращения,* заданной в параметрической форме следующими уравнениями:

$$x_1(u,v) = a\sin v\cos u, \quad x_2(u,v) = a\sin v\sin u, \quad x_3(u,v) = c\cos v,$$

где $0 \le u \le 2\pi$ и $0 \le v < \pi$. Внутренняя метрика на сфероиде задается *линейным элементом*

$$ds^2 = a^2\sin^2 v du^2 + \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 + (a^2 - c^2)\cos(2v)\right)dv^2.$$

Метрика гиперболоида

Гиперболоид – квадрика, которая может быть одно- или двухполостной. *Однополостным гиперболоидом* называется образуемая вращением гиперболы относительно перпендикуляра, делящего пополам линию между фокусами, а *двухполостной гиперболоид* – это поверхность, образуемая вращением гиперболы относительно линии, соединяющей фокусы. Однополостной гиперболоид, ориентированный по оси x_3, задается декартовым уравнением $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v) = a\sqrt{1+u^2}\cos v, \quad x_2(u,v) = a\sqrt{1+u^2}\sin v, \quad x_3(u,v) = cu,$$

где $v \in [0, 2\pi]$. Внутренняя метрика на гиперболоиде задается *линейным элементом*

$$ds^2 = \left(c^2 + \frac{a^2u^2}{u^2+1}\right)du^2 + a^2(u^2+1)dv^2.$$

Метрика поверхности вращения

Поверхностью вращения называется поверхность, образуемая вращением двумерной кривой относительно некоторой оси. Ее можно задать в параметрической форме с помощью следующих уравнений:

$$x_1(u,v)=\phi(v)\cos u,\quad x_2(u,v)=\phi(v)\sin u,\quad x_3(u,v)=\psi(v).$$

Внутренняя метрика на ней задается *линейным элеменом*

$$ds^2=\phi^2du^2+(\phi^2+\psi^2)dv^2.$$

Метрика псевдосферы

Псевдосферой называется половина *поверхности вращения*, образуемой вращением трактрисы относительно ее асимптоты. Она задается следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v)=\operatorname{sech}u\cos v,\ x_2(u,v)=\operatorname{sech}u\sin v,\ x_3(u,v)=u-\operatorname{tgh}u,$$

где $u\ge 0$ и $0\le v<2\pi$.

Внутренняя метрика на ней задается *линейнм элементом*

$$ds^2=\operatorname{tgh}^2udu^2+\operatorname{sich}^2udv^2.$$

Псевдосфера имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну, равную –1, и в этом смысле является аналогом сферы с постоянной положительной гауссовой кривизной.

Метрика тора

Тор является поверхностью, имеющей тип 1. Азимутально симметричный относительно оси x_3 тор задается декартовым уравнением $\left(c-\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)^2+x_3^2=a^2$ или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v)=(c+a\cos v)\cos u,\quad x_2(u,v)=(c+a\cos v)\sin u,\quad x_3(u,v)=a\sin v,$$

где $c>a$ и $u,\ v\in[0,\ 2\pi]$. Внутренняя метрика на торе задается *линейным элементом*

$$ds^2=(c+a\cos v)^2du+a^2dv^2.$$

Метрика винтовой поверхности

Винтовой поверхностью (или *поверхностью винтового движения*) называется поверхность, описываемая плоской кривой γ, которая, вращаясь с постоянной скоростью относительно оси, одновременно движется вдоль нее с равномерной скоростью. Если γ находится в плоскости оси вращения x_3 и определена уравнением $x_3=f(u)$, то позиционный вектор винтовой поверхности будет равен

$$r=(u\cos v,\ usonv,\ \ f(u)=hv),\quad h=\text{const},$$

и внутренняя метрика на ней задается *линейным элементом*

$$ds^2=(1+f^2)du^2+2hf'dudv+(u^2+h^2)dv^2.$$

Если $f=$ const, то получаем *геликоид*; если $h=0$, то получаем *поверхность вращения.*

Метрика поверхности Каталана

Поверхностью Каталана называется минимальная поверхность, в параметрической форме задаваемая следующими уравнениями:

$$x_1(u,v) = u - \sin u \cosh v, \quad x_2(u,v) = 1 - \cos u \cosh v, \quad x_3(u,v) = 4\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right).$$

Внутренняя метрика на ней задается линейным элементом

$$ds^2 = 2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh v - \cos u)du^2 + 2\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right)(\cosh v - \cos u)dv^2.$$

Метрика обезьяньего седла

Обезьяньим седлом называется поверхность, задаваемая декартовым уравнением $x_3 = x_1(x_1^2 - 3x_2^2)$ или следующими уравнениями в параметрической форме:

$$x_1(u,v) = u, \quad x_2(u,v) = v, \quad x_3(u,v) = u^3 - 3uv^2.$$

По такой поверхности обезьяна могла бы передвигаться, опираясь одновременно ногами и хвостом. Внутренняя метрика на такой поверхности задается *линейным элементом*

$$ds^2 = (1 + (su^2 - 3v^2)^2 du^2 - 2(18uv(u^2 - v^2))dudv + (1 + 36u^2v^2)dv^2).$$

8.3. РАССТОЯНЯ НА У ЗЛАХ

Узлом называется замкнутая самонепересекающаяся кривая, вложимая в S^3. *Тривиальным узлом* (или *незаузленностью*) O называется замкнутый незаузленный контур. Обобщением понятия узла является понятие *звена. Звено* представляет собой множество непересекающихся узлов. Каждому звену соответствует его *поверхность Зейферта*, т.е. компактная ориентируемая поверхность с данным звеном в качестве границы. Два узла (звена) называются *эквивалентными,* если можно плавно перейти от одного к другому. Формально, звено задается как гладкое одномерное *подмногообразие* 3-сферы S^3; узел – это звено, состящее из одной компоненты; звенья L_1 и L_2 называются эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f: $S^3 \to S^3$, такой что $f(L_1) = L_2$.

Всю информацию об узле можно представить, используя *диаграммы узла* – такой проекции узла на плоскость, что не более чем две точки узла проецируются в одну и ту же точку на плоскости и в каждой такой точке указано, какая из линий является ближайшей к плоскости, обычно посредством удаления части нижней линии. Две различные диаграммы могут представлять один и тот же узел. Значительная часть теории узлов посвящена выяснению ответа на вопрос, когда две диаграммы описывают один и тот же узел.

Распутывание узлов является операцией, изменяющей положение пересекающихся линий относительно друг друга (сверху или снизу) в двойной точке данной диаграммы. *Распутывающее число* узла K является минимальным числом элементарных операций по распутыванию узлов, необходимых для превращения диаграммы узла K в диаграмму тривиального узла, где минимум берется по всем диаграммам узла K. Грубо говоря, распутывающее число есть наименьшее количество протаскиваний узла K через самого себя, необходимых для его распутывания.

#-распутывающая операция диаграммы узла K является аналогом распутывающей операции для #-*части* диаграммы, состоящей из двух пар параллельных линий, из которых одна пара при пересечении проходит над другой. Таким образом, распутывающее действие изменяет положение пересекающихся линий по высоте в каждой из вершин полученного четырехугольника.

Гордиево расстояние

Гордиево расстояние – метрика на множестве всех узлов, определяемая для данных узлов K и K' как минимальное число распутывающих операций, необходимых для превращения диаграммы узла K в диаграмму узла K', где минимум берется по всем диаграммам узла K, из которых можно перейти к диаграммам узла K'. *Распутывающее число* диаграммы угла K равно гордиеву расстоянию между K и тривиальным узлом O.

Пусть rK – узлел, полученный из K как его зеркальное отражение и пусть $-K$ – противоположно ориентированный узлел. **Расстоянием положительной рефлексии** $\mathrm{Re}\, f_+(K)$ называется гордиево расстояние между K и rK. **Расстоянием отрицательной рефлексии** $\mathrm{Re}\, f_-(K)$ называется гордиево расстояние между K и $-r\,K$. **Инверсивным расстоянием** $\mathrm{Inv}\,(K)$ называется гордиево расстояние между K и $-K$.

Гордиево расстояние – случай $л = 1$ **C_k-расстояния**, которое равно минимальному числу C_k-*ходов*, небходимому для трансформирования K в K'; Хабиро и Гусаров доказали, что для $k > 1$число операций будет конечным тогда и только тогда, когда оба узла имеют одни и те же *инварианты Васильева порядка менее k.* C_1-*ход* – это однократное изменение пересечения. C_2-ход (или *дельта-ход*) – это одновременное изменение пересечений для трех простых дуг, формирующих треугольник. C_2- и C_3-расстояния называются соответственно **дельта расстоянием** и **расстоянием зацепления.**

#-гордиево расстояние

#-гордиевым расстоянием (см., например, [Mura85]) называется метрика на множестве всех узлов, определенная для узлов K и K' как минимальное число #-распутывающих операций, необходимых для перехода от диаграммы узла K к диаграмме узла K', где минимум берется по всем диаграммам узла K, которые преобразуются в диаграммы узла K'.

Пусть rK – узел, полученный из K как его зеркальное отражение и пусть $-K$ – противоположно ориентированный узлел. **Расстоянием положительной #-рефлексии** $\mathrm{Re}\, f_+^{\#}(K)$ называется #-гордиево расстояние между K и $r\,K$. **Расстоянием отрицательной #-рефлексии** $\mathrm{Re}\, f^{\#}(K)$ называется #-гордиево расстояние между K и $-rK$; **#-инверсивным расстоянием** $\mathrm{Inv}(K)$ является #-гордиево расстояние между K и $-K$.

Глава 9

Расстояния на выпуклых телах, конусах и симплициальных комплексах

9.1. РАССТОЯНИЕ НА ВЫПУКЛЫХ ТЕЛАХ

Выпуклым телом в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^N$ называется компактное *выпуклое подмножество* в $\mathbb{E}^N$. Оно называется собственным, если имеет непустую внутренность. Обозначим пространство всех выпуклых тел в $\mathbb{E}^N$ через K, и пусть K_p будет подпространством всех собственных выпуклых тел.

Любое метрическое пространство (K, d) на K называется **метрическим пространством выпуклых тел.** Метрические пространства выпуклых тел, в частности метризация посредством **хаусдорфовой метрики** или метрики симметрической разности, являются основополагающими элементами анализа в выпуклой геометрии (см., например, [Grub93]).

Для $C, D \in K\backslash\{\varnothing\}$ *сложение Минковского* и *умножение Минковского на неотрицательный скаляр* определяются как $C + D = \{x + y: x \in C, y \in D\}$ и $\alpha C = \{\alpha x: xC\}$, $\alpha \geq 0$ соответственно. Абелева полугруппа $(K, +)$, снабженная операторами умножения на неотрицательный скаляр, может рассматриваться как *выпуклый конус.*

Опорная функция h_C: $S^{n-1} \to \mathbb{R}$ для $C \in K$ задается как $h_C(u) = \sup\{\langle u, x\rangle : x \in C\}$ для любого $u \in S^{n-1}$, где S^{n-1} – $(n-1)$-мерная единичная сфера в $\mathbb{E}^n$ и $\langle,\rangle$ – *скалярное произведение* на $\mathbb{E}^n$.

Для множества $X \subset \mathbb{E}^n$ его *выпуклая оболочка*, $\mathrm{conv}(X)$ определяется как минимальное *выпуклое* множество, которому X принадлежит.

Отклонение площади

Отклонение площади (или **эталонная метрика**) является метрикой на множестве K_p в $\mathbb{E}^2$ (т.е. на множестве плоских выпуклых дисков), определенной как

$$A(C \Delta D),$$

где $A(\cdot)$ – площадь и Δ – *симметрическая разность.* Если $C \subset D$, то выражение принимает вид $A(D) - A(C)$.

Отконение периметра

Отклонение периметра является метрикой на L_p в $\mathbb{E}^2$, заданной как

$$2p(\mathrm{con}\, v(C \cup D)) - p(C) - p(D),$$

где $p(\cdot)$ – *периметр.* Для случая $C \subset D$ оно равно $p(D) - p(C)$.

Метрика средней ширины

Метрикой средней ширины называется метрика на K_p в $\mathbb{E}^2$, заданная как

$$2W(\mathrm{conv}(C \cup D)) - W(C) - W(D),$$

где $W(\cdot)$ – с*редняя ширина*: $W(C) = p(C)/\pi$, если – *периметр.*

Метрика Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке

Метрикой Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке (или **хаусдорфовой метрикой**) называется метрика на K, заданная как

$$\max\left\{\sup_{x\in C}\inf_{y\in D}\| y-y\|_2 \sup_{y\in D}\inf_{x\in C}\| x-y\|_2\right\},$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{E}^2$.

На языке опорных функций, соответственно с использованием сложения Минковского, она имеет вид

$$\sup_{u\in S^{n-1}}\left|h_C(u)-h_D(u)\right| = \left\|h_C-h_D\right\|_\infty = \inf\left\{\lambda\ge 0 : C\subset D+\lambda\overline{B}^n, D\subset C+\lambda\overline{B}^n\right\},$$

где $\overline{B}^n$ – *единичный шар* пространства $\mathbb{E}^n$.

Данную метрику можно определить, используя любую норму на $\mathbb{R}^n$ вместо евклидовой. Обобщая, можно сказать, что она задается для пространства ограниченных замкнутых подмножеств произвольного метрического пространства.

Метрика Помпейю–Эгглестона

Метрикой Помпейю–Эгглестона называется метрика на K, заданная как

$$\sup_{x\in C}\inf_{y\in D}\left\|x-y\right\|_2 + \sup_{y\in D}\inf_{x\in C}\left\|x-y\right\|_2,$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{E}^2$.

На языке опорных функций, соответственно, с использованием сложения Минковского, она имеет вид

$$\max\left\{0,\ \sup_{u\in S^{n-1}}\left(h_C(u)-h_D(u)\right)\right\}+\max\left\{0,\ \sup_{u\in S^{n-1}}\left(h_D(u)-h_C(u)\right)\right\}=$$

$$=\inf\left\{\lambda\ge 0 : C\subset D+\lambda\overline{B}^n\right\}+\inf\left\{\lambda\ge 0 : D\subset C+\lambda\overline{B}^n\right\},$$

где $\overline{B}^n$ – единичный шар пространства $\mathbb{E}^n$.

Данную метрику можно определить, используя любую норму на $\mathbb{R}^n$ вместо евклидовой. Обобщая, можно сказать, что она задается для пространства ограниченных замкнутых подмножеств произвольного метрического пространства.

Метрика МакКлюра–Витале

Для $1\le p\le\infty$, **метрикой МакКлюра–Витале** называется метрика на K, определенная как

$$\left(\int_{S^{n-1}}\left|h_C(u)-h_D(u)\right|^p d\sigma(u)\right)^{1/p} = \left\|h_C-h_D\right\|_p.$$

Метрика Флориана

Метрика Флориана это метрика на K, заданная как

$$\int_{S^{n-1}}\left|h_C(u)-h_D(u)\right|d\sigma(u) = \left\|h_C-h_D\right\|_1.$$

Она может быть выражена в форме $2S(\mathrm{conv}(C \cup D)) - S(C) - S(D)$ для $n = 2$ (см. **Отклонение периметра**); ее можно также выразить в форме $nk_n(2W(\mathrm{conv}(C \cup D)) - W(C) - W(D)$ для $n \geq 2$ (см. **Метрика средней ширины**). Здесь $S(\cdot)$ – площадь поверхности, k_n – объем единичного шара $\overline{B}^n$ в $\mathbb{E}^n$ и $W(\cdot)$ – средняя ширина:

$$W(C) = \frac{1}{nk_n} \int\limits_{S^{n-1}} (h_C(u) + h_C(-u)) d\sigma(u).$$

Расстояние Соболева

Расстояние Соболева – метрика на K, определенная как

$$\|h_C - h_D\|_w,$$

где $\|\cdot\|_w$ – 1-*норма Соболева* на множестве $C_{S^{n-1}}$ всех непрерывных функций на *единичной сфере* S^{n-1} пространства $\mathbb{E}^n$.

1-*норма Соболева* задается как $\|f\|_w = \langle f, f \rangle_w^{1/2}$, где $\langle , \rangle_w$ – *скалярное произведение* на $C_{S^{n-1}}$, заданное как

$$\langle f, g \rangle_w = \int\limits_{S^{n-1}} (fg + \nabla_s(f, g)) dw_0, \quad w_0 = \frac{1}{n \cdot k_n} w,$$

$\nabla_s(f, g) = \langle \mathrm{grad}_s f, \mathrm{grad}_s g \rangle$, $\langle , \rangle$ – *скалярное произведение* на $\mathbb{E}^n$ и grad_s – *градиент* на S^{n-1} (см. [ArWe92]).

Метрика Шепарда

Метрикой Шепарда называется метрика на K, заданная как

$$\ln(1 + 2 \inf\{\lambda \geq 0 : C \subset D + \lambda(D - D), D \subset C + \lambda(C - C)\}).$$

Метрика Никодима

Метрика Никодима (или **метрика симметрической разности**) является метрикой на K, заданной как

$$V(C \Delta D),$$

где $V(\cdot)$ – *объем* (т.е. лебегова n-мерная мера) и Δ – симметрическая разность. Для $n = 2$ получаем **отклонение площади.**

Метрика Штейнгауса

Метрика Штейнгауза (или **однородная метрика симметрической разности расстояние Штейнгауса**) является метрикой на K_p, заданной как

$$\frac{V(C \Delta D)}{V(C \cup D)},$$

где $V(\cdot)$ – *объем*. Таким образом, она равна $\dfrac{d_\Delta(C, D)}{V(C \cup D)}$, где d_Δ есть **метрика Никодима.** Эта метрика ограничена; она аффинно инвариантна, в то время как метрика Никодима инвариантна только относительно сохраняющих объем аффинных преобразований.

Расстояние Эгглестона

Расстоянием Эгглестона (или **симметрическим отклонением площади поверхности**) называется расстояние на K_p, определяемое как

$$S(C \cup D) - S(C \cap D),$$

где $S(\cdot)$ – *площадь поверхности*. Данное расстояние метрикой не является.

Метрика Асплунда

Метрикой Асплунда называется метрика на пространстве $K_p/\approx$ классов аффинной эквивалентности в K_p, определяемая как

$$\ln \inf\{\lambda \geq 1 : \exists T : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \text{ аффинна, } x \in \mathbb{E}^n, \ C \subset T(D) \subset \lambda C + x\},$$

для любых классов эквивалентности и с представителями C^* и D^* соответственно.

Метрика Макбета

Метрика Макбета – метрика на пространстве $K_p/\approx$ классов аффинной эквивалентности в K_p, определяемая как

$$\ln \inf\{|\det T \cdot P|: \exists T, P: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \text{ регулярное аффинное, } C \subset T(D), D \subset P(C)\}$$

для любых классов эквивалентности C^* и D^* с представителями C и D, соответственно.

Ее можно записать так же, как

$$\ln \delta_1(C, D) + \ln \delta_1(D, C),$$

где $\delta_1(C, D) = \inf\limits_T \left\{ \dfrac{V(T(D))}{V(C)}; \ C \subset T(D) \right\}$ и T есть регулярное аффинное отображение $\mathbb{E}^n$ на себя.

Метрика Банаха–Мазура

Метрикой Банаха–Мазура называется метрика на пространстве $K_p/\approx$ классов эквивалентности собственных центрально-симметричных выпуклых тел по отношению к линейным преобразованиям, определяемая как

$$\ln \inf\{\lambda \geq 1: \exists T: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n \text{ линейное, } C \subset T(D) \subset \lambda C)\}$$

для любых классов эквивалентности C^* и D^* и с представителями C и D соответственно.

Эта метрика является особым случаем **расстояния Банаха–Мазура** между n-мерными *нормированными пространствами.*

Разделяющее расстояние

Разделяющее расстояние есть минимальное евклидово расстояние между двумя непересекающимися выпуклыми телами C и D в $\mathbb{E}^n$ (в общем случае, **расстояние между множествами** между любыми двумя непересекающимися подмножествами $\mathbb{E}^n$): $\inf\left\{|x-y|_2 : x \in C, y \in D\right\}$; при этом $\sup\left\{|x-y|_2 : x \in C, y \in D\right\}$ называется **перекрывающим расстоянием.**

Расстояние глубины проникновения

Расстояние глубины проникновения между двумя взаимно проникающими выпуклыми телами C и D в $\mathbb{E}^n$ (в общем случае, между любыми двумя взаимно

проникающими подмножествами множества $\mathbb{E}^n$) есть минимальное *расстояние переноса* одного тела относительно другого так, чтобы внутренности C и D стали непересекающимися:

$$\min\{\| t \|_2 : \text{interior}\,(C + t) \cap D = \emptyset\}.$$

Это расстояние является естественным обощенном евклидова **разделяющего расстояния** для непересекающихся объектов на случай перекрывающихся объектов. Данное расстояние можно определить как $\inf\{d(C,\ D + x): x \in \mathbb{E}^n\}$ или $\inf_s d(C,\ s(D))$, где инфимум берется по всем подобиям s: $\mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ или…, где d – одна из указанных выше метрик.

Расстояние порядка роста

Для выпуклых многогранников **расстояние порядка роста** (см. подробнее [GiOn96]) определяется как величина на которую объекты должны увеличиться относительно их начального размера до момента соприкосновения поверхностями.

Разность Минковского

Разность Минковского на множестве всех компактных подмножеств, в частности на множестве всех *скульптурных объектов* (или *объектов произвольной формы*) в $\mathbb{R}^3$, определяется как

$$A - B = \{x - y: x \in A,\ y \in B\}.$$

Если считать B свободно перемещающимся и имеющим постоянную ориентациею объектом, то разностью Минковского является множество, которое содержит все переносы B, влекущие пересечение с A. Ближайшая точка от границы разности Минковского $\partial(A - B)$ до начала координат дает **разделяющее расстояние** между A и B. Если оба объекта пересекаются, то начало координат лежит внутри разности Минковского и полученное расстояние можно рассматривать как **расстояние глубины проникновения**.

Максимальное расстояние многоугольника

Максимальное расстояние многоугольника – расстояние между двумя выпуклыми многоугольниками $P = (p_1, ..., p_n)$ и $Q = (q_1, ..., q_n)$, определяемое как

$$\max_{i,j} \left\| p_i - q_j \right\|_2, \quad i \in \{1, ..., n\}, \quad j \in \{1, ..., m\}.$$

где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма.

Расстояние Гренандера

Пусть $P = (p_1, ..., p_n)$ и $Q = (q_1, ..., q_n)$ – два непересекающихся выпуклых многоугольника и $l(p_i,\ q_j)$, $l(p_m,\ q_l)$, – две пересекающиеся *критические* опорные линии для P и Q. Тогда **расстояние Гренандера** между P и Q определится как

$$\| p_i - q_j \|_2 + \| p_m - q_l \|_2 - \Sigma(p_i, p_m) - \Sigma(g_j, g_l),$$

где $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма и $\Sigma(p_i, p_m)$ – сумма длин ребер ломаной $p_i, ..., p_m$.

Здесь $P = (p_1, ..., p_n)$ – выпуклый многоугольник с вершинами в стандартной форме, т.е. вершины указываются в системе декартовых координат в направлении по часовой стрелке и при этом нет трех последовательных коллинеарных вершин. Прямая l является *опорной прямой* для P, если множество внутренних точек P

полностью лежит по одну сторону от l. Если имеются два непересекающихся многоугольника P и Q, то прямая $l(p_i, q_j)$ будет *критической опорной прямой*, если она является опорной прямой для P в p_i, опорной прямой для Q в q_j, при этом P и Q лежат по разные стороны от $l(p_i, q_j)$.

9.2. РАССТОЯНИЯ НА КОНУСАХ

Выпуклым конусом C в действительном векторном пространстве V называется подмножество C множества V, такое что $C + C \subset C$, $\lambda C \subset C$ для любого $\lambda \geq 0$ и $C \cap (-C) = \{0\}$. Конус C порождает *частичный порядок* на V по закону

$$x \preceq y \text{ тогда и только тогда, когда } y - x \in C.$$

Порядок $\preceq$ подчиняется векторной структуре V, т.е., если $x \preceq y$ и $z \preceq u$, то $x + z \preceq y + u$, и если $x \preceq y$, то $\lambda x \preceq \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$. Элементы $x, y \in V$ называются *сравнительными*, то обозначается как $x \sim y$, если существуют положительные действительные числа α и β, такие что $\alpha y \preceq x \preceq \beta y$. Сравнимость является отношением эквивалентности: ее классы эквивалентности (принадлежащие C или $-C$) называются *частями* (или *компонентами, составными частями*).

Для выпуклого конуса C подмножество $S = \{x \in C: T(x) = 1\}$, где $T: V \to \mathbb{R}$ есть некоторый положительный линейный функционал, называется *поперечным сечением* конуса C.

Выпуклый конус C называется *почти архимедовым*, если замыкание его сужения на любое двумерное подпространство также является конусом.

Томсоновская метрика частей

Пусть C – выпуклый конус в действительном векторном пространстве V. **Томсоновская метрика частей** на *части* $K \subset C\backslash\{0\}$ задается как

$$\ln \max\{m(x, y), m(y, x)\}$$

для любых $x, y \in K$, где $m(x, y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: y \preceq \lambda x\}$.

Если конус C *почти архимедов*, то часть K, снабженная томсоновской метрикой частей, является **полным** метрическим пространством. Если конус C конечномерен, то мы получаем *хордовое пространство*, т.е. метрическое пространство, в котором имеется выделенное множество геодезических, удовлетворяющих определенным аксиомам. *Положительный конус* $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n): x_i \geq 0 \text{ для } 1 \leq i < n$, снабженный Томсоновоской метрикой частей, изометричен *нормированному пространству*, которое можно рассматривать как плоское.

Если взять замкнутый конус C в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью, то внутренность конуса int$C$ можно рассматривать как n-мерное многообразие M^n. Если для любого касательного вектора $v \in T_p(M^n)$, $p \in M^n$ задана норма $\| v \|^T_p = \inf\{\alpha > 0: -\alpha p \preceq v \preceq \alpha p\}$, то длина любой кусочно дифференцируемой кривой $\gamma: [0, 1] \to M^n$ может быть записано как $l(\gamma) = \int_0^1 \| \gamma'(t) \|^T_{\gamma(t)}\, dt$, а расстояние между x и y будет равно $\inf_\gamma l(\gamma)$, где инфимум берется по всем таким кривым γ с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.

Гильбертова проективная полуметрика

Для выпуклого конуса C в действительном векторном пространстве V **гильбертова проективная полуметрика** есть полуметрика на $C\backslash\{0\}$, задаваемая как

$$\ln(m(x, y) \cdot m(y, x))$$

для любых $x, y \in C\backslash\{0\}$, где $m(x,y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: \ y \preceq \lambda x\}$.. Она равна 0 тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$ для некоторых $\lambda > 0$, и становится метрикой на пространстве лучей конуса.

Если конус C конечномерен, а S является поперечным сечением C (в частности, $S = \{x \in C: \|x\| = 1\}$, где $\|\cdot\|$ – норма на V), то для любых различных точек $x, y \in S$ расстояние между ними равно $|\ln(x, y, z, t)|$, где z, t – точки пересечения линии $l_{x,y}$ с границей S и (x, y, z, t) – ангармоническое отношение точек x, y, z, t.

Если конус C *почти архимедов* и конечномерен, то каждая часть конуса C является *хордовым пространством* относительно гильбертовой проективной метрики. Конус *Лоренца* $\{(t, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}: \ t^2 > x_1^2 + \ldots + x_n^2\}$, снабженный гильбертовой проективной метрикой, изометричен n-мерному *гиперболическому пространству*. *Положительный конус* $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots x_n): \ x_i \geq 0$ для $1 \leq i \leq n$, снабженный гильбертовой проективной метрикой, изометричен *нормированному пространству*, которое можно рассматривать как плоское.

Если взять замкнутый конус C в $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью, то внутренность конуса $\mathrm{int}C$ можно рассматривать как n-мерное многообразие M^n. Если для любого касательного вектора $v \in T_p(M^n)$ задана полунорма $\| v \|_p^H = m(p, v) - m(v, p)$, то длина любой кусочно дифференцируемой кривой γ: [0, 1] $\rightarrow$ M^n равна $l(\gamma) = \int_0^1 \| \gamma'(t) \|_{\gamma(t)}^H \, dt$, а расстояние между x и y равно $\inf_\gamma l(\gamma)$, где инфимум берется по всем таким кривым γ с $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.

Метрика Бушеля

Возьмем выпуклый конус C в действительном векторном пространстве V. **Метрика Бушеля** на множестве $S = \left\{ x \in C: \ \sum_{i=1}^n |x_i| = 1 \right\}$ (в общем случае на любом поперечном сечении конуса C) задается как

$$\frac{1 - m(x, y) \cdot m(y, x)}{1 + m(x, y) \cdot m(y, x)}$$

для любых $x, y \in S$, где $m(x,y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}: \ y \preceq \lambda x\}$. Именно, она равна $\mathrm{tg}\, h\left(\frac{1}{2} h(x, y)\right)$, где h – **гильбертова проективная полуметрика**.

***k*-ориентированное расстояние**

Симплициальный конус C в $\mathbb{R}^n$ определяется как пересечение n (открытых или замкнутых) полупространств, каждая из опорных плоскостей которых проходит через начало координат. Для любого множества X, состоящего из n точек на *единичной сфере*, существует единственный симплициальный конус C, содержащий все эти точки. *Оси* конуса C – n лучей, где каждый луч исходит из начала координат и содержит одну из точек множества X.

Для *разбиения* $\{C_1,..., C_k\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на множество симплициальных конусов $C_1,..., C_k$ **k-ориентированным расстоянием** называется метрика на $\mathbb{R}^n$, заданная как

$$d_k(x - y)$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$, где для любого $x \in C_i$ значение $d_k(x)$ есть длина наикратчайшего пути от начала координат до точки x при перемещении только по направлениям, параллельным осям конуса C.

Метрики конуса

Конусом $\mathrm{Con}(X, d)$ *над метрическим пространством* (X, d) называется фактор-произведение $X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, полученное отождествлением всех точек нити $X \times \{0\}$. Точка, соответствующая множеству $X \times \{0\}$, называется *вершиной* конуса.

Метрика евклидова конуса – метрика на $\mathrm{Con}(X)$, заданная для любых (x, y), $(y, s) \in \mathrm{Con}(X, d)$ как

$$\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(\min\{d(x, y), \pi\})}.$$

Конус $\mathrm{Con}(X, d)$ с этой метрикой называется *евклидовым конусом над метрическим пространством* (X, d).

Если (X, d) – компактное метрическое пространство диаметра <2, то **метрикой Кракуса** называется метрика на $\mathrm{Con}(X, d)$, определяемая для любых (x, y), $(y, s) \in \mathrm{Con}(X, d)$ как

$$\min\{s, t\}d(x, y) + |t - s|.$$

Конус $\mathrm{Con}(X, d)$ с метрикой Кракуса допускает существование единственной срединной точки для каждой пары его точек, если (X, d) обладает таким свойством.

Если M^n является многообразием с (псевдо)римановой метрикой g, то можно рассматривать метрику $dr^2 + r^2 g$ (в общем случае метрику $\frac{1}{k}dr^2 + r^2 g,\ k \neq 0$) на $\mathrm{Con}(M^n) = M^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Метрика взвеси

Сферический конус (или *взвесь*) $\Sigma(X)$ над метрическим пространством (X, d) есть фактор-произведение $X \times [0, a]$, полученное отождествлением всех точек нитей $X \times \{0\}$ и $X \times \{a\}$.

Если (X, d) является **пространством длины** с диаметром $\mathrm{diam}(X) \leq \pi$ и $a = \pi$, то **метрикой взвеси** называется метрика на $\Sigma(X)$, заданная для любых (x, y), y, s) $\in \Sigma(X)$ как

$$\arccos(\cos t\cos s + \sin t\sin s\cos d(x, y)).$$

9.3. РАССТОЯНИЯ НА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСАХ

r-Мерный *симплекс* (или *геометрический симплекс, гипертетраэдр*) представляет собой выпуклую оболочку $r + 1$ точек из $\mathbb{E}^n$, которые не принадлежат никакой $(r - 1)$-плоскости. Симплекс получил свое название потому, что обозначает простейший возможный выпуклый многогранник в любом заданном пространстве. Граница r-симплекса имеет $r + 1$ 0-*граней* (вершин многогранника), $\frac{r(r+1)}{2}$ 1-

граней (ребер многогранника) и $\binom{r+1}{i+1}$ *i-граней*, где $\binom{r}{i}$ – биномиальный коэффициент. *Вместимость* (т.е. *многомерный объем*) симплекса может быть вычислена с помощью *определителя Кэли–Менгера*. Правильный *r*-мерный симплекс обозначается как α_r.

Грубо говоря, *геометрический симплициальный комплекс* – пространство с *триангуляцией*, т.е. разбиением его на замкнутые симплексы таким образом, что любые два симплекса либо вообще не пересекаются, либо пересекаются по общей грани.

Абстрактный симплициальный комплекс S – множество с элементами, называемыми *вершинами*, в которых выделено семейство непустых подмножеств, называемых *симплексами*, таким образом, что каждое непустое подмножество симплекса *s* является симплексом, называемым *гранью s*, и каждое одноэлементное подмножество является симплексом. Симплекс называется *i*-мерным, если состоит из $i + 1$ вершин. *Размерностью S* является максимальная размерность его симплексов. Для каждого симплициального комплекса *S* существует триангуляция многогранника, для которой *S* является симплициальным комплексом. Такой геометрический симплициальный комплекс обозначается *GS* и называется *геометрической реализацией S*.

Симплициальная метрика

Пусть *S* – абстрактный симплициальный комплекс и *GS* – геометрический симплициальный комплекс, являющийся геометрической реализацией *S*. Точки *GS* можно отождествить с функциями $\alpha\colon S \to [0, 1]$, для которых множество $\{x \in S\colon \alpha(x) \neq 0\}$ является симплексом в *S* и $\sum_{x\in S} \alpha(x) = 1$. Число $\alpha(x)$ называется *x*-й *барицентрической координатой* α.

Симплициальная метрика – метрика, заданная на *GS* как

$$\sqrt{\sum_{x\in S} (\alpha(x) - \beta(x))^2}.$$

Многогранная метрика

Многогранной метрикой называется **внутренняя метрика** связного геометрического симплициального комплекса в $\mathbb{E}^n$, в котором отождествленные границы изометричны Именно, она определяется как инфимум длин всех ломаных линий, соединяющих точки *x* и *y* так, что каждое из звеньев принадлежит одному из симплексов.

Примером многогранной метрики является внутренняя метрика на поверхности многогранника в $\mathbb{E}^n$. Многогранную метрику можно рассматривать на комплексе симплексов в *пространстве постоянной кривизны*. В общем случае многогранные метрики рассматриваются для комплексов, являющихся *многообразиями* или *многообразиями с краем*.

Метрика полиэдральных цепей

r-Мерная *полиэдральная цепь A* в $\mathbb{E}^n$ задается линейным выражением $\sum_{i=1}^{m} d_i t_i^r$, где для любого *i* величина t_i^r является *r*-мерным симплексом в $\mathbb{E}^n$. *Границей* цепи

является линейная комбинация границ симплексов цепи. Границей r-мерной полиэдральной цепи является $(r-1)$-мерная цепь.

Метрикой полиэдральных цепей является **метрика нормы**

$$\| A - B \|$$

на множестве $C_r(\mathbb{E}^n)$ всех r-мерных полиэдральных цепей. В качестве нормы на $C_r(\mathbb{E}^n)$ может быть принята.

1. *Масса* полиэдральной цепи, т.е. $|A| = \sum_{i=1}^{m} |d_i||t_i^r|$, где $|t^r|$ – объем звена t_i^r.

2. *Бемольная норма* полиэдральной цепи, т.е. $|A|^b = \inf_D\{|A - \partial D| + |D|\}$, где $|D|$ – масса D, ∂D – граница D и инфимум берется по всем $(r+1)$-мерным полиэдральным цепям; пополнение метрического пространства $(C_r^b(\mathbb{E}^n), |\cdot|^b)$ бемольной нормой является **сепарабельным банаховым пространством**, обозначаемым как $C_r^b(\mathbb{E}^n)$, его элементы известны как r-мерные *бемольные плоские цепи*.

3. *Диезная норма* полиэдральной цепи, т.е.

$$|A|^b = \inf\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} |d_i||t_i^r||v_i|}{r+1} + \left| \sum_{i=1}^{m} d_i T_{v_i} t_i^r \right|^b \right),$$

где $|A|^b$ – бемольная норма A и инфимум берется по всем *сдвигам* v (здесь $T_v t^r$ – звено, полученное перемещением t^r на вектор v длины $|v|$); пополнение метрического пространства $(C_r(\mathbb{E}^n), |\cdot|^\#)$ диезной нормой является сепарабельным банаховым пространством, обозначаемым как $C_r^\#(\mathbb{E}^n)$, его элементы называются *r-мерными диезными плоскими цепями*. Бемольная цепь конечной массы является диезной. Если $r = 0$, то $|A|^b = |A|^\#$.

Метрическое пространство *полиэдральных коцепей* (т.е. линейных функций полиэдральных цепей) может быть задано аналогичным способом. В качестве нормы полиэдральной коцепи X может быть принята:

1. Комасса полиэдральной коцепи, т.е. $|X(A)$, где $X(A)$ – значение коцепи X на цепи A.

2. Бемольная конорма полиэдральной коцепи, т.е. $|X|^b = \sup_{|A|^b=1}\{X(A)|$.

3. Диезная конорма полиэдральной коцепи, т.е. $|X|^\# = \sup_{|A|^\#=1} |X(A)|$.

Часть III

РАССТОЯНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

Глава 10

Расстояния в алгебре

10.1. МЕТРИКИ НА ГРУППАХ

Группой $(G, \cdot, e)$ называется множество G с бинарной операцией $\cdot$, которая называется *групповой операцией*, совместно удовлетворяющие четырем фундаментальным свойствам *замыкания* ($x \cdot y \in G$ для любых $x, y \in G$), *ассоциативности* ($x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для любых $x, y, z \in G$), *существования единичного элемента* ($x \cdot e = e \cdot x = x$ для любого $x \in G$) и *существования обратного элемента* (для любого $x \in G$ существует $x^{-1} \in G$, такой что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$). В аддитивной форме записи группа $(G, +, 0)$ является множеством G с такой бинарной операцией $+$, что имеют место следующие свойства: $x + y \in G$ для любых $x, y \in G$, $x + (y + z) = (x + y) + z$ для любых $x, y, z \in G$, $x + 0 = 0 + x$ для любого $x \in G$, для любого $x \in G$ существует $-x \in G$, такой что $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Группа $(G, \cdot, e)$ называется *конечной*, если конечно множество G. Группа $(G, \cdot, e)$ называется *абелевой*, если она *коммутативна*, т.е. равенство $x \cdot y = y \cdot x$ справедливо для любых $x, y \in G$.

Многие из рассматриваемых в данном разделе метрик являются **метрикой нормы группы** на группе $(G, \cdot, e)$, заданной как

$$\| x \cdot y^{-1} \|$$

(или, иногда, как $\| y^{-1} \cdot x \|$), где $\| \cdot \|$ – *норма группы*, т.е. функция $\| \cdot \|: G \to \mathbb{R}$, такая что для любых $x, y \in G$ имеют место следующие свойства:

1) $\| x \| \geq 0$, с $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = e$;
2) $\| x \| = \| x^{-1} \|$;
3) $\| x \cdot y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (*неравенство треугольника*).

В аддитивной форме записи метрика нормы группы на группе $(G, +, 0)$ определяется как $\| x + (-y) \| = \| x - y \|$ или иногда как $\| (-y) + x \|$.

Простейшим примером метрики нормы группы является **биинвариантная ультраметрика** (иногда ее называют *хэммингово метрикой*) $\| x \cdot y^{-1} \|_H$, где $\| x \|_H = 1$ для $x \neq e$ и $\| e \|_H = 0$.

Биинвариантная метрика

Метрика (в общем случае – полуметрика) d на группе $(G, \cdot, e)$ называется **биинвариантной**, если равенство

$$d(x, y) = d(x \cdot z, y \cdot z) = d(z \cdot x, z \cdot y)$$

справедливо для любых $x, y, z \in G$ (см. **Инвариантная метрика переноса**). Любая **метрика нормы группы** на абелевой группе является бивариантной.

Метрика (в общем случае – полуметрика) d на группе $(G, \cdot, e)$ называется **правоинвариантной**, если равенство $d(x, y) = d(z \cdot x, z \cdot y)$ справедливо для любых $x, y, z \in G$, т.е. операция правого умножения на элемент z является **движением** метрического пространства (G, d). Любая метрика нормы группы, определяемая как $\| x \cdot y^{-1} \|$, является правоинвариантной.

Метрика (в общем случае – полуметрика) d на группе $(G, \cdot, e)$ называется **левоинвариантной**, если равенство $d(x, y) = d(z \cdot x, z \cdot y)$ справедливо для любых $x, y, z \in G$, т.е. операция левого умножения на элемент z является **движением** метрического пространства (G, d). Любая метрика нормы группы, определяемая как $\| y \cdot x^{-1} \|$, является левоинвариантной.

Любая правовариантная, равно как и левоинвариантная, в частности, любая биинвариантная метрика d на G является метрикой нормы группы, поскольку норму группы на G можно задать как $\| x \| = d(x, 0)$.

Положительно однородная метрика

Метрика (в общем случае – расстояние) d на абелевой группе $(G, +, 0)$ называется **положительно однородной**, если равенство

$$d(mx, my) = md(x, y)$$

справедливо для всех $x, y \in G$ и всех $m \in \mathbb{N}$, где mx – сумма m элементов, каждый из которых равен x.

Дискретная переноса метрика

Метрика нормы группы (в общем случае – полуметрика полунормы группы) на группе $(G, \cdot, e)$ называется **дискретной метрикой переноса**, если *расстояния переноса* (или *числа переноса*)

$$\tau_G(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\| x^n \|}{n}$$

элементов x без кручения (т.е. таких, что $x^n \neq e$ для любого $n \in \mathbb{N}$) по отношению к этой метрике являются отделенными от нуля.

Если числа $\tau_G(x)$ являются ненулевыми, то такая метрика нормы группы называется **собственной метрикой переноса**.

Словарная метрика

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечно порожденная группа с множеством A порождающих элементов. *Словарная длина* $w_W^A(x)$ элемента $x \in G \backslash \{e\}$ определяется как

$$w_W^A(x) = \inf\{r : \ x = a_1^{a_1} \ldots a_r^{a_r}, a_i \in A, e_i \in \{\pm 1\}\},$$

и $w_W^A(e) = 0$.

Словарная метрика d_W^A, *соответствующая множеству* A, есть метрика **нормы группы** на G, определяемая как

$$w_W^A(x \cdot y^{-1}),$$

Так как словарная длина w_W^A является *нормой группы* на G, то d_W^A **правоинвариантна**. Иногда она определяется как $w_W^A(y^{-1} \cdot x)$, и тогда она становится **левоинвариантной**. Именно, d_W^A – это максимальная метрика на G, которая является правовариантной и обладает тем свойством, что расстояние от любого элемента из A или из A^{-1} до единичного элемента e равно единице.

Если A и B – два конечных множества порождающих элементов группы $(G, \cdot, e)$, то тождественное отображение между метрическими пространствами (G, d_W^A) и

$(G,\ d_W^B)$ является **квазиизометрией**, т.е. словарная метрика единствена с точностью до квазиизометрии.

Словарная метрика – **метрика пути** *графа Кэли* Γ группы $(G, \cdot, e)$, построенного относительно A. Именно, Γ является графом с множеством вершин G, в котором две вершины x и $y \in G$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $y = a^{\varepsilon}x, \varepsilon = \pm 1$, $a \in A$.

Взвешенная словарная метрика

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечно порожденная группа с множеством A порождающих элементов. Если имеется ограниченная *весовая функция* $w\colon A \to (0, \infty)$, то *взвешенная словарная длина* $w_{WW}^A(x)$ элемента $x \in G\backslash\{e\}$ определяется как

$$w_{WW}^A(x) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{t} w(a_i), t \in \mathbb{N}:\ x = a_1^{e_1}\ldots a_t^{e_t}, a_i \in A, e_i \in \{\pm 1\}\right\},$$

и $w_{WW}^A(e) = 0$.

Взвешенная словарная метрика d_{WW}^A, *соответствующая* A, есть **метрика нормы группы** на G, определенная как

$$w_{WW}^A(x \cdot y^{-1}).$$

Поскольку взвешенная словарная длина w_{WW}^A является *нормой группы* на G, то d_{WW}^A будет **правоинвариантной**. Иногда она задается как $w_{WW}^A(y^{-1} \cdot x)$ и в этом случае она является **левоинвариантной**.

Метрика d_{WW}^A является супремумом полуметрик d на G, обладающих свойством $d(e, a) \le w(a)$ для любого $a \in A$.

Метрика d_{WW}^A является **метрикой упрощенного пути**, и каждая правоинвариантная метрика упрощенного пути является весовой словарной метрикой с точностью до **грубой изометрии**.

Метрика d_{WW}^A является **метрикой пути** *взвешенного графа Кэли* Γ_W группы $(G, \cdot, e)$, построенного относительно A. Именно, Γ_W является взвешенным графом с множеством вершин G, в котором две вершины x и $y \in G$ соединены ребром с весом $w(a)$ тогда и только тогда, когда $y = a^{\varepsilon}x,\ \varepsilon = \pm 1,\ a \in A$.

Метрика интервальной нормы

Метрика интервальной нормы есть **метрика нормы группы** на конечной группе $(G, \cdot, e)$, определенная как

$$\| x \cdot y^{-1} \|_{\text{int}},$$

где $\| \cdot \|_{\text{int}}$ – *интервальная норма* на G, т.е. такая *норма группы*, что значения $\| \cdot \|_{\text{int}}$ образуют множество последовательных целых чисел, начиная с 0.

Каждой интервальной норме $\| \cdot \|_{\text{int}}$ соответствует упорядоченное *разбиение* $\{B_0,..., B_m\}$ множества G с $B_i = \{x \in G: \| x \|_{\text{int}} = i\}$ (см. **расстояние Шарма–Кошека**, гл. 16). *Норма Хэмминга* и *норма Ли* являются особыми случаями интервальной нормы. *Обобщенная норма Ли* – интервальная норма, для которой каждый класс имеет форму $B_i = \{a, a^{-1}\}$.

C-метрика

C-метрика d – метрика на группе $(G, \cdot, e)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) значения d образуют множество последовательных целых чисел, начиная с 0;

2) кардинальное число сферы $S(x, r) = \{y \in G: d(x, y) = r\}$ не зависит от выбора $x \in G$.

Словарная метрика, хэммингова метрика и метрика Ли являются C-метриками. Любая **метрика интервальной нормы** есть C-метрика.

Метрика нормы порядка

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечная абелева группа. Пусть $\mathrm{ord}(x)$ – *порядок* элемента $x \in G$, т.е. наименьшее положительное целое число n, такое что $x^n = e$. Тогда функция $\| \cdot \|_{\mathrm{ord}}: G \to \mathbb{R}$, определенная как $\| \cdot \|_{\mathrm{ord}} = \mathrm{lnord}(x)$, является *нормой группы* на G и называется *нормой порядка*.

Метрика нормы порядка – **метрика нормы группы** на G, определенная как

$$\| x \cdot y^{-1} \|_{\mathrm{ord}}.$$

Метрика нормы мономорфизма

Пусть $(G, +, 0)$ – группа и $(H, \cdot, e)$ – группа с *нормой группы* $\| \cdot \|_H$. Пусть f: $G \to H$ – *мономорфизм* групп G и H, т.е. инъективная функция, такая что $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ для всех $x, y \in G$. Тогда функция $\| \cdot \|_G^f: G \to \mathbb{R}$, заданная как $\| x \|_G^f = \| f(x) \|_H$, является *нормой группы* на G и называется *нормой мономорфизма*.

Метрика нормы мономорфизма – метрика нормы группы на G, определяемая как

$$\| x - y \|_G^f .$$

Метрика нормы произведения

Пусть $(G, +, 0)$ – группа с *нормой группы* $\| \cdot \|_G$ и $(H, \cdot, e)$ – группа с нормой группы $\| \cdot \|_H$. Пусть $G \times H = \{\alpha = (x, y): x \in G, y \in H\}$ – декартово произведение G и H, и пусть $(x, y) \cdot (x, t) = (x + z, y \cdot t)$. Тогда функция $\| \cdot \|_{G \times H}: G \times H \to \mathbb{R}$, определенная как $\| \alpha \|_{G \times H} = \| (x, y) \|_{G \times H} = \| x \|_G + \| y \|_H$,, есть норма группы на $G \times H$, называемая *нормой произведения*.

Метрика нормы произведения есть **метрика нормы группы**, определенная как

$$\| \alpha \cdot \beta^{-1} \|_{G \times F} .$$

На декартовом произведении $G \times H$ двух конечных групп с *интервальными нормами* $\| \cdot \|_G^{\mathrm{int}}$ и $\| \cdot \|_H^{\mathrm{int}}$ может быть задана интервальная норма $\| \cdot \|_{G \times H}^{\mathrm{int}}$. Именно, $\| \alpha \|_{G \times H}^{\mathrm{int}} = \| (x, y \|_{G \times H}^{\mathrm{int}} = \| x \|_G + (m + 1) \| y \|_H$, где $m = \max_{a \in G} \| a \|_G^{\mathrm{int}}$.

Метрика фактор-нормы

Пусть $(G, \cdot, e)$ – группа с *нормой группы* $\| \cdot \|_G$ и $(H, \cdot, e)$ – нормальная подгруппа группы $(G, \cdot, e)$, $xN = Nx$ для любых $x \in G$. Пусть $(G/N, \cdot, eN)$ – *фактор-группа группы* G, т.е. $G/N = \{xN: x \in G$: с $xN = \{x \cdot a: a \in N\}$ и $xN \cdot yN = xyN$. Тогда функция $\| \cdot \|_{G/N}: G/N \to \mathbb{R}$, заданная как $\| xN \|_{G/N} = \min_{a \in N} \| xa \|_X$, – норма группы G/N на и называемая *фактор-нормой*.

Метрика фактор-нормы есть **метрика нормы группы** на G/N, определенная как

$$\| xN \cdot (yN)^{-1} \|_{G/N} = \| xy^{-1}N \|_{G/N} .$$

Если $G = \mathbb{Z}$ с нормой, равной абсолютному значению, и $N = m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, то фактор-норма на $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$ совпадает с *нормой Ли*.

Если метрика d на группе $(G, \cdot, e)$ **правоинвариантна**, то для любой нормальной подгруппы $(N, \cdot, e)$ группы $(G, \cdot, e)$ метрика d порождает правоинвариантную метрику (именно, **хаусдорфову метрику**) d^* на G/N по закону

$$d^*(xN, yN) = \max\left\{\max_{b\in yN}\min_{a\in xN} d(a,b), \max_{a\in xN}\min_{b\in yN} d(a,b)\right\}.$$

Расстояние коммутирования

Пусть $(G, \cdot, e)$ – конечная неабелева группа. Пусть $Z(G) = \{c \in G: x \cdot c = c \cdot x$ для любого $z \in G\}$ – *центр G*. *Граф коммутирования* группы G определяется как граф с множеством вершин G, в котором различные элементы $x, y \in G$ соединены ребром всякий раз, когда они *коммутируют*, т.е. $x \cdot y = y \cdot x$. Очевидно, что любые два различных элемента $x, y \in G$, которые не коммутируют, в данном графе соединены путем x, c, y, где c – любой элемент из $Z(G)$ (например, e). Путь $x = x^1, x^2, \ldots, x^k = y$ в графе коммутирования называется $(x – y)N$*–путем*, если $x^i \notin Z(G)$ для любого $i \in \{1,\ldots, k\}$. В этом случае элементы $x, y \in G \setminus Z(G)$ называются *N-соединенными*.

Расстоянием коммутирования (см. [DeHu98]) d называется расширенное расстояние на G, такое что выполняются следующие условия:

1) $d(x, x) = 0$;

2) $d(x, x) = 1$, если $x \neq y$ и $x \cdot y = y \cdot x$;

3) $d(x, x)$ является минимальной длиной $(x – y)N$-пути для любых N-соединенных элементов x и $y \in G\setminus Z(G)$;

4) $d(x, x) = \infty$, если $x, y \in G\setminus Z(G)$ не соединены никаким N-путем.

Модулярное расстояние

Пусть $(\mathbb{Z}_m, +, 0)$, $m \geq 2$ – конечная *циклическая группа* и $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Модулярный r-вес* $w_r(x)$ элемента $x \in \mathbb{Z}_m = \{0, 1,\ldots, m\}$ определяется как $w_r(x) = \min\{w_r(x), w_r(m – x)\}$, где $w_r(x)$ – *арифметический r-вес* целого числа x. Значение $w_r(x)$ можно получить как число ненулевых коэффициентов в *обобщенной несмежной форме* $x = e_n r^n + \ldots + e_1 r + e_0$ с $e_i = \mathbb{Z}$, $|e_i| < r$, $|e_i + e_{i+1}| < r$ и $|e_i| \leq |e_{i+1}|$, если $e_i e_{i+1} < 0$ (см. **метрика арифметической *r*-нормы**, гл. 12).

Модулярное расстояние – расстояние на $\mathbb{Z}_m$, определенное как

$$w_r(x – y).$$

Модулярное расстояние является метрикой для $w_r(m) = 1$, $w_r(m) = 2$ и для некоторых особых случаев с $w_r(m) = 3$ или 4. В частности, оно является метрикой для $m = r^n$ или $m = r^n – 1$; если $r = 2$, то оно будет метрикой и для $m = 2^n + 1$ (см., например, [Ernv85]).

Наиболее популярной метрикой на $\mathbb{Z}_m$ является **метрика Ли**, определяемая как $\| x – y \|_{Lee}$, где $\| x \|_{Lee} = \min\{x, m – x\}$ – *норма Ли* элемента $x \in \mathbb{Z}_m$.

Метрика *G*-нормы

Рассмотрим конечное поле F_{p^n} для простого числа p и натурального числа n.

Для данного компактного выпуклого центральносимметричного тела G в $\mathbb{R}^n$ определим *G-норму* элемента $x \in F_{p^n}$ как $\| x \|_G = \inf\{\mu \geq 0 : \ x \in p\mathbb{Z}^n + \mu G\}$.

Метрика *G*-нормы есть **метрика нормы группы** на F_{p^n}, определенная как

$$\| x \cdot y^{-1} \|_G .$$

Метрика нормы перестановок

Возьмем конечное метрическое пространство (X, d). **Метрикой нормы перестановок** называется **метрика нормы группы** на группе $(\mathrm{Sym}_X, \cdot, \mathrm{id})$ всех перестановок множества X (id – *тождественное отображение*), определенная как

$$\| f \cdot g^{-1} \|_{\mathrm{Sym}},$$

где норма группы $\| \cdot \|_{\mathrm{Sym}}$ на Sym_X задается как $\| f \|_{\mathrm{Sym}} = \max\limits_{x \in X} d(x, f(x))$.

Метрика движений

Пусть (X, d) – произвольное метрическое пространство и $p \in X$ – фиксированный элемент из X.

Метрикой движений (см. [Buse55]) называется метрика на группе $(\Omega, \cdot, \mathrm{id})$ всех **движений** пространства (X, d) (id – *тождественное отображение*), определенная как

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \cdot \mathrm{e}^{-d(p,x)}$$

для любых $f, g \in \Omega$ (см. **Буземанова метрика множеств**, гл. 3). Если пространство (X, d) ограничено, то подобную метрику на Ω можно определить как

$$\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Для полуметрического пространства (X, d) **полуметрику движений** на $(\Omega, \cdot, \mathrm{id})$ можно определить как

$$d(f(p), g(p)).$$

Полуметрика общей линейной группы

Пусть $\mathbb{F}$ – локально компактное недискретное *топологическое поле*. Пусть $\left(\mathbb{F}^n, \| \cdot \|_{\mathbb{F}^n}\right)$, $n \geq 2$ – *нормированное векторное пространство* над $\mathbb{F}$. Пусть $\| \cdot \|$ – *операторная норма*, ассоциированная с нормированным векторным пространством $\left(\mathbb{F}^n, \| \cdot \|_{\mathbb{F}^n}\right)$, и пусть $GL(n, \mathbb{F})$ – *общая линейная группа* над $\mathbb{F}$. Тогда функция $| \cdot |_{\mathrm{op}}$: $GL(n, \mathbb{F})$, определенная как $| g |_{\mathrm{op}} = \sup\{| \ln \| g \| |, \ | \ln \| g^{-1} \| |\}$, является полунормой на $GL(n, \mathbb{F})$.

Полуметрика общей линейной группы есть полуметрика на группе $GL(n, \mathbb{F})$, заданная как

$$| g \cdot h^{-1} |_{\mathrm{op}} .$$

Она является **правоинвариантной** полуметрикой, которая единственна с точностью до **грубой изометрии**, поскольку любые две нормы на $\mathbb{F}$ являются **билипшицево эквивалентными**.

Полуметрика обобщенного тора

Пусть $(T, \cdot, e)$ – *обобщенный тор*, т.е. *топологическая группа*, которая изоморфна прямому произведению n мультипликативных групп $\mathbb{F}_i^*$ локально комактных недискретных *топологических полей* $\mathbb{F}_i$. Тогда существует собственный непрерывный гомоморфмизм v: $T \to \mathbb{R}^n$, именно, $v(x_1, \ldots, x_n) = (v_1(x_n))$, где v_1: $\mathbb{F}_i^* \to \mathbb{R}$ являются собственными непрерывными гомоморфизмами из $\mathbb{F}_i^*$ в аддитивную группу $\mathbb{R}$, заданными как логарифм *валюации*. Всякий другой собственный непрерывный гомоморфизм v': $T \to \mathbb{R}^n$ имеет вид $v' = \alpha \cdot v$ с $\alpha \in GL(n, \mathbb{R})$. Если $\| \cdot \|$ является нормой на $\mathbb{R}^n$, то получаем соответствующую полунорму $\| x \|_T = \| v(x) \|$ на T.

Полуметрика обобщенного тора есть полуметрика на группе $(T, \cdot, e)$, определенная как

$$\| xy^{-1} \|_T = \| v(xy^{-1}) \| = \| v(x) - v(y) \| .$$

Метрика Гейзенберга

Пусть $(H, \cdot, e)$ – *первая гейзенбергова группа*, т.е. группа на множестве $H = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}$ с групповым законом $x \cdot y = (z,t) \cdot (u,s) = (z + u, t + s + 2\Im(z\overline{u}))$ и единичным элементом $e = (0, 0)$. Пусть $|\cdot|_{\text{Heis}}$ – *гейзенбергова норма* на H, определенная как $| x |_{\text{Heis}} = | (z,t) |_{\text{Heis}} = (| z |^4 + t^2)^{1/4}$.

Метрика Гейзенберга (или **метрика шаблона, метрика Кораньи**) d_{Heis} есть **метрика нормы** на H, определенная как

$$| x^{-1} \cdot y |_H .$$

Другая естественная метрика на $(H, \cdot, e)$ – **метрика Карно–Каратеодори** (или *C-C метрика, контрольная метрика*) d_C, определяемая как **внутренняя метрика** с использованием горизонтальных векторных полей на H. Метрики d_{Heis} и d_C являются **билипшицево эквивалентными**; именно, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} d_{\text{Heis}}(x,y) \le d_C(x,y) \le$ $\le d_{\text{Heis}}(x,y)$.

Метрику Гейзенберга можно задать аналогичным образом на любой гейзенберговой группе $(H^n, \cdot, e)$ с $H^n = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{R}$.

Метрика между интервалами

Пусть G – множество интервалов $[a, b]$ из $\mathbb{R}$. Множество G образует полугруппы $(G, +)$ и $(G, \cdot)$ относительно сложения $I + J = \{x + y: x \in I, y \in J\}$ и умножения $I \cdot J = \{x \cdot y: x \in I, y \in J\}$ соответственно.

Метрика между интервалами – метрика на G, заданная как $\max\{| I |, | J |\}$ для всех $I, J \in G$, где для $I = [a, b]$ имеем $| I | = | a - b |$.

Полуметрика кольца

Пусть $(A, +, \cdot)$ – *факториальное кольцо*, т.е. кольцом, в котором разложение на множители единственно. **Полуметрикой кольца** называется полуметрика на множестве $A\backslash\{0\}$, определяемая как

$$\ln \frac{l.c.m.(x,y)}{g.c.d.(x,y)},$$

где *l.c.m.*(x, y) – наименьшее *общее кратное* и *g.c.d.*(x, y) – *наибольший общий делитель* элементов $x, y \in A\backslash\{0\}$.

10.2. МЕТРИКИ НА БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЯХ

Бинарное отношение R на множестве X является подмножеством $X \times X$. Оно представляет собой множество дуг орграфа (X, R) с множеством вершин X.

Бинарное отношение R, которое является *симметричным* (если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$), *рефлексивным* (все $x, x) \in R$ и *транзитивным* (если (x, y), $(y, z) \in R$, то $(x, z) \in R$), называется *отношением эквивалентности* или *разбиением* (X на классы эквивалентности). Любая *q-арная последовательность* $x = (x_1,\ldots, x_n)$, $q \geq 2$ (т.е. $0 \leq x_i \leq q - 1$ для $1 \leq i \leq n$) соответствует разбиению $\{B_0,\ldots, b_{q-1}\}$ множества $V, = \{1,\ldots, n\}$, где $B_j = \{1 \leq i \leq n: x_i = j\}$ – классы эквивалентности.

Бинарное отношение R, которое является *антисимметричным* (если (x, y), (y, x) $\in R$, то $x = y$), *рефлексивным* и *транзитивным*, называется *частичным порядком*, а пара (X, R) называется *частично упорядоченным множеством.* Частичный порядок R на X также обозначается как $\preceq$ с $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in R$. Порядок $\preceq$ называется *линейным*, если любые два элемента $x, y \in X$ *сравнимы*, т.е. $x \preceq y$ или $y \preceq x$.

Частично упорядоченное множество $(L, \preceq)$ называется *решеткой*, если каждые два элемента $x, y \in L$ обладают *объединением* $x \vee y$ и *пересечением* $x \wedge y$. Все разбиения X образуют решетку измельчению; она является подрешеткой решетки (по включению) всех бинарных отношений.

Расстояние Кемени

Расстояние Кемени между бинарными отношениями R_1 и R_2 на множестве X есть **хэммингова метрика** $|R_1 \Delta R_2|$.. Оно в 2 раза превышает минимальное число инверсий пар смежных элементов из X, необходимое для получения R_2 из R_1.

Если R_1, R_2 являются *разбиениями*, то расстояние Кемени совпадает с *расстоянием Миркина–Черного* и $1 - \dfrac{|R_1 \Delta R_2|}{n(n-1)}$ является *индексом Рэнда*.

Если бинарные отношения R_1, R_2 являются *линейными порядками* (или *ранжированиями, перестановками*) на множестве X, то расстояние Кемени совпадает с **метрикой инверсии** на перестановках.

Расстояние Драпала–Кепки между различными квазигруппами $(X, +)$ и $(X, \cdot)$ определяется как $|\{(x, y): x + y \neq x \cdot y\}|$.

Метрики между разбиениями

Пусть X – конечное множество с числом элементов $n = |X|$ и пусть A, B – непустые подмножества множества X. Пусть P_X – множество разбиений X и P, $Q \in Px$. Пусть $B_1,\ldots, B_q$ – *блоки* разбиения P, т.е. попарно непересекающиеся множества, такие что $X = B_1 \cup \ldots \cup B_q$, $q \geq 2$. Пусть $P \vee Q$ есть *объединение* P и Q, а $P \vee Q$ – *пересечение* P и Q в *решетке* $\mathbb{P}$ *разбиений* множества X.

Рассмотрим следующие *операции редактирования* на разбиениях:

– *пополнение* преобразует разбиение P множества $A \backslash \} B\}$ в разбиение множества A либо включением объектов из B в некоторый блок, либо включением самого B в качестве нового блока;

– *удаление* преобразует разбиение P множества A в разбиение множества $A \backslash \{B\}$ посредством удаления объектов из B из каждого содержащего их блока;

– *деление* преобразует одно разбиение P в другое посредством одновременного удаления B из B_i (где $B \subset B_i$, $B \neq B_i$) и добавления B как нового блока;

– *объединение* преобразует одно разбиение P в другое посредством одновременного удаления B из B_i (где $B = B_i$) и добавления B в B_j (где $j \neq i$);

– *перенос* преобразует одно разбиение P в другое посредством одновременного удаления B из B_i (где $B \subset B_i$) и добавления B в B_j (где $j \neq i$).

Определим (см., например, [Day81]) применительно к вышеуказанным операциям следующие **метрики редактирования** на P_X:

1) минимальное количество пополнений и удалений единичных объектов, необходимых для преобразования P в Q;

2) минимальное количество делений, объединений и переносов единичных объектов, необходимых для преобразования P в Q;

3) минимальное количество делений, объединений и переносов, необходимых для преобразования P в Q;

4) минимальное количество делений и объединений, необходимых для преобразования P в Q; именно, оно равно $|P| + |Q| - 2|P \vee Q|$;

5) $\sigma(P) + \sigma(Q) - 2\sigma(P \wedge Q),$, где $\sigma(P) = \sum_{P_u \in P} |P_i|(|P_i| - 1)$;

6) $e(P) + \sigma(Q) - 2e(P \wedge Q)$, где $e(P) = \log_2 n + \sum_{P_i \in P} \frac{|P_i|}{n} \log_2 \frac{|P_i|}{n}$.

Расстояние Ренье есть минимальное число элементов, которые необходимо переместить между блоками разбиения P с тем, чтобы преобразовать его в Q (см. **Расстояние бульдозера**, гл. 21 и вышеуказанную метрику 2).

10.3. МЕТРИКИ РЕШЕТОК

Возьмем частотно упорядоченное множество $(L, \preceq)$. *Пересечение* (или *инфимум*) $x \wedge y$ (если yj существует) двух элементов x и y является единственным элементом, удовлетворяющим условию $x \wedge y \preceq x, y$ и $z \preceq x \wedge y$, если $z \preceq x, y$. Аналогичным образом *объединение* (или *супремум*) $x \vee y$ (если оно существует) является единственным элементом, таким что $x, y \preceq x \vee y$ и $x \vee y \preceq z$, если $x, y \preceq z$.

Частотно упорядоченное множство $(L, \preceq)$ называется *решеткой*, если каждые два элемента $x, y \in L$ имеют объединение $x \vee y$ и пересечение $x \wedge y$. Частотно упорядоченное множество $(L, \preceq)$ называется *полурешеткой пересечения* (или *нижней полурешеткой*), если задана только операция пересечения. Частично упорядоченное множество $(L, \preceq)$ называется *полурешеткой объединения* (или *верхней полурешеткой*), если задана только операция объединения.

Решетка $\mathbb{L} = (L, \preceq, \vee, \wedge)$ называется *полумодулярной решеткой* (или *полудедекиндовой решеткой*), если *отношение модулярности* xMy симметрично: xMy влечет yMx для всех $x, y \in L$. *Отношение модулярности* здесь определяется следующим образом: два элемента x и y считаются *модулярной парой*, что обозначается как xMy, если $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ для любых $z \preceq x$. Решетка $\mathbb{L}$, в которой каждая пара элементов является модулярной, называется *модулярной решеткой* (или *дедекиндовой решеткой*). Решетка является модулярной тогда и только тогда, когда действует *закон модулярности*: если $z \preceq x$, то $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ для любого y. Решетка называется *дистрибутивной*, если $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ выполняется для всех $x, y, z \in L$.

Для данной решетки $\mathbb{L}$ функция v: $L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, удовлетворяющая условию $v(x \vee y) + v(x \wedge y) \leq v(x) + v(y)$ для всех $x, y \in L$, называется субвалюацией на $\mathbb{L}$. Субвалюация v называется *изотонной*, если $v(x) \leq v(y)$ всякий раз, когда $x \preceq y$, и называется *положительной*, если $v(x) < v(y)$ всякий раз, когда $x \preceq y$, $x \neq y$.

Субвалюация v называется *валюацией*, если она изотонна и равенство $v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y)$ справедливо для всех $x, y \in L$. Целочисленное валюация называется *высотой* (или *длиной*) решетки $\mathbb{L}$.

Метрика валюации решетки

Пусть $\mathbb{L} = (L, \preceq, \vee, \wedge)$ – решеткf и v – изотонная субвалюация на $\mathbb{L}$. *Полуметрика субвалюации решетки* d_v на $\mathbb{L}$ определяется как

$$2v(x \vee y) - v(x) - v(y).$$

(Она может быть также задана на некоторых полурешетках). Если v является положительной субвалюацией на $\mathbb{L}$, то получим метрику, которая называется **метрикой субвалюации решетки**. Если v – валюация, то d_v можно записать как

$$v(x\vee) - v(x \wedge y) = v(x) + v(y) - 2v(x \wedge y);$$

в этом случае d_s называется *полуметрикой валюации* Если v является положительной валюацией на $\mathbb{L}$, то получаем метрику, называемую **метрикой валюации решетки**.

Если $\mathbb{L} = \mathbb{N}$ (множество натуральных чисел), $x \vee y = l.c.m.(x, y)$ (наименьшее общее кратное), $x \wedge y = g.c.d.(x, y)$ (наибольший общий делитель) и положительная валюация $v(x) = \ln x$, то $d_v(x, y) = \ln \dfrac{l.c.m.(x,y)}{g.c.d.(x,y)}$. Данную метрику можно обобщить на любое *факториальное кольцо* (т.е. кольцо с единственной факторизацией), снабженное положительной валюацией v, такой что $v(x) \geq 0$ с равенством только для мультипликативной единицы кольца и $v(xy) = v(x) + v(y)$.

Метрика конечных подгрупп

Пусть $(G, \cdot, e)$ – группа и $\mathbb{L} = (L, \subset, \cap)$ – нижняя полурешетка всех конечных подгрупп группы $(G, \cdot, e)$ с пересечением $X \cap Y$ и валюацией $v(X) = \ln |X|$.

Метрика конечных подгрупп есть **метрика валюации** на $\mathbb{L}$, определяемая как

$$v(X) + v(Y) - 2v(X \wedge Y) = \ln \frac{|X||Y|}{(|X \cap Y|)^2}.$$

Скалярная и векторная метрики

Пусть $\mathbb{L} = (L, \leq, \max, \min)$ – решетка с объединением $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ пересечением на множестве $L \subset [0, \infty)$, имеющим заданное число a как наибольший элемент и замкнутое относительно *отрицания*, т.е. для любого $x \in L$ имеем $\bar{x} = a - x \in L$.

Скалярная метрика d на L задается для $x \neq y$ как

$$d(x, y) = \max\{\min\{x, \bar{y}\}, \min\{\bar{x}, y\}\}.$$

Скалярная метрика d^* на $L^* = L \cup \{*\}$, определяется для $x \neq y$ как

$$d^*(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{если} \quad x,y \in L, \\ \max\{x,\bar{x}\}, & \text{если} \quad y = *, x \neq *, \\ \max\{y,\bar{y}\}, & \text{если} \quad x = *, y \neq *. \end{cases}$$

Для данной нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ **векторная метрика** на L^n задается как

$$\|(d(x_1,y_1),\ldots,d(x_n,y_n))\|$$

и **векторная метрика** на $(L^*)^n$ задается как

$$\|(d^*(x_1,y_1),\ldots,d^*(x_n,y_n))\|.$$

Векторная метрика на $L_2^n = \{0,1\}^n$ с l_1-*нормой* на $\mathbb{R}^n$ называется **расстоянием Фреше–Никодима–Аронзяна**. Векторная метрика на $L_m^n = \left\{0, \frac{1}{m-1}, \ldots, \frac{m-2}{m-1}, 1\right\}^n$ с l_1-*нормой* на $\mathbb{R}^n$ называется ***m*-значной метрикой Сгарро**. Векторная метрика на $[0,1]^n$ с l_1-*нормой* на $\mathbb{R}^n$ называется **нечетко определенной метрикой Сгарро**. Если L есть L_m или $[0,1]$ и $x = (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+r})$, $y = (y_1,\ldots,y_n,*,\ldots,*)$, где * стоит на r местах, то векторная метрика между x и y является **метрикой Сгарро** (см., например, [CSY01]).

Метрики на пространстве Рисса

Пространство Рисса (или *векторная решетка*) есть частично упорядоченное векторное пространство $(V_{\mathrm{Ri}}, \preceq)$, в котором выполняются следующие условия:

1) структура векторного пространства и частично упорядоченная структура совместимы: из $x \preceq y$ следует, что $x + z \preceq y + z$, а из $x \succ 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ следует, что $\lambda x \succ 0$;

2) для любых двух элементов $x, y \in V_{\mathrm{Ri}}$ существует объединение $x \vee y \in V_{\mathrm{Ri}}$ (в частности, существует объединение и пересечение любого конечного множества элементов на V_{Ri}).

Метрика нормы Рисса есть **метрика нормы** на V_{Ri}, заданная как

$$\|x - y\|_{\mathrm{Ri}},$$

где $\|\cdot\|_{\mathrm{Ri}}$ – *норма Рисса*, т.е. *норма* на V_{Ri}, такая что для любых $x, y \in V_{\mathrm{Ri}}$ из неравенства $|x| \leq |y|$, где $|x| = (-x) \vee (x)$ следует неравенство $\|x\|_{\mathrm{Ri}} \leq \|y\|_{\mathrm{Ri}}$. Пространство $((V_{\mathrm{Ri}}, \|\cdot\|_{\mathrm{Ri}})$ называется *нормированным пространством Рисса.* В случае полноты оно называется *банаховой решеткой*. Все нормы Рисса на банаховой решетке эквивалентны.

Элемент $e \in V_{\mathrm{Ri}}^+ = \{x \in V_{\mathrm{Ri}} : x \succ 0\}$ называется *сильной единицей* для V_{Ri}, если для каждого $x \in V_{\mathrm{Ri}}$ существует $\lambda \in \mathbb{R}$, такое что $|x| \preceq \lambda e$. Если пространство Рисса V_{Ri} имеет сильную единицу e, то $\|x\| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |x| \preceq \lambda e\}$ является нормой Рисса и на V_{Ri} получим метрику нормы Рисса

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : |x - y| \preceq \lambda e\}.$$

Слабой единицей для V_{Ri} является элемент e из V_{Ri}^{+}, такой что $e \wedge |x| = 0$ влечет $x = 0$. Пространство Рисса V_{Ri} называется *архимедовым*, если для любых двух $x, y \in V_{\mathrm{Ri}}^{+}$ существует натуральное число n, такое что $nx \preceq y$. **Равномерная метрика** на архимедовом пространстве Рисса со слабой единицей e определяется как

$$\inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |x - y| \wedge e \preceq \lambda e\}.$$

Расстояние галереи для флагов

Пусть $\mathbb{L}$ – решетка. *Цепь* C в $\mathbb{L}$ есть подмножество множества L, которое является *линейно упорядоченным*, т.е. любые два элемента из C сравнимы между собой. *Флагом* называется цепь в $\mathbb{L}$, которая является максимальной относительно включению. Если $\mathbb{L}$ является полумодулярной решеткой, содержащей конечный флаг, то $\mathbb{L}$ имеет единственный минимальный и единственный максимальный элемент, и любые два флага C, D в $\mathbb{L}$ имеют одинаковое кардинальное число $n + 1$. Тогда n – это высота решетки $\mathbb{L}$. Два флага C, D в $\mathbb{L}$ называются *смежными*, если они совпадают или D содержит только один элемент вне C. *Галереей* от C к D длины m называется последовательность флагов $C = C_0, C_1, \ldots, C_m = D$, такая что C_{i-1} и C_i являются смежными для $i = 1, \ldots, m$.

Расстояние галереи для флагов (см. [Abel91]) есть расстояние на множестве всех флагов полумодулярной решетки $\mathbb{L}$ конечной высоты, определяемое как минимум длин галерей из C к D. Оно может быть записано как

$$|C \vee D| - |C| = |C \vee D| - |D|,$$

где $C \vee D = \{c \vee d : \ c \in C, \ d \in D\}$ является верхней подполурешеткой, порожденной C и D.

Расстояние галереи для флагов меток является специальным случаем **метрики галереи** (для *системы камер*, состоящей из флагов).

Глава 11

РАССТОЯНИЯ НА СТРОКАХ И ПЕРЕСТАНОВКАХ

Алфавит – конечное множество $\mathcal{A}$, $|\mathcal{A}| \geq 2$, элементы которого называются *буквами* (или *символами*). *Строка* (или *слово*) есть последовательность букв над данным конечным алфавитом $\mathcal{A}$. Множество всех конечных последовательностей над алфавитом $\mathcal{A}$ обозначается как $W(\mathcal{A})$.

Подстрока (или *фактор, цепочка, блок*) строки $x = x_1,\ldots, x_n$ – любая ее подпоследовательность сменных элементов $x_i x_{i+1}...x_k$ с $1 \leq i \leq k \leq n$. *Префиксом* строки $x_1...x_n$ является любая ее подстрока, начинающаяся с x_1; *суффикс* – любая ее подстрока, заканчивающиаяся на x_n. Если строка является частью текста, то *разделительные знаки* (пробел, точка, запятая и т.п.) добавляются к алфавиту $\mathcal{A}$.

Вектор – любая конечная последовательность из действительных чисел, т.е. конечная строка над *бесконечным алфавитом* $\mathbb{R}$. *Вектором частот* (или *дискретным распределением вероятностей*) является любая строка $x_1...x_n$ со всеми $x_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. *Перестановка* (или *ранжирование*) – любая строка $x_1...x_n$, в которой все x_i – различные числа множества $\{1,\ldots, n\}$.

Операцией редактирования называется любая операция на строках, т.е. *симметричное бинарное отношение* на множестве всех рассматриваемых строк. Если имеется множество операций редактирования $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots, O_m\}$, то соответствующая **метрика редактирования** (или *единичная цена расстояния редактирования*) между строками x и y есть минимальное число операций редактирования из $\mathbb{O}$, требующихся для того, чтобы получить y из x. Это **метрика пути** графа со множеством вершин $W(\mathcal{A})$, где xy является ребром, если у может быть получено из x посредством одной из операций множества $\mathbb{O}$. В некоторых приложениях каждому типу операций редактирования ставится в соответствие *функция цены*; тогда расстоянием редактирования является минимальная общая цена преобразования x в y. Если задано множество операций редактирования $\mathbb{O}$ на строках, то соответствующая **метрика редактирования ожерелий** между циклическими строками x и y есть минимальное число операций редактирования из $\mathbb{O}$, необходимых для получения y из x, минимизированное по всем вращениям x.

Основными операциями редактирования на строках являются:

– *вставуд* (вставка-удаление) *символа*;

– *замена символа*;

– *своп символов*, т.е. сдвиг символа на одну позицию вправо или влево (что переставляет смежные символы);

– *перемещение подстроки*, т.е. преобразование, скажем, строки $x = x_1 \ldots x_n$ в строку $x_1 \ldots x_{i-1} x_j \ldots x_{k-1} x_i \ldots x_{j-1} x_k \ldots x_n$;

– *копирование подстроки*, т.е. преобразование, скажем, $x = x_1 \ldots x_n$ в $x_1 \ldots x_{i-1} x_j \ldots x_{k-1} x_i \ldots x_n$;

– *антикопирование подстроки*, т.е. удаление подстроки с сохранением в строке ее копии.

Ниже приводятся основные расстояния на строках. Однако некоторые расстояния на строках представлены в главах 15, 21 и 23, где они более уместны, с учетом необходимого уровня обобщения или специализации.

11.1. РАССТОЯНИЯ НА СТРОКАХ ОБЩЕГО ВИДА

Метрика Левенштейна

Метрика Левенштейна (или *тасованное расстояние Хэмминга, метрика Хэмминга с пропусками, метрика редактирования символов*) является метрикой редактирования на $W(\mathcal{A})$, которая получена для $\mathbb{C}$, включающего только операции замены символов или их вставки-удаления.

Метрика Левенштейна между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ равна

$$\min\{d_H(x^*, y^*)\},$$

где x^*, y^* – строки длины k, $k \geq \max\{m, n\}$ над алфавитом $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \{*\}$, такие что после удаления всех новых символов $*$ строки x^* и y^* превращаются в x и y соответственно. Здесь *пропуск означает* новый символ $*$ и x^*, y^* – *тасования* строк x и y со строками, включающими только $*$.

Метрика редактирования с перемещениями

Метрика редактирования с перемещениями есть метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$ ([Corm03]), полученная для $\mathbb{C}$, включающего только перемещения подстрок и вставки-удаления.

Метрика уплотненного редактирования

Метрика уплотненного редактирования есть метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$ ([Corm03]), полученная для $\mathbb{C}$, включающего только операции вставки-удаления (вставуд), символа копирования подстроки антикопирования подстроки.

Метрика вставки-удаления

Метрика вставки-удаления есть метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$, полученная для $\mathbb{C}$, включающего только операцию вставки-удаления.

Это – аналог **хэммингова расстояния** $|X \Delta Y|$ между множествами X и Y. Для строк $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ она равна $m + n - 2LCS(x, y)$, где подобность $LCS(x, y)$, – длина самой длинной общей подпоследовательности для x и y.

Расстояние фактора на $W(\mathcal{A})$ определяется как $m + n - 2LCS(x, y)$, где подобность $LCS(x, y)$ – длина самой длинной общей подстроки (фактора) для x и y.

Метрика свопа

Метрика свопа – метрика редактирования на $W(\mathcal{A})$, полученная для $\mathbb{C}$, включающего только операцию свопа символов.

Метрика мультимножества

Метрикой мультимножества называется метрика на $W(\mathcal{A})$, определяемая как

$$\max\{|X - Y|, |Y - X|\}$$

для любых строк x и y, где X, Y – *мультимножества символов* строк x, y, соответственно.

Метрика маркировоки

Метрикой маркировки называется метрика на $W(\mathcal{A})$ ([EhHa88]), определенная как

$$\ln_2((\mathrm{diff}(y,x)+1)\,(\mathrm{diff}(y,x)+1))$$

для любых строк $x = x_1\ldots x_m$ и $y = y_1\ldots y_n$, где $\mathrm{diff}(x, y)$ – минимальный размер $|M|$ подмножества $M \subset \{1,\ldots, m\}$, такого что любая подстрока x, не содержащая x_i с $i \in M$, является подстрокой y.

Другой метрикой, определенной в [EhHa88], является

$$\ln_2(\mathrm{diff}(x, y) + \mathrm{diff}(y, x) + 1).$$

Расстояние преобразования

Расстоянием преобразования называется **расстояние редактирования с ценой** на $W(\mathcal{A})$ (Bape и др., 1999), полученное для $\mathbb{C}$, включающего только операции копирования, антикопирования и вставки-удаления подстрок. Расстояние между строками x и y является минимальной ценой преобразования x в y посредством этих операций, где цена каждой операции – длина ее описания. Так, например, для описания копирования необходим бинарный код, точно определяющий тип операции, смещение местоположения подстрок относительно друг друга в x и y и длину самой подстроки. Кодом вставки должен определять тип операции, длину подстроки и последовательность подстроки.

Расстояние нормалированной информации

Расстояние нормализованной информации d есть симметричная функция на $W(\{0, 1\})$ ([LCLM04]), заданная как

$$\frac{\max\{K(x \mid y^*), K(y \mid x^*)\}}{\max\{K(x), K(y)\}}$$

для каждых двух бинарных строк x и y. Здесь для бинарных строк u и v, u^* является кратчайшей бинарной программой для вычисления u на подходящей, т.е. использующей Тьюринг-полный язык ЭВМ, *сложность по Колмогорову* (или *алгоритмическая энтропия*) $K(u)$ есть длина u^* (окончательно сжатый вариант u) и $K(u \mid v)$ – длина кратчайшей программы вычисления u, если v дано как вспомогательный ввод.

Функция $d(x, y)$ является метрикой с точностью до незначительного остаточного члена: $d(x, x) = O((K(x))^{-1})$ и $d(x, z) - d(y, z) = O((\max\{K(x), K(y), K(z)\})^{-1})$ (сравните $d(x, y)$ с **метрикой информации** (или *метрикой энтропии*) $H(X \mid Y) + H(Y \mid X)$ между стохастическими источниками X и Y).

Нормализованное расстояние сжатия – это расстояние н $W(\{0, 1\})$а ([LCLM04], [BGLVZ98]), заданное как

$$\frac{C(xy) - \min\{C(x), C(y)\}}{\max\{C(x), C(y)\}}$$

для любых бинарных строк x и y, где $C(x)$, $C(y)$ и $C(xy)$ означают размер сжатых (с помощью фиксированного компрессора C, такого как gzip, bzip2 или PPMZ) строк x, y и их сочленения xy. Данное расстояние не является метрикой. Это – аппроксимация расстояния нормализованной информации. Подобное расстояние может быть задано как $\dfrac{C(xy)}{C(x)+C(y)} - \dfrac{1}{2}$.

Подобность Энтони–Хаммера

Подобность Энтони–Хаммера между бинарной строкой $x = x_1 \ldots x_n$ и множеством Y бинарных строк $y = y_1 \ldots y_n$ есть максимальное число m, такое что для каждого m-подмножества M множества $\{1,\ldots, n\}$ подстрока строки x, содержащая только x_i с $i \in M$, является подстрокой некоторой строки $y \in Y$, содержащей только y_i с $i \in M$.

Подобность Джаро

Для строк $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ назовем символ x_i общим с y, если $x_i = y_j$, где $|i - j| \le \dfrac{\min(m, n)}{2}$. Пусть $x' = x'_1 \ldots x'_m$ – все символы строки x, общие с y (в том же порядке, как они следуют в x), и пусть $y' = y'_1 \ldots y'_n$ – аналогичная строка для y.

Подобность Джаро $\mathrm{Jaro}(x, y)$ между строками x и y определяется как

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m'}{m} + \frac{n'}{n} + \frac{|\{1 \le i \le \min\{m', n'\} : \ x'_i = y'_i\}|}{\min\{m', n'\}}\right).$$

Эта и последующие две подобности используются связи документации.

Подобность Джаро–Уинклера

Подобность ДжароУинклера между строками x и y определяется как

$$\mathrm{Jaro}(x, y) + \frac{max\{4, LCP(x, y)\}}{10}(1 - \mathrm{Jaro}(x, y)),$$

где $\mathrm{Jaro}(x, y)$ – **подобность Джаро** и $LCP(x, y)$ – длина самого большого общего префикса для x и y.

Подобность q-граммы

Подобность q-граммы между строками x и y определяется как

$$\frac{q(x, y) + q(y, x)}{2},$$

где $q(x, y)$ – число подстрок длины q в строке y, которые также появляются как подстроки в x, деленное на количество всех подстрок длины q в y.

Эта подобность является примером **подобностей на основе маркеров**, т.е. таких, к которым применимо определение *маркеров* (избранных подстрок или слов). Здесь маркеры – это *q-граммы*, т.е. подстроки длины q. Примером других подобностей на основе маркеров на строках, используемых в связи документации, являются **подобность объединения Жаккарда** и **TF-IDF** (вариант **подобности косинуса**). Типовой метрикой, **основанной на словаре** между строками x и y является $|D(x) \Delta D(y)|$, где $D(z)$ обозначает полный *словарь* строки z, т.е. множество всех ее подстрок.

Метрика префикс–Хэмминга

Метрика префикс–Хэмминга между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ определяется как

$$(\max\{m, n\} - \min\{m, n\}) + |\{1 \le i \le \min\{m, n\} : x_i \ne y_i\}|.$$

Взвешенное Расстояние Хэмминга

Взвешенное расстояние Хэмминга $d_{wH}(x, y)$ между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ определяется как

$$\sum_{i=1}^{m} d(x_i, y_i).$$

Нечеткое расстояние Хэмминга

Если $(\mathcal{A}, d)$ – метрическое пространство, то **нечетким расстоянием Хэмминга** между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_m$ называется **расстояние редактирования с ценой** на $W(\mathcal{A})$, полученное для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления, каждая с фиксированной ценой $q > 0$, и *сдвигов символов* (т.е. перемещение односимвольных подстрок), где цена замены i на j есть функция $f(|i - j|)$. Это расстояние – минимальная общая цена преобразования x в y с помощью указанных операций. Букштейн, Клейн и Раита, которые в 2001 г. ввели это расстояние для процессов выборки информации, доказали, что оно является метрикой, если f – монотонно возрастающая вогнутая функция на множестве целых чисел, которая обращается в нуль только в точке 0. Случай $f(|i - j|) = C|i - j|$, где $C > 0$ – константа и $|i - j|$ – сдвиг во времени, соответствует **расстоянию Виктора–Пурпура** для последовательности всплесков (см. гл. 23).

В 2003 г. Ралеску предложил для выборки образов еще одно **нечеткое расстояние Хэмминга** на $\mathcal{R}^m$. **Расстояние Ралеску** между двумя строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_m$ есть нечеткое кардинальное число разностного нечеткого множества $D_\alpha(x, y)$ (где α – параметр) с функцией принадлежности

$$\mu_i = 1 - e^{-\alpha(x_i - y_i)^2}, \quad 1 \le i \le m.$$

Точное кордиальное число нечеткого множества $D_\alpha(x, y)$, аппроксимирующее его нечеткое кардинальное число равно $\left| \left\{ 1 \le i \le m : \ \mu_i > \frac{1}{2} \right\} \right|$.

Метрика Нидлмана–Вунша–Селлерса

Если $(\mathcal{A}, d)$ – метрическое пространство, то **метрикой Нидлмана–Вунша–Селлерса** (или *расстоянием Левенштейна с ценой, метрикой общего совмещения*) называется **метрика редактирования с ценой** на $W(\mathcal{A})$ ([NeWu70]), полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления, каждая постоянной цены $q > 0$ и замены символов, где $d(i, j)$ является ценой замена i на j. Данная метрика есть минимальная общая цена преобразования x в y с применением этих операций. Эквивалентно, она равна

$$\min\{d_{wH}(x^*, y^*)\},$$

где x^*, y^* – строки длины k, $k \ge \max\{m, n\}$ над алфавитом $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cup \{*\}$, такие что после удаления всех новых символов $*$ строки x^* и y^* сокращаются до x и y соответственно. Здесь $d_{wH}(x^*, y^*)$ есть **взвешенное хэммингово расстояние** между x^* и y^* с весом $d(x_i^*, y_i^*) = q$ (т.е. операцией редактирования является вставка-удаление), если одна из x_i^*, y_i^* является $*$ и $d(x_i^*, y_i^*) = d(i, j)$, иначе.

Расстояние Гото–Смита–Уотермана (или *расстояние строки с аффинными пропусками*) является более специализированной метрикой с ценой (см. [Goto82]). Она отбрасывает несоответствующие части в начале и конце строк x и y и вводит две цены вставки-удаления одну для инициирования *аффинного пропуска* (непрерывный блок операций вставки-удаления) и другую (меньшую) для расширения пропуска.

Метрика Мартина

Метрика Мартина d^a между строками $x = x_1 \ldots x_m$ и $y = y_1 \ldots y_n$ определяется как

$$|\, 2^{-m} - 2^{-n} \,| + \sum_{t=1}^{\max\{m,n\}} \frac{a_t}{|\mathcal{A}|^t} \sup_z |\, k(z,x) - k(z,y) \,|,$$

где z – любая строка длины t, $k(z, x)$ – *ядро Мартина* ([MaSt99]) *марковской цепи* $M = \{M_t\}_{t=0}^{\infty}$, и последовательность $a \in \{a = \{a_i\}_{t=0}^{\infty} : \ a_t > 0, \ \sum_{t=1}^{\infty} a_t < \infty$ – параметра.

Метрика Бэра

Метрикой Бэра называется ультраметрика между конечными или бесконечными строками $x = x_1 \ldots x_m \ldots$ и $y = y_1 \ldots y_n \ldots$, определяемая для $x \neq y$ как

$$\frac{1}{1 + LGCP(x,y)},$$

где $LCP(x, y)$ – длина самого длинного общего префикса строк x и y.

Обобщенная метрика Кантора

Обобщенной метрикой Кантора называется ультраметрика между бесконечными строками $x = x_1 \ldots x_m \ldots$ и $y = y_1 \ldots y_n \ldots$, определяемая для $x \neq y$ как

$$a^{LCP(x,y)},$$

где a – фиксированное число из интервала (0,1), а $LCP(x, y)$ – длина самого длинного префикса строк x и y.

Данное метрическое пространство является **компактным**. Для случая $a = \frac{1}{2}$ метрика $\frac{1}{2^{LCP(x,y)}}$ рассматривалась на классическом **фрактале** (см. гл. 1) для [0,1] – *множестве Кантора* (см. **Метрика Кантора**, гл. 18).

Метрика Дункана

Рассмотрим множество X всех строго возрастающих бесконечных последовательностей $x = \{x_n\}_n$ положительных целых чисел. Определим $N(n, x)$ как число элементов в $x = \{x_n\}_n$, которые меньше n, и $\delta(x)$ как *плотность* x, т.е. $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{N(n,x)}{n}$. Пусть Y – подмножество X, состоящее из всех последовательностей $x = \{x_n\}_n$, для которых $\delta(x) < \infty$.

Метрикой Дункана является метрика на Y, определенная для $x \neq y$ как

$$\frac{1}{1 + LCP(x,y)} + |\, \delta(x) - \delta(y) \,|,$$

где $LCP(x, y)$ – длина самого длинного общего префикса строк x и y. Метрическое пространство (X, d) называется *пространством Дункана*.

11.2. РАССТОЯНИЯ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Перестановкой (или *ранжированием*) называется любая строка $x_1 \ldots x_n$, где x_i – различные числа множества $\{1\ldots, n\}$; *перестановка со знаком* – любая строка $x_1 \ldots x_n$, где $|x_i|$ – различные числа из множества $\{1\ldots, n\}$. Обозначим через $(\mathrm{Sym}_n, \cdot, \mathrm{id})$ группу всех перестановок множества $\{1\ldots, n\}$, где id – *тождественное отображение*. Сужение на множество Sym_n (всех n-перестановочных векторов) любой метрики на $\mathbb{R}^n$ является метрикой на Sym_n; основным примером служит

l_p-метрика $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Основными операциями редактирования на перестановках являются:

• *Транспозиция блока*, т.е. перемещение подстроки.

• *Перемещение символа*, т.е. транспозиция блока, состоящего из одного символа.

• *Своп символов*, т.е. перестановка местами двух соседних символов.

• *Обмен символов*, т.е перестановка местами любых двух символов (в теории групп это называется *транспозицией*).

• *Одноуровневый обмен символов*, т.е. обмен символов x_i и x_j, $i < j$, таких что для любого k с $i < k < j$ выполняется либо $\min\{x_i, x_j\} > x_k$, либо $x_k > \max\{x_i, x_j\}$.

• *Реверсия блока*, т.е. преобразование, скажем, перестановки $x = x_1 \ldots x_n$ в перестановку $x_1 \ldots x_{i-1} \mathrm{X_j} \mathrm{X}_{j-1} \ldots X_{i+1} \mathrm{X_i}\, x_{j+1} \ldots x_n$ (так, своп – это реверсия блока, состоящего только из двух символов).

• *Реверсия со знаком*, т.е. реверсия в перестановке, со знаком, с последующим умножением на –1 всех символов реверсированного блока.

Ниже перечислены наиболее употребляемые метрики редактирования и другие метрики на множестве Sym_n.

Хэммингова метрика на перестановках

Хэммингова метрика на перестановках d_H есть метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции замены символов. Это – **биинвариантная** метрика. При этом $n – d_H(x, y)$ – число фиксированных точек перестановки xy^{-1}.

ρ-расстояние Спирмана

ρ-расстояние Спирмана – это евклидова метрика на Sym_n:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(см. **Корреляция ρ-ранга Спирмана**, гл. 17)

Расстояние масштабной линейки Спирмана

Расстояние масштабной линейки Спирмана – это **l_1-метрика** на Sym_n:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

(см. **Подобность масштабной линейки Спирмана**, гл. 17).

Оба расстояния Спирмана **биинвариантны**.

τ-расстояние Кендалла

τ-расстояние Кендалла (или *метрика инверсии, метрика свопа перестановок*) I является метрикой редактирования на Sym_n, полученной для $\mathbb{O}$, включающего только свопы символов.

В терминах теории групп, $I(x, y)$ – число смежных транспозиций, необходимых для получения x из y. Кроме того, $I(x, y)$ есть число *относительных инверсий* x и y, т.е. пар (i, j), $1 \le i < j \le n$ с $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ (см. **Корреляционная подобность τ ранга Кендалла**, гл. 17).

В [BCFS97] также приведены следующие метрики, связанные с метрикой $I(x, y)$:

1) $\min\limits_{z \in \mathrm{Sym}_n} (I(x, z) + I(z^{-1}, y^{-1}))$;

2) $\max\limits_{z \in \mathrm{Sym}_n} I(zx,\ zy)$;

3) $\min\limits_{z \in \mathrm{Sym}_n} I(zx,\ zy) = T(x,\ y)$, где T – **метрика Кэли**;

4) Метрика редактирования, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только одноуровневый обмен символов.

Полуметрика Даниелса–Гильбо

Полуметрика Даниельса–Гильбо есть полуметрика на Sym_n, определенная для любых $x, y \in \mathrm{Sym}_n$ как число троек (i, j, k), $1 \le i < j < k \le n$, таких что (x_i, x_j, x_k) не является циклическим сдвигом (y_i, y_j, y_k); она равна нулю тогда и только тогда, когда x – циклический сдвиг y (см. [Monj98]).

Метрика Кэли

Метрика Кэли T есть метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только обмен символов.

В терминах теории групп, $T(x,\ y)$ есть минимальное число транспозиций, необходимых для того, чтобы получить x из y. При этом $n–T(x, y)$ – число циклов в перестановке xy^{-1}. Метрика T является **биинвариантной**.

Метрика Улама

Метрика Улама (или **метрика редактирования перестановок**) U – метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции перемещения символов.

Эквивалентно, она является метрикой редактирования, полученной для $\mathbb{O}$, включающего только операции вставки-удаления. При этом $n–U(x,\ y) = LCS(x,\ y) = LIS(xy^{-1})$, где $LCS(x, y)$ – длина самой длинной общей подпоследовательности (не обязательно подстроки) x и y, тогда как $LIS(z)$ – длина самой длинной возрастающей подпоследовательности перестановки $z \in \mathrm{Sym}_n$.

Эта метрика и все шесть предыдущих метрик являются **правоинвариантными**.

Метрика реверсии

Метрика реверсии – метрика редактирования на Sym_n, полученная для $\mathbb{O}$, включающего только операции реверсии блоков.

Метрика реверсии со знаком

Метрика реверсии со знаком (по Санкоффу, 1989) является метрикой редактирования на множестве всех $2^n n$ перестановок со знаком множества $\{1,\ldots, n\}$, полученной для $\mathbb{O}$, включающего только операции реверсии со знаком. Эта метрика применяется в биологии, где перестановки со знаком представляют

однохромосомный геном, рассматриваемый как перестановку генов (вдоль хромосом), каждая из которых имеет направление (т.е. знак "+" или "–").

Метрика цепочки

Метрика цепочки (или *метрика перегруппировки*) есть метрика на Sym_n ([Page65]), определенная для любых $x, y \in \mathrm{Sym}_n$ как минимальное число минус 1 цепочек (подстрок) $y'_1,\ldots,y'_t$ строки y, таких что x может быть *строка из них*, т.е. $x = y'_1,\ldots,y'_t$.

Лексикографическая метрика

Лексикографическая метрика – это метрика на Sym_n, определенная как

$$| N(x) - N(y) |,$$

где $N(x)$ – порядковое число позиции (из 1,…, n!), занимаемой перестановкой x в *лексикографическом упорядочении* множества Sym_n.

В *лексикографическом упорядочении* множества Sym_n мы имеем $x = x_1 \ldots x_n \prec \prec y = y_1 \ldots y_n$, если существует индекс $1 \le i \le n$, такой что $x_1 = x_1,\ldots, x_{i-1} = y_{i-1}$, но $x_i < y_i$.

Метрика перестановок Фреше

Метрика перестановок Фреше есть **метрика произведения Фреше** на множестве Sym_∞ перестановок положительных целых чисел, определяемая как

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{| x_i - y_i |}{1 + | x_i - y_i |}.$$

Глава 12

Расстояния на числах, многочленах и матрицах

12.1. РАССТОЯНИЯ НА ЧИСЛАХ

В этой главе рассматриваются некоторые наиболее важные метрики на классических числовых системах: полукольце $\mathbb{N}$ натуральных чисел, кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел, а также полях $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ рациональных, действительных и комплексных чисел соответственно. Рассматривается также алгебра $\mathbb{2}$ кватернионов.

Метрики на натуральных числах

Существует несколько хорошо известных метрик на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

1. $|n-m|$; сужение **натуральной метрики** (из $\mathbb{R}$) на $\mathbb{N}$.
2. $p^{-\alpha}$, где α – наибольшая степень данного простого числа p, делящая $m-n$ для $m \neq n$ (и равная 0 для $m = n$); сужение ***p*-адической метрики** (из $\mathbb{Q}$) на $\mathbb{N}$.
3. $\ln \dfrac{l.c.m.(m,n)}{g.c.d.(m,n)}$; пример **метрики валюации решетки**.
4. $w_r(n-m)$, где $w_r(n)$ – *арифметический r-вес* числа n; сужение **метрики арифметической *r*-нормы** (из $\mathbb{Z}$) на $\mathbb{N}$.
5. $\dfrac{|n-m|}{mn}$ (см. ***M*-относительная метрика**, гл. 19)
6. $1+\dfrac{1}{m+n}$ для $m \neq n$ (и равная 0 для $m = n$); **метрика Серпинского**.

Большинство этих метрик на $\mathbb{N}$ могут быть распространены на $\mathbb{Z}$. Более того, любую из вышеперечисленных метрик можно использовать для случая произвольного счетного множества X. Например, **метрику Серпинского** определяют обычно на произвольном счетном множестве $X = \{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ как $1+\dfrac{1}{m+n}$ для всех $x, x_n \in X$ с $m \neq n$ (и как 0, иначе).

Метрика арифметической *r*-нормы

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Преобразованной r-арной формой* целого числа x называется представление

$$x = e_n r^n + \cdots + e_1 r + e_0,$$

где $e_i \in \mathbb{Z}$ и $|e_i| < r$ для всех $i = 0,\ldots, n$. r-Арная форма называется *минимальной*, если число ее ненулевых коэффициентов минимально. Минимальная форма не является единственной в общем случае. Однако если коэффициенты e_i, $0 \leq i \leq n-1$, удовлетворяют условиям $|e_i + e_{i+1}| < r$ и $|e_i + e_{i+1}| < |e_{i+1}|$, если $e_i e_{i+1} < 0$, то вышеуказанная форма является единственной и минимальной; она называется *обобщенной несмежной формой*. *Арифметический r-вес* $w_r(x)$ целого числа x есть

количество ненулевых коэффициентов в *минимальной r-форме* числа x, в частности в обобщенной несмежной форме.

Метрика арифметическая *r*-нормы (см., например, [Ernv85]) есть метрика на $\mathbb{Z}$, определенная как

$$w_r(x-y).$$

***p*-Адическая метрика**

Пусть p – простое число. Любое ненулевое рациональное число x может быть представлено как $x = p^{\alpha}\frac{c}{d}$, где c и d – целые числа, взаимно-простые с p, и α – целое число, определенное единственным образом. *p-Адическая норма* числа x определяется как $|x|_p = p^{-\alpha}$. Кроме того, мы считаем, что $|0|_p = 0$.

***p*-Адической метрикой** называется **метрика нормы** на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, определенная как

$$|x-y|_p .$$

Данная метрика лежит в основе построения алгебры p-адических чисел. Именно, **пополнение Коши** метрического пространства $(\mathbb{Q},\ |x-y|_p)$ дает поле $\mathbb{Q}_p$ *p-адических чисел*, точно так же как пополнение Коши метрического пространства $(\mathbb{Q},\ |x-y|)$ с **натуральной метрикой** $|x-y|$ дает поле $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Натуральная метрика

Натуральной метрикой (или **метрикой абсолютного значения**) называется метрика на $\mathbb{R}$, определенная как

$$|x-y| = \begin{cases} y-x, & \text{если} \quad x-y<0, \\ x-y, & \text{если} \quad x-y\geq 0. \end{cases}$$

На $\mathbb{R}$ все $\boldsymbol{l_p}$**-метрики** совпадают с ней. Метрическое пространство $(\mathbb{R},\ |x-y|)$ называется *действительной прямой* (или *евклидовой прямой*).

Существует много других полезных метрик на $\mathbb{R}$. В частности, для данного $0<\alpha<1$ **обобщенная метрика абсолютного значения** на $\mathbb{R}$ определяется как $|x-y|^{\alpha}$.

Метрика нулевого отклонения

Метрикой нулевого отклонения называется метрика на $\mathbb{R}$, определенная как

$$1+|x-y|,$$

если одно и только одно из чисел x и y является положительным, и как

$$|x-y|$$

иначе, где $|x-y|$ – **натуральная метрика** (см., например, [Gile87]).

Квазиполуметрика действительной полупрямой

Квазиполуметрика действительной полупрямой задается на полупрямой $\mathbb{R}_{>0}$ как

$$\max\left\{0, \ln\frac{y}{x}\right\}.$$

Расширенная метрика действительной прямой

Расширенной метрикой действительной прямой называется метрика на множестве $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Основным примером (см., в частности, [Cops68]) такой метрики является

$$| f(x) - f(y) |,$$

где $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ для $x \in \mathbb{R}$, $f(+\infty) = 1$ и $f(-\infty) = -1$. Другая часто используемая метрика на $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ задается как

$$| \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y |,$$

где $-\dfrac{1}{2}\pi < \operatorname{arctg} x < \dfrac{1}{2}\pi$ для $-\infty < x < \infty$ и $\operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\dfrac{1}{2}\pi$.

Метрика комплексного модуля

Метрикой комплексного модуля является метрика на множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел, определяемая как

$$| z - u |,$$

где для любого $z \in \mathbb{C}$ действительное число $|z| = |z_1 + z_2 i| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ является его *комплексным модулем*. Метрическое пространство $(\mathbb{C}, |z-u|)$ называется *комплексной плоскостью* (или *плоскостью Аргана*). В качестве примера других полезных метрик на $\mathbb{C}$ можно привести **метрику Британской железной дороги**, определяемую как

$$|z| + |u|$$

для $z \neq u$ (и равную 0, иначе); ***p*-относительную метрику**, $1 \le p \le \infty$ (см. **(*p*, *q*)-относительная метрика**, гл. 19), определяемую как

$$\frac{|z-u|}{(|z|^p + |u|^p)^{1/p}}$$

для $|z| + |u| \neq 0$ (и равную 0, иначе); для $p = 0$ получаем **относительную метрику**, задаваемую для $|z| + |u| \neq 0$ как

$$\frac{|z-u|}{\max\{|z|, |u|\}}.$$

Хордальная метрика

Хордальная метрика d_χ есть метрика на множестве $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, определенная как

$$d_\chi(z,u) = \frac{2|z-u|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|u|^2}}$$

для всех $z, u \in \mathbb{C}$ и как

$$d_\chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. ***M*-относительная метрика**, гл. 19). Метрическое пространство

$(\overline{\mathbb{C}}, d_\chi)$ называется *расширенной комплексной плоскостью*. Она гомеоморфна и конформно эквивалентна *римановой сфере*.

Именно, *риманова сфера* – это сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$, рассматриваемая как метрическое подпространство $\mathbb{E}^3$, на которую в стереографической проекции взаимно-однозначно отображается расширенная комплексная плоскость. *Единичную сферу* $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ можно рассматривать как риманову сферу, а плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ можно отождествить с плоскостью $x_3 = 0$ так, что ее действительная ось совпадает с x_1-осью, а мнимая ось – с x_2-осью. При стереографической проекции каждая точка $z \in \mathbb{C}$ соответствует точке $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, которая получена как точка пересечения луча, проведенного из "северного полюса" (0, 0, 1) сферы в точку z сферы S^2; "северный полюс" соответствует бесконечно удаленной точке. Хордальное расстояние между двумя точками $p, q \in S^2$ определяется как расстояние между их прообразами $z, u \in \overline{\mathbb{C}}$.

Хордальная метрика может быть аналогичным образом определена на $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Именно для любых

$$d_\chi(x, y) = \frac{2 \| x - y \|_2}{\sqrt{1 + \| x \|_2^2}\sqrt{1 + \| y \|_2^2}}$$

и для любого $x \in \mathbb{R}^n$

$$d_\chi(x, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + \| x \|_2^2}},$$

где $\| \cdot \|_2$ – обычная евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^n, d_\chi)$ называется *пространством Мёбиуса*. Это *птолемеево метрическое пространство* (см. **Птолемеева метрика**, гл.1).

Если заданы $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, $p \geq 1$, то **обобщенной хордальной метрикой** называется метрика на $\mathbb{C}$ (в общем случае на $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_2)$ и даже на любом птолемеевом пространстве $(V, \| \cdot \|)$), определенная как

$$\frac{| z - u |}{(\alpha + \beta | z |^p)^{1/p} \cdot (\alpha + \beta | u |^p)^{1/p}}.$$

Она легко обобщается и на случай $\overline{\mathbb{C}}(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

Кватернионная метрика

Кватернионы – элементы некоммутативной алгебры с делением $\mathbb{Q}$ над полем $\mathbb{R}$, геометрически реализуемые в четырехмерном пространстве ([Hami66]). Кватернион можно записать в форме $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, $q_i \in \mathbb{R}$, где кватернионы i, j и k называются *основными единицами* и удовлетворяют следующим соотношениям, известным как *правила Гамильтона*: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ и $ij = -ji = k$.

Норма $\| q \|$ *кватерниона* $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_3 k \in \mathbb{Q}$ определяется как

$$\| q \| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}, \quad \overline{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k.$$

Кватернионная метрика есть **метрика нормы** на множестве $\mathbb{Q}$ всех кватернионов, определяемой как $\| x - y \|$.

12.2. РАССТОЯНИЯ НА МНОГОЧЛЕНАХ

Многочлен – выражение, являющееся суммой степеней одной или нескольких переменных, умноженных на коэффициенты. *Многочлен от одной переменной* с действительными (комплексными) коэффициентами задается как $P = P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}(a_k \in \mathbb{C})$. Множество $\mathcal{P}$ всех действительных (комплексных) многочленов образуют кольцо ($\mathcal{P}$, +, ·, 0). Оно является также векторным пространством над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$).

Метрика нормы многочлена

Метрика нормы многочлена есть **метрика нормы** на множестве $\mathcal{P}$ всех действительных (комплексных) многочленов, определенная как

$$\| P - Q \|,$$

где $\| \cdot \|$ – *норма многочлена*, т.е. такая функция $\| \cdot \|: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, что для всех $P, Q \in \mathcal{P}$ и любого скаляра k имеем следующие свойства:

1) $\| P \| \geq 0$ с $\| P \| = 0$ тогда и только тогда, когда $P = 0$;
2) $\| kP \| = | k | \| P \|$;
3) $\| P + Q \| \leq \| P \| + \| Q \|$ (*неравенство треугольника*).

Для множества $\mathcal{P}$ обычно используются несколько классов норм. *l_p-норма* ($1 \leq p \leq \infty$) многочлена $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ определяется как

$$\| P \|_p = \left(\sum_{k=0}^{n} | a_k |^p \right)^{1/p},$$

давая особые случаи $\| P \|_1 = \sum_{k=0}^{n} | a_k |$, $\| P \|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} | a_k |^2}$ и $\| P \|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} | a_k |$. Значение $\| P \|_\infty$ называется *высотой многочлена*. *L_p-норма* ($1 \leq p \leq \infty$) многочлена $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ определяется как

$$\| P \|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) |^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p},$$

давая особые случаи $\| L \|_{L_1} = \int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) | \frac{d\theta}{2\pi}$, $\| P \|_{L_2} = \sqrt{\int_0^{2\pi} | P(e^{i\theta}) | \frac{d\theta}{2\pi}}$ и $\| P \|_{L_\infty} = \sup_{|z|=1} | P(z) |$.

Метрика Бомбьери

Метрика Бомбьери (или **скобочная метрика многочлена**) есть **метрика нормы многочлена** на множестве $\mathcal{P}$ всех действительных (комплексных) многочленов,

определенная как

$$[P - Q]_p,$$

где $[\cdot]_p$, $0 \le p \le \infty$, есть *p-норма Бомбьери*. Для многочлена $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ она задается как

$$[P]_p = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{1-p} | a_k |^p \right)^{1/p},$$

где $\binom{n}{k}$ – биномиальный коэффициент.

12.3. РАССТОЯНИЯ НА МАТРИЦАХ

$m \times n$ матрица $A = ((a_{ij}))$ над полем $\mathbb{F}$ представляет собой таблицу, состоящую из m строк и n столбцов с элементами a_{ij} из поля $\mathbb{F}$. Множество всех $m \times n$ матриц с действительными (комплексными) элементами обозначается как $M_{m,n}$. Оно образует *группу* $(M_{m,n}, +, 0_{m,n})$, где $((a_{ij})) + ((b_{ij})) = ((a_{ij} + b_{ij}))$, а матрица $0_{m,n} \equiv 0$, т.е. все ее элементы равны 0. Оно является также mn-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$). Транспонированной матрицей для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_{m,n}$ называется матрица $A^T = ((a_{ij})) \in M_{n,m}$. *Сопряженной транспонированной матрицей* (или *присоединенной матрицей*) для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_{m,n}$ называется матрица $A^* = ((\overline{a}_{ij})) \in M_{n,m}$.

Матрица называется *квадратной матрицей*, если $m = n$. Множество всех квадратных $n \times n$ матриц с действительными (комплексными) элементами обозначается как M_n. Оно образует *кольцо* $(M_n, +, 0)$, где $+$ и 0_n определяются как указано выше, а $((a_{ij})) \cdot ((b_{ij})) = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \right)$. Оно является также n^2-мерным векторным пространством над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$). Матрица $A = ((a_{ij})) \in M_n$ называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, т.е., если $A = A^T$. Специальным случаем типы квадратных $n \times n$ матриц является *единичная матрица* $1_n = ((c_{ij}))$ с $c_{ii} = 1$ и $c_{ij} = 0$, $i \ne j$. *Унитарная матрица* $U = ((u_{ij}))$ есть квадратная матрица, определенная как $U^{-1} = U^*$, где U^{-1} – *обратная матрица* для U, т.е. $U \cdot U^{-1} = 1_n$. *Ортогональной матрицей* называется матрица $A \in M_{m,n}$, такая что $A^*A = 1_n$.

Если для матрицы $A \in M_n$ существует вектор x, такой что $Ax = \lambda x$ для некоторого скаляра λ, то λ называется *собственным значением* матрицы A, *соответствующим собственному вектору* x. Для комплексной матрицы $A \in M_{m,n}$, ее *сингулярные значения* $s_i(A)$ определяются как квадратные корни собственных значений матрицы A^*A, где A^* – сопряженная транспонированная матрица для A. Они являются неотрицательными действительными числами, причем $s_1(A) \ge s_2(A) \ge \ldots$.

Метрика нормы матрицы

Метрикой нормы матрицы называется **метрика нормы** на множестве $M_{m,n}$ всех действительных (комплексных) $m \times n$ матриц, определенная как

$$\| A - B \|,$$

где $\|\cdot\|$ – *норма матрицы*, т.е. такая функция $\|\cdot\|: M_{m,n} \to \mathbb{R}$, что для всех $A, B \in M_{m,n}$ и для любого скаляра k имеют место следующие свойства:

1) $\|A\| \geq 0$ с $\|A\| = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0_{m,n}$;

2) $\|kA\| = |k| \|A\|$;

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника).

Все метрики нормы матрицы на $M_{m,n}$ эквивалентны. Норма матрицы $\|\cdot\|$ на множестве M_n всех действительных (комплексных) квадратных $n \times n$ матриц называется *субмультипликативной*, если она *совместима* с умножением матриц, т.е. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ для всех $A, B \in M_n$. Множество M_n с субмультипликативной нормой является *банаховой алгеброй*.

Простейшим примером метрики нормы матрицы является **хэммингова метрика** на $M_{m,n}$ (в общем случае на множестве $M_{m,n}(\mathbb{F})$ всех матриц $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$), определенная как $\|A - B\|_H$, где $\|A\|_H$ – *норма Хэмминга* матрицы $A \in M_{m,n}$, т.е. число ненулевых элементов матрицы A.

Метрика естественной нормы

Метрика естественной нормы (или **индуцированная метрика нормы, подчиненная метрика нормы**) есть **метрика нормы** на множестве M_n всех действительных (комплексных) квадратных $n \times n$ матриц, определенная как

$$\|A - B\|_{\text{nat}},$$

где $\|\cdot\|_{\text{nat}}$ – *естественная норма* на M_n. *Естественная норма* $\|\cdot\|_{\text{nat}}$ на M_n, порожденная нормой вектора $\|x\|$^ $x \in \mathbb{R}_n$ ($x \in \mathbb{C}^n$), есть *субмультипликативная норма матрицы*, определенная как

$$\|A|_{\text{nat}} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Натуральную метрику нормы можно задать аналогичным образом на множестве $M_{m,n}$ всех $m \times n$ действительных (комплексных) матриц: если заданы нормы вектора $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ на $\mathbb{R}^m$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ на $\mathbb{R}^n$, *естественная норма* $\|A\|_{\text{nat}}$ матрицы $A \in M_{m,n}$, порожденная нормами $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, есть норма матрицы, определенная как $\|A\|_{\text{nat}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}$.

Метрика *p*-нормы матрицы

Метрика *p*-нормы матрицы называется **натуральная метрика нормы** на M_n, определенная как

$$\|A - B\|_{\text{nat}}^p,$$

где $\|\cdot\|_{\text{nat}}^p$ – *p-норма матрицы*, т.е. *естественная норма*, порожденная l_p*-нормой* вектора, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\|A\|_{\text{nat}}^p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p,$$

где

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Максимальной абсолютной метрикой столбцов (точнее, **максимальной метрикой нормы абсолютных сумм по столбцам**) является **метрика 1-нормы матрицы** $\| A - B \|^1_{\text{nat}}$ на M_n. *1-Норма матрицы* $\| \cdot \|^1_{\text{nat}}$,, порожденная l_1-*нормой* вектора, называется также *максимальной нормой абсолютных сумм по столбцам*. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_n$ ее можно записать как

$$\| A \|^1_{\text{nat}} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | .$$

Максимальной абсолютной метрикой строк (точнее, **максимальной метрикой нормы абсолютных сумм по строкам**) называется **метрика ∞-нормы матрицы** $\| A - B \|^\infty_{\text{nat}}$ на M_n. *∞-Норма матрицы* $\| \cdot \|^\infty_{\text{nat}}$, порожденная l_∞-*нормой* вектора, называется также *максимальной нормой абсолютных сумм по строкам.* Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_n$ ее можно записать как

$$\| A \|^\infty_{\text{nat}} = \max_{1 \le j \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} | .$$

Метрика спектральной нормы – это **метрика 2-нормы матрицы** $\| A - B \|^2_{\text{nat}}$ на M_n. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_n$ ее можно записать как

$$\| A \|_{\text{sp}} = (\text{максимальное собственное значение } A^*A)^{1/2},$$

где матрица $A^* = ((\overline{a}_{ij}) \in M_n$ является сопряженной транспонированной матрицей матрицы A (см. **Метрика нормы Ки Фана**, гл. 14).

Метрика нормы Фробениуса

Метрика нормы Фробениуса есть **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|_{\text{Fr}},$$

где $\| \cdot \|_{\text{Fr}}$ – *норма Фробениуса*. Для матрицы $A = ((a_{ij})) \in M_{m,n}$ она определяется как

$$\| A \|_{\text{Fr}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2} .$$

Она равна также квадратному корню из следа матрицы A^*A, где матрица $A^* = ((\overline{a}_{ji}))$ является сопряженной транспонированной матрицей для матрицы A или, эквивалентно, квадратному корню из суммы *собственных значений* λ_i матрицы A^*A: $\| A \|_{\text{Fr}} = \sqrt{Tr(A^*A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \lambda_i}$ (см. **Метрика нормы Шатена**, гл. 13). Эта норма порождена *скалярным произведением* на пространстве $M_{m,n}$, но не является *субмультипликативной* для $m = n$.

Метрика (*c, p*)-нормы

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $k \le \min\{m, n\}$, $c \in \mathbb{R}^k$, $c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_k > 0$ и $1 \le p < \infty$. **Метрика (*c, p*)-нормы** – это **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|^k_{(c,p)},$$

где $\|\cdot\|^k_{(c,p)}$ (c, p)-*норма* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как

$$\| A \|^k_{(c,p)} = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i s_i^p(A) \right)^{1/p},$$

где $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \cdots \geq s_k(A)$ – первые k *сингулярных значений* матрицы A. Если $p = 1$, то мы получаем *c-норму*. Если, более того, $c_1 = \cdots = c_k = 1$, то имеем *k-норму Ки Фана*.

Метрика нормы Ки Фана

Для $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \min\{m, n\}$ **метрикой нормы Ки Фана** является **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|^k_{\mathrm{KF}},$$

где $\|\cdot\|^k_{\mathrm{KF}}$ – *k-норма Ки Фана* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как сумма ее первых k *сингулярных значений*:

$$\| A \|^k_{\mathrm{KF}} = \sum_{i=1}^{k} s_i(A).$$

Для $k = 1$ мы получаем *спектральную норму*. Для $k = \min\{m, n\}$ имеем *следовую норму*.

Метрика нормы Шатена

Если дано $1 \leq p < \infty$, то **метрика нормы Шатена** есть **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как

$$\| A - B \|^p_{\mathrm{Sch}},$$

где $\|\cdot\|^p_{\mathrm{Sch}}$ – *p-норма Шатена* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как корень p-й степени из суммы p-х степеней всех ее *сингулярных* значений:

$$\| A \|^p_{\mathrm{Sch}} = \left(\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} s_i^p(A) \right)^{1/p}.$$

Для $p = 2$ мы получаем *норму Фробениуса*, а для $p = 1$ – *следовую норму*.

Метрика следовой нормы

Метрикой следовой нормы называется **метрика нормы матрицы** на $M_{m,n}$, определенная как сумма всех ее *сингулярных значений*:

$$\| A - B \|_{\mathrm{tr}},$$

где $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}}$ – *следовая норма* на $M_{m,n}$. Для матрицы $A \in M_{m,n}$ она определяется как сумма всех ее *сингулярных значений*:

$$\| A \|_{\mathrm{tr}} = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} s_i(A).$$

Метрика Розенблюма–Цфасмана

Пусть $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ – множество всех $m \times n$ матриц с элементами из конечного поля $\mathbb{F}_q$. *Норма Розенблюма–Цфасмана* $\| \cdot \|_{\mathrm{RT}}$ на $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ определяется следующим образом: если $m = 1$ и $a = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in M_{1,n}(\mathbb{F}_q)$, то $\| 0_{1,n} \|_{\mathrm{RT}} = 0$ и $\| a \|_{\mathrm{RT}} = \max\{i | \xi_i \neq 0\}$ для $a \neq 0_{1,n}$; если $A = (a_1, \ldots, a_m)^T \in M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$, $a_j \in M_{1,n}(\mathbb{F}_q)$, $1 \leq j \leq m$, то $\| A \|_{\mathrm{RT}} = \sum_{j=1}^{m} \| a_j \|_{\mathrm{RT}}$.

Метрикой Розенблюма–Цфасмана ([RoTs96]) называется **метрика нормы матрицы** (на самом деле **ультраметрика**) на $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$, определенная как

$$\| A - B \|_{\mathrm{RT}}.$$

Угловое расстояние между подпространствами

Рассмотрим *грассманово пространство* $G(m, n)$ всех n-мерных подпространств евклидова пространства $\mathbb{E}^m$; оно является компактным *римановым многообразием* размерности $n(m–n)$.

Если имеются два подпространства $A, B \in G(m, n)$, то *главные углы* $\frac{\pi}{2} \geq \theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n \geq 0$ между ними определяются (для $k = 1, \ldots, n$) индуктивно как

$$\cos\theta_k = \max_{x \in A} \max_{y \in B} x^T y = (x^k)^T y^k,$$

если выполняются условия $\| x \|_2 = \| y \|_2 = 1$, $x^T x^i = 0$, $y^T y^i = 0$ для $1 \leq i \leq k - 1$, где $\| \cdot \|_2$ – евклидова норма. Главные углы могут задаваться также через ортонормированные матрицы Q_A и Q_B, на которые натянуты подпространства A и B соответственно: именно n упорядоченных *сингулярных значений* матрицы $Q_A Q_B \in M_n$ могут быть заданы как $\cos\theta_1, \ldots, \cos\theta_n$.

Геодезическое расстояние между подпространствами A и B определяется (по Вонгу, 1967) как

$$\sqrt{2 \sum_{i=1}^{n} \theta_i^2}.$$

Расстояние Мартина между подпространствами A и B задается как

$$\sqrt{\ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\cos^2 \theta_i}}.$$

Если подпространства представляют авторегрессивные модели, то расстояние Мартина может выражаться посредством кепстра автокорреляционной функции этих моделей (см. **Кепстральное расстояние Мартина**, гл. 21).

Расстояние Азимова между подпространствами A и B задается как

$$\theta_1.$$

Оно может быть выражено также через **финслерову метрику** на многообразии $G(m, n)$.

Расстояние пропуска между подпространствами A и B определяется как

$$\sin\theta_1.$$

Оно может выражаться также в терминах *ортогональных операторов проектирования* как l_2-*норма* разности операторов проектирования на A и B соответственно. Многие вариации этого расстояния применяются в теории управления (см. **Метрика пропуска**, гл. 18).

Расстояние Фробениуса между подпространствами A и B определяется как

$$\sqrt{2\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \theta_i}.$$

Оно может быть выражено также в терминах *ортогональных операторов проектирования* как *норма Фробениуса* разности операторов проектирования на A и B соответственно. Аналогичное расстояние $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \theta_i}$ называется **хордальным расстоянием**.

Полуметрики на сходствах

Следующие две полуметрики определяются для любых двух *сходств* d_1 и d_2 на данном конечном пространстве X (более того, для любых двух действительных симметричных матриц).

Полуметрика Лермана (см. **расстояние Кендалла** на перестановках, гл. 11) определяется как

$$\frac{|\{(\{x,y\},\{u,v\}):\ (d_1(x,y)-d_1(u,v))\,(d_2(x,y)-d_2(u,v))<0\}|}{\binom{|X|+1}{2}},$$

где $(\{x, y\}, \{u, v\})$ – любая пара неупорядоченных пар $\{x, y\}$, $\{u, v\}$ элементов x, y, u, v из X.

Полуметрика Кауфмана определяется как

$$\frac{|\{(\{x,y\},\{u,v\}):\ (d_1(x,y)-d_1(u,v))\,)d_2(x,y)-d_2(u,v))<0\}|}{|\{(\{x,y\},\{u,v\}):\ (d_1(x,y)-d_1(u,v))\,(d_2(x,y)-d_2(u,v))\neq 0\}|}.$$

Глава 13

Расстояния в функциональном анализе

Функциональный анализ является областью математики, которая занимается изучением функциональных пространств. Такое использование слова *функциональный* происходит от вариационного исчисления, где рассматриваются функции, аргументом которых является функция. На современном этапе предметом функционального анализа считается изучение полных *нормированных векторных пространств*, т.е. **банаховых пространств.** Для любого действительного числа примером банахова пространства является L_p**-пространство** всех измеримых по Лебегу функций, p-я степень абсолютного значения которых имеет конечный интеграл. **Гильбертово пространство** является банаховым пространством, в котором норма получена из *скалярного произведения.* Помимо этого, в функциональном анализе исследуются *непрерывные линейные операторы,* определяемые на банаховых и гильбертовых пространствах.

13.1. МЕТРИКИ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – *открытый интервал* (т.е. непустое связное открытое множество) в $\mathbb{R}$. Действительная функция $f : I \to \mathbb{R}$ называется *действительно аналитической* на I, если она разложима в *ряд Тейлора в открытой окрестности* U_{x_0} каждой точки $x_0 \in I$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ для любого $x \in U_{x_0}$. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – *область* (т.е. *выпуклое открытое множество*) в $\mathbb{C}$. Комплексная функция $f : I \to \mathbb{C}$ называется *комплексно аналитической* (или просто *аналитической*) на D, если она разложима в *ряд Тейлора* в *открытой окрестности* каждой точки $z_0 \in D$. Комплексная функция f является аналитической на D тогда и только тогда, когда она *голоморфна* на D, т.е. обладает комплексной производной $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ в каждой точке $z_0 \in D$.

Интегральная метрика

Интегральной метрикой называется L_1**-метрика** на множестве $C_{[a,\,b]}$ всех непрерывных действительных (комплексных) функций на данном отрезке $[a,\ b]$, определенная как

$$\int_a^b |\, f(x) - g(x) \,|\, dx.$$

Соответствующее метрическое пространство сокращенно записывается как $C^1_{[a,b]}$ и является банаховым пространством.

В общем случае для любого **компактного** (или *счетно компактного*) топологического пространства X интегральную метрику можно задать на множестве всех непрерывных функций $f: X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ как $\int\limits_X |f(x) - g(x)|\, dx$.

Равномерная метрика

Равномерная метрика (или **sup-метрика**) есть L_∞**-метрика** на множестве $C_{[a,\,b]}$ всех действительных (комплексных) непрерывных функций на данном отрезке $[a, b]$, определенная как

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Соответствующее метрическое пространство сокращенно записывается как $C^{\infty}_{[a,b]}$ и является банаховым пространством.

Обобщением $C^{\infty}_{[a,b]}$ является *пространство непрерывных функций* $C(X)$, т.е. метрическое пространство на множестве всех непрерывных (в общем случае, ограниченных) функций $f: X \to \mathbb{C}$ топологического пространства X с L_∞-метрикой $\sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

Для случая метрического пространства $C(X, Y)$ непрерывных (в общем случае ограниченных) функций $f: X \to Y$ из одного **метрического компакта** (X, d_X) в другой (X, d_Y) sup-метрика между двумя функциями $f, g \in C(X, Y)$ определяется как $\sup\limits_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$. Метрическое пространство $C^{\infty}_{[a,b]}$ и метрическое пространство $C^{1}_{[a,b]}$ являются важнейшими случаями метрического пространства $C^{p}_{[a,b]}$, $1 \le p \le \infty$ на множестве $C_{[a,\,b]}$ с L_p-метрикой $\left(\int\limits_a^b |f(x) - g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}$. Пространство $C^{p}_{[a,b]}$ является примером L_p*-пространства.*

Расстояние собаковода

Для метрического пространства (X, d) **расстоянием собаковода** называется метрика на множестве всех функций $f: [0, 1] \to X$, определенная как

$$\inf_{\sigma} \sup_{t\in[0,1]} d(f(t), g(\sigma(t))),$$

где σ: $[0, 1] \to [0, 1]$ есть непрерывная монотонно возрастающая функция, такая что $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$. Данная метрика является частным случаем **метрики Фреше.** Применяется для измерения расстояний между кривыми.

Метрика Бора

Пусть $\mathbb{R}$ – метрическое пространство с метрикой ρ. Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *почти периодической,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $l = l(\varepsilon) > 0$, такое что каждый интервал $[t_0, t_0 + l(\varepsilon)]$ содержит по меньшей мере одно число τ, для которого $\rho(f(t), f(t + \tau)) < \varepsilon$, $-\infty < t < +\infty$.

Метрикой Бора называется **метрика нормы** $\| f - g \|$ на множестве AP всех почти периодических функций, заданная нормой

$$\| f \| = \sup_{-\infty<t<+\infty} |f(t)|.$$

Тем самым пространство AP превращается в банахово пространство. Некоторые обобщения почти периодических функций были получены с использованием других норм; см. **Расстояние Степанова, Расстояние Вэйля, Расстояние Бесиковича** и **Метрику Бохнера.**

Расстояние Степанова

Расстояние Степанова – расстояние на множестве всех измеримых функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с суммируемой p-й степенью на каждом ограниченном интеграле, определенное как

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l} |\, f(x)-g(x)\,|^{p}\, dx\right)^{1/p}.$$

Расстояние Вейля – расстояние на том же множестве, заданное как

$$\limsup_{l\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\int_{x}^{x+l} |\, f(x)-g(x)\,|^{p}\, dx\right)^{1/p}.$$

Этим расстояниям соответствуют *обобщенные почти периодические функции Степанова и Вэйля.*

Расстояние Бесиковича

Расстоянием Бесиковича называется расстояние на множестве всех измеримых функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ с суммируемой p-й степенью на каждом ограниченном интеграле, определенное как

$$\left(\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\, f(x)-g(x)\,|^{p}\, dx\right)^{1/p}.$$

Этим расстояниям соответствуют *обобщенные почти периодические функции Бесиковича.*

• Метрика Бохнера

Для пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ банахова пространства $(V, \|\cdot\|_V)$ и $1 \le p \le \infty$ *пространством Бохнера* (или *пространством Лебега–Бохнера*) называется множество всех измеримых функций $f\colon \Omega \to V$, таких что $\| f \|_{L^p(\Omega,V)} < \infty$. Здесь *норма Бохнера* $| f \|_{L^p(\Omega,V)}$ определяется как $\left(\int_{\Omega} \| f(\omega)\|_V^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p}$ для $1 \le p < \infty$ и как $ess_{\omega\in\Omega} \| f(\omega)\|_V$. для $p = \infty$.

***p*-метрика Бергмана**

При данном $1 \le p \le \infty$ пусть $L_p(\Delta)$ – L_p-пространство лебеговых измеримых функций f на *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} :| z |< 1\}$ с $\| f \|_p = \left(\int_{\Delta} |\, f(z)\,|^p \, \mu(dz)\right)^{1/p} < \infty.$

Пространством Бергмана $L_p^a(\Delta)$ называется подпространство пространства $L_p(\Delta)$, состоящее из аналитических функций, и ***p*-метрикой Бергмана** называется

***L_p*-метрика** $L_p^a(\Delta)$ (см. **Метрика Бергмана,** гл. 7). Любое пространство Бергмана является банаховым пространством.

Метрика Блоха

Пространство Блоха B на *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ есть множество всех аналитических функций f на Δ, таких что $\| f \|_B = \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty$. При использовании полной *полунормы* $\| \cdot \|_B$ норма на B задается как

$$\| f \| = |f(0)| + \| f \|_B .$$

Метрикой Блоха называется **метрика нормы** $\| f - g \|$ на B; она превращает B в банахово пространство.

Метрика Бесова

Если $1 < p < \infty$, то *пространство Бесова* B_p на *единичном диске* Δ] $\{z \in \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ есть множество аналитических функций f в Δ, таких что $\| f \|_{B_p} = \left(\int_\Delta (1-|z|^2)^p |f'(z)|^p \, d\lambda(z) \right)^{1/p}$, где $d\lambda(z) = \dfrac{\mu(dz)}{(1-|z|^2)^2}$ – инвариантная мера Мёбиуса на Δ. При использовании полной *полунормы* $\| \cdot \|_{B_p}$ норма B_p на задается как

$$\| f \| = |f(0) + \| f \|_{B_p} .$$

Метрика Бесова – метрика нормы $\| f - g \|$ на B_p. Она превращает B_p в банахово пространство.

Множество B_2 является классическим *пространством Дирихле* аналитических на функций Δ с квадратично интегрируемой производной, снабженнsм **метрикой Дирихле.** *Пространство Блоха B* можно рассматривать как B_∞.

Метрика Харди

Если $1 \le p < \infty$, то *пространство* Харди $H^p(\Delta)$ есть класс функций, аналитических на *единичном диске* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих следующим условиям роста для *нормы Харди* $\| \cdot \|_{H^p}$:

$$\| f \|_{H^p(\Delta)} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Метрика Харди – метрика нормы $\| f - g \|_{H^p(\Delta)}$ на $H^p(\Delta)$. Она превращает $H^p(\Delta)$ в банахово пространство.

В комплексном анализе пространства Харди являются аналогами L_p-пространств функционального анализа. Такие пространства используются как в самом математическом анализе, так и в теории рассеяния и теории управления (см. гл. 18).

Метрика части

Метрикой части называется метрика на *области D* в $\mathbb{R}^2$, заданная как

$$\sup_{f\in H^+} \left| \ln\left(\frac{f(x)}{f(y)} \right) \right|$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, где H^+ – множество всех положительных *гармонических функций* на области D.

Дважды дифференцируемая действительная функция $f: D \to \mathbb{R}$ называется *гармонической* на D, если ее *лапласиан* $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ обращается в нуль на D.

Метрика Орлича

Пусть $M(u)$ – четная выпуклая функция действительной переменной, которая возрастает для положительного u и $\lim\limits_{u\to 0} u^{-1}M(u) = \lim\limits_{u\to\infty} u(M(u))^{-1} = 0$. В этом случае функция $p(v) = M'(v)$ не убывает на $[0, \infty)$, $p(0) = \lim\limits_{v\to 0} p(v) = 0$ и $p(v) > 0$ при $v > 0$. Если задать $M(u) = \int\limits_0^{|u|} p(v)dv$ и $N(u) = \int\limits_0^{|u|} p^{-1}(v)dv$, то получаем пару $(M(u), N(u))$ *дополнительных функций.*

Пусть $(M(u), N(u))$ *будет* пара дополнительных сопряженных функций и пусть G – ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$. *Пространство Орлича* $L_M^*(G)$ есть множество измеримых по Лебегу функций f на G, удовлетворяющих следующему условию возрастания для *нормы Орлича* $\| f \|_M$:

$$\| f \|_M = \sup\left\{ \int\limits_G f(t)g(t)dt : \int\limits_G N(g(t))dt \le 1 \right\} < \infty.$$

Метрика Орлича – метрика нормы $\| f - g \|_M$ на $L_M^*(G)$. Она превращает $L_M^*(G)$. в банахово пространство ([Orli32]).

Если $M(u) = u^p$, $1 < p < \infty$, то $L_M^*(G)$. совпадает с пространством $L_p(G)$ и L_p-*норма* $\| f \|_p$ совпадает с $\| f \|_M$ с точностью до скалярного множителя. Норма Орлича эквивалентна *норме Люксембурга* $\| f \|_M \le \| f \|_M \le 2\| f \|_{(M)}$.

Метрика Орлича–Лоренца

Пусть $w : (0, \infty) \to (0, \infty)$ – невозрастающая функция. Пусть $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – неубывающая и выпуклая функция с $M(0) = 0$ и пусть G – ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$.

Пространством Орлича–Лоренца $L_{w,M}(G)$ называется множество всех измеримых по Лебегу функций f на G, удовлетворяющих следующему условию возрастания *для нормы Орлича–Лоренца* $\| f \|_{w,M}$:

$$\| f \|_{w,M} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int\limits_0^\infty w(x)M\left(\frac{f^*(x)}{\lambda} \right)dx \le 1 \right\} < \infty,$$

где $f^*(x) = \sup\{t : \mu(|f| \ge t) \ge x\}$ – *невозрастающая перестановка f.*

Метрика Орлича–Лоренца – метрика нормы $\| f - g \|_{w,M}$ на $L_{w,M}(G)$. Она превращает $L_{w,M}(G)$ в банахово пространство.

Пространство Орлича–Лоренца является обобщением *пространства Орлича* $L_M^*(G)$ (см. **Метрика Орлича**) и *пространства Лоренца* $L_{w,M}(G)$, $1 \le q < \infty$ всех измеримых по Лебегу функций f на G, удовлетворяющих следующему условию

возрастания для *нормы Лоренца* $\| f \|_{w,\,q}$:

$$\| f \|_{w,q} = \left(\int_0^{\infty} w(x)(f^*(x))^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Метрика Гельдера

Пусть $L^{\alpha}(G)$ – множество всех ограниченных непрерывных функций f, заданных на подмножестве G множества $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих *условию Гельдера* на G. Функция f удовлетворяет *условию Гельдера* в точке $y \in G$ с *индексом* (или *порядком*) α $(0 < \alpha \le 1)$ и с коэффициентом $A(y)$, если $| f(x) - f(y) | \le A(y) | x - y |^{\alpha}$ для всех $x \in G$, достаточно близких к y. Если $A = \sup\limits_{y \in G}(A(y)) < \infty$, то условие Гельдера называется *равномерным* на G и A называется *коэффициентом Гельдера* для G. Величина $| f |_{\alpha} = \sup\limits_{x,y \in G} \dfrac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |^{\alpha}}$, $0 \le \alpha \le 1$ называется α-*полунормой Гельдера* для f и *норма Гельдера* для f определяется как

$$\| f \|_{L^{\alpha}(G)} = \sup_{x \in G} | f(x) + | f |_{\alpha} .$$

Метрика Гельдера – метрика нормы $\| f - g \|_{L^{\alpha}(G)}$ на $L^{\alpha}(G)$. Она превращает $L^{\alpha}(G)$ в банахово пространство.

Метрика Соболева

Пространство Соболева $W^{k,\,p}$ есть подпространство L_p-пространства, такие что f и ее производные до порядка k обладают конечной L_p-нормой. Формально, имея подмножество G множества $\mathbb{R}^n$, определим

$$W^{k,p} = W^{k,p}(G) = \{ f \in L_p(G) : f^{(i)} \in L_p(G),\ 1 \le i \le k \},$$

где $f^{(i)} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = i$, и производные берутся в слабом смысле. *Норма Соболева* на $W^{k,\,p}$ определяется как

$$\| f \|_{k,p} = \sum_{i=0}^{k} \| f^{(i)} \|_p .$$

При этом достаточно использовать только первое и последнее числа последовательности, т.е. норма, определенная как $\| f \|_{k,p} = \| f \|_p + \| f^{(k)} \|_p$, эквивалентна вышеприведенной норме. Для $p = \infty$ норма Соболева равна *существенному супремуму* для $| f |$: $\| f \|_{k,\infty} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{x \in G} | f(x) |$, т.е. является инфимумом всех чисел $a \in \mathbb{R}$, для которых неравенство $| f(x) | > a$ выполняется на множестве меры нуль.

Метрика Соболева есть метрика нормы $\| f - g \|_{k,\,p}$ на $W^{k,\,p}$; она превращает $W^{k,\,p}$ в банахово пространство.

Пространство Соболева $W^{k,\,2}$ обозначается как H^k. Оно является гильбертовым пространством для *скалярного произведения* $\langle f, g \rangle_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \langle f^{(i)}, g^{(i)} \rangle_{L_2} =$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_G f^{(i)} \overline{g}^{(i)} \mu(d\omega).$$

Пространства Соболева – современные аналоги пространства C^1 (функций с непрерывными производными) для решения *дифференциальных уравнений в частных производных.*

• Метрики пространства переменной экспоненты

Пусть G – непустое открытое подмножество множества $\mathbb{R}^n$ и пусть $p : G \to [1, \infty)$ – измеримая ограниченная функция, называемая *переменной экспонентой. Пространство Лебега переменной экспоненты* $L_{p(\cdot)}(G)$ есть множество всех измеримых функций $f : G \to \mathbb{R}$, для которых *модуляр* $\rho_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_G |f(x)|^{p(x)}\, dx$ конечен. *Норма Люксембурга* на этом пространстве определяется как

$$\| f \|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f / \lambda) \le 1\}.$$

Метрика лебегова пространства переменной экспоненты есть метрика нормы $\| f - g \|_{p(\cdot)}$ на $L_{p(\cdot)}(G)$.

Пространство Соболева переменной экспоненты $W^{1,p(\cdot)}(G)$ есть подпространство $L_{p(\cdot)}(G)$, состоящее из функций f, распределительный градиент которых существует почти всюду и удовлетворяет условию $|\nabla f| \in L_{p(\cdot)}(G)$. Норма

$$\| f \|_{1,p(\cdot)} = \| f \|_{p(\cdot)} + \| \nabla f \|_{p(\cdot)}$$

превращает $W^{1,p(\cdot)}(G)$ в банахово пространство. **Метрика пространства Соболева переменной экспоненты** есть метрикой нормы $\| f - p \|_{1,p(\cdot)}$ на $W^{1,p(\cdot)}$.

Метрика Шварца

Пространство Шварца (или *пространство быстро убывающих функций*) $S(\mathbb{R}^n)$ есть класс *функций Шварца*, т.е. бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, которые убывают на бесконечности, так же как все их производные, быстрее, чем любая обратная степень x. Точнее, f является функцией Шварца, если имеет место следующее условие возрастания:

$$\| f \|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right| < \infty$$

для любых неотрицательных целочисленных векторов α и β. Семейство *полунорм* $\| \cdot \|_{\alpha\beta}$ определяет локально выпуклую топологию пространства $S(\mathbb{R}^n)$, которое является метризуемым и полным.

Метрика Шварца – метрика на $S(\mathbb{R}^n)$, которая может быть получена с помощью данной топологии (см. **Счетно нормированное пространство,** гл. 2).

Соответствующим метрическим пространством на $S(\mathbb{R}^n)$ является *пространство Фреше* в смысле функционального анализа, т.е. локально выпуклое *F-пространство.*

Квазирасстояние Брегмана

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – замкнутое множество с непустой внутренностью G^0 и пусть f – *функция Брегмана с зоной G.*

Квазирасстояние Брегмана $D_f : G \times G^0 \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ определяется как

$$D_f(x, y) = f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle,$$

где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. $D_f(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$, $D_f(x, y) + D_f(y, z) - D_f(x, z) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), x - y \rangle$ но в общем случае D_f не удовлетворяет неравенству треугольника и не является симметричным.

Действительная функция f, эффективная область которой содержит G, называется *функцией Брегмана с зоной* G, если выполняются следующие условия:

1) f непрерывно дифференцируема на G;

2) f строго выпукла и непрерывна на G;

3) для всех $\delta \in \mathbb{R}$ неполные *множества частично уровня* $\Gamma(x, \delta) = \{y \in G^0 : D_f(x, y) \le \delta\}$ являются ограниченными для всех $x \in G$;

4) если $\{y_n\}_n \subset G^0$ сходится к y^*, то $D_f(y^*, y_n)$ сходится к 0;

5) если $\{x_n\}_n \subset G$ и $\{y_n\}_n \subset G^0$ – такие последовательности, что $\{y_n\}_n$ ограничена, $\lim_{n \to y_n} = y^*$ и $\lim_{n \to \infty} D_f(x_n, y_n) = 0$, то $\lim_{n \to \infty} x_n = y^*$.

Если $G = \mathbb{R}^n$, то достаточное условие для строго выпуклой функции быть функцией Брегмана принимает вид: $\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{f(x)}{\| x \|} = \infty$.

13.2. МЕТРИКИ НА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Линейным оператором называется функция $T : V \to W$ между двумя векторными пространствами V, W над полем $\mathbb{F}$, которая совместима с их линейными структурами, т.е. для любых $x, y \in V$ и любого скаляра $k \in \mathbb{F}$ имеет место следующие свойства: $T(x + y) = T(x) + T(y)$ и $T(kx) = kT(x)$.

Метрика операторной нормы

Рассмотрим множество всех линейных операторов из *нормированного пространства* $(V, \| \cdot \|_V)$ на нормированное пространство $(W, \| \cdot \|_W)$. Операторная норма $\| T \|$ *линейного оператора* $T : V \to W$ определяется как наибольшее значение, на которое T растягивает элементы из V, т.е.

$$\| T \| = \sup_{\|v\|_V \neq 0} \frac{\| T(v) \|_W}{\| v \|_V} = \sup_{\|v\|_V = 1} \| T(v) \|_W = \sup_{\|v\|_V \le 0} \| T(v) \|_W .$$

Линейный оператор $T : V \to W$ из нормированного пространства V в нормированное пространство W называется *ограниченным,* если операторная норма конечна. Для нормированных пространств линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он *непрерывен.*

Метрикой операторной нормы называется метрика нормы на множестве $B(V, W)$ всех ограниченных линейных операторов из V в W, которая определяется как

$$\| T - P \|.$$

Пространство $(B(V, W)) \| \cdot \|)$ называется пространством *ограниченных линейных операторов.* Данное метрическое пространство является **полным,** если таковым является пространство W. Если пространство $V = W$ полное, то пространство $B(V, V)$ есть *банахова алгебра*, поскольку операторная норма является *субмультипликативной нормой.*

Линейный оператор $T : V \to W$ из банахова пространства V в другое банахово пространство W называется *компактным,* если отображение любого ограниченного подмножества множества V – относительно компактное подмножество множества W. Любой компактный оператор является ограниченным (и, следовательно, непрерывным). Пространство $(K(V, W), \|\cdot\|)$ на множестве $K(V, W)$ всех компактных операторов из V в W с операторной нормой $\|\cdot\|$ называется *пространством компактных операторов.*

Метрика ядерной нормы

Пусть $B(V, W)$ – пространство всех ограниченных линейных операторов, отображающих банахово пространство $(V, \|\cdot\|_V)$ в другое банахово пространство $(W, \|\cdot\|_W)$. Обозначим *банахово двойственное пространство для* V как V' и значение функционала $x' \in V'$ в точке $x \in V$ как $\langle x, x'\rangle$. Линейный оператор $T \in B(V, W)$ называется *ядерным оператором,* если его можно представить в виде $x \mapsto T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, x_i'\rangle y_i$, где $\{x_i'\}_i$ и $\{y_i\}_i$ являются последовательностями в V' и W соответственно, такими что $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i' \|_{V'} \| y_i \|_W < \infty$. Данное представление называется *ядерным* и может рассматриваться как представление T в виде суммы операторов ранга 1 (т.е. с одномерным множеством значений). *Ядерная норма* оператора T определяется как

$$\| T \|_{\text{пис}} = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i' \|_{V'} \| y_i \|_W,$$

где инфимум берется по всем возможным ядерным представлениям T.

Метрика ядерной нормы есть метрика нормы $\| T - P \|_{\text{пис}}$ на множестве $N(V, W)$ всех ядерных операторов, отображающих V в W. Пространство $(N(V, W), \|\cdot\|_{\text{пис}})$ называется *пространством ядерных операторов* и является банаховым пространством.

Ядерное пространство определяется как **локально выпуклое** пространство, для которого все непрерывные линейные функции на произвольном банаховом пространстве – ядерные операторы. Ядерное пространство строится как проективный предел гильбертовых пространств H_α с таким свойством, что для каждого $\alpha \in I$ можно найти $\beta \in I$, такое что $H_\beta \subset H_\alpha$ и оператор вложения $H_\beta \ni x \to x \in H_\alpha$ является *оператором Гильберта-Шмидта. Нормированное пространство* является ядерным тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

Метрика конечной ядерной нормы

Пусть $F(V, W)$ – пространство всех *линейных операторов конечного ранга* (т.е. с конечномерным множеством значений), отображающих банахово пространство $(V, \|\cdot\|_V)$ в другое банахово пространство $(W, \|\cdot\|_W)$. Линейный оператор $T \in F(V, W)$ можно представить в виде $x \mapsto T(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i'\rangle y_i$, где $\{x_i'\}_i$ и $\{y_i\}_i$ являются последовательностями из V' (*банахова двойственного* пространства для V) и W соответственно, а $\langle x, x'\rangle$ – значением функционала $x' \in V'$ на векторе $x \in V$.

Конечная ядерная норма T определяется как

$$\| T \|_{f\ \text{пис}} = \inf \sum_{i=1}^{n} \| x_i' \|_{V'} \| y_i \|_W,$$

где инфимум берется по всем возможным конечным представлениям T.

Метрика конечной ядерной нормы есть метрика нормы $\| T - P \|_{f\,\text{пис}}$ на множестве $F(V, W)$. Пространство $F(V, W)$, $\| \cdot \|_{f\,\text{пис}})$ называется *пространством ядерных операторов конечного ранга.* Оно является плотным линейным *подпространством пространства ядерных операторов* $N(V, W)$.

Метрика нормы Гильберта–Шмидта

Рассмотрим множество всех линейных операторов из гильбертова пространства $\left(H_1, \| \cdot \|_{H_1}\right)$ в гильбертово пространство $\left(H_2, \| \cdot \|_{H_2}\right)$. *Норма Гильберта–Шмидта* $\| T \|_{\text{HS}}$ линейного оператора $T : H_1 \to H_2$ задается как

$$\| T \|_{\text{HS}} = \left(\sum_{\alpha \in I} \| T(e_\alpha) \|_{H_2}^2 \right)^{1/2},$$

где $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ – ортогонормированный базис в H_1. Линейный оператор $T : H_1 \to H_2$ называется *оператором Гильберта–Шмидта*, если $\| T \|_{\text{HS}}^2 < \infty$.

Метрика нормы Гильберта–Шмидта есть метрика нормы $\| T - P \|_{\text{HS}}$ на множестве $S(H_1, H_2)$ всех операторов Гильберта–Шмидта из H_1 в H_2.

Для $H_1 = H_2 = H$ алгебра $S(H, H) = S(H)$ с нормой Гильберта–Шмидта является *банаховой алгеброй.* Она содержит как плотное подмножество операторы конечного ранга и принадлежит пространству $K(H)$ компактных операторов. *Скалярное произведение* $\langle , \rangle_{\text{HS}}$ на $S(H)$ определяется как и $\langle T, P \rangle_{\text{HS}} = \sum_{\alpha \in I} \langle T(e_\alpha), P(e_\alpha) \rangle$ и $\| T \|_{\text{HS}} = \langle T, T \rangle_{\text{HS}}^{1/2}$. Следовательно, $S(H)$ является гильбертовым пространством (независимо от выбора базиса $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$).

Метрика нормы операторов со следом

Для гильбертова пространства H *норма операторов со следом* для линейного оператора $T : H \to H$ задается как

$$\| T \|_{\text{tc}} = \sum_{\alpha \in I} \langle | T | (e_\alpha), e_\alpha \rangle,$$

где $| T |$ – *абсолютное значение T в банаховой алгебре* $B(X)$ всех ограниченных операторов из H в себя, а $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ – ортогонормированный базис в H. Оператор $T : H \to H$ называется *операторов со следом,* если $\| T \|_{\text{tc}} < \infty$. Любой такой оператор является произведением двух *операторов Гильберта–Шмидта.*

Метрика нормы операторов со следом – метрика нормы $\| T - P \|_{\text{tc}}$ на множестве $L(H)$ всех операторов со следом из H в себя. Множество $L(H)$ с нормой $\| \cdot \|_{\text{tc}}$ образует банахову алгебру, которая содержится в алгебре $K(H)$ (всех компактных операторов из H в себя), и содержит алгебру $S(H)$ (всех операторов Гильберта–Шмидта из H в себя).

Метрика нормы *p*-класса Шатена

Возьмем $1 \le p < \infty$. Для сепарабельного гильбертова пространства H *норма*

p-класса Шатена компактного линейного оператора $T : H \to H$ определяется как

$$\| T \|_{\mathrm{Sch}}^{p} = \left(\sum_{n} \; | s_n |^{p} \right)^{1/p},$$

где $\{s_n\}_n$ – последовательность *сингулярных значений оператора T*. Компактный оператор $T : H \to H$ называется *оператором p-класса Шатена,* если $\| T \|_{\mathrm{Sch}}^{p} < \infty$.

Метрикой нормы *p*-класса Шатена называется **метрика нормы** $\| T - P \|_{\mathrm{Sch}}^{p}$ на множестве $S_p(H)$ всех операторов *p*-класса Шатена из H на себя. Множество $S_p(H)$ с нормой $\| \cdot \|_{\mathrm{Sch}}^{p}$ образует банахово пространство. $S_1(H)$ является классом *операторов со следом* для H и $S_2(H)$ является классом *операторов Гильберта–Шмидта* для H (см. также **Метрика нормы Шатена**, гл. 12).

Непрерывное двойственное пространство

Пусть $(V, \| \cdot \|)$ – *нормированное векторное пространство.* Пусть V' – множество всех *непрерывных* линейных функционалов T из V в основное поле ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и пусть $\| \cdot \|'$ – *операторная норма* на V', определенная как

$$\| T \|' = \sup_{\|x\| \le 1} | T(x) | .$$

Пространство $(V', \| \cdot \|')$ является банаховым пространством, которое называется **непрерывным двойственным пространством** (или *банаховым двойственным пространством*) пространства $(V, \| \cdot \|)$.

Так, непрерывным двойственным пространством для метрического пространства $l_p^n (l_p^\infty)$ является $l_q^n (l_q^\infty)$ соответственно. Оба непрерывных двойственных пространства для банаховых пространств C (состоящего из всех сходящихся последовательностей с l_∞**-метрикой**) и C_0 (состоящего из всех последовательностей (с l_∞**-метрикой**), сходящихся к нулю) естественным образом отождествляются с l_1^∞.

Постоянная расстояния операторной алгебры

Пусть $\mathcal{A}$ – операторная алгебра содержащаяся в $B(H)$ – множестве всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H. Для любого оператора $T \in B(H)$ пусть $\beta(T, A) = \sup\{\| P^{\perp} T P \|; P$ – проекция и $P^{\perp} \mathcal{A} P = (0)\}$. Пусть $\mathrm{dist}(T, \mathcal{A})$ есть *расстояние между оператором T* и *алгеброй* $\mathcal{A}$, т.е. наименьшая норма оператора $T - A$, где A пробегает $\mathcal{A}$. Наименьшая положительная постоянная C (если она существует) такая что для любого оператора $T \in B(H)$ выполняется неравенство

$$\mathrm{dist}(T, \mathcal{A}) \le C(T, \mathcal{A}),$$

называется **постоянной расстояния** для алгебры $\mathcal{A}$.

Глава 14

Расстояния в теории вероятностей

Пространством вероятностей называется *измеримое пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где $\mathcal{A}$ есть множество всех измеримых подмножеств множества Ω, а P – мера на $\mathcal{A}$ с $P(\Omega) = 1$. Множество Ω называется *пространством выборок.* Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется *событием,* в частности, *элементарное событие* – это подмножество множества Ω, содержащее только один элемент; $P(a)$ называется *вероятностью* события a. Мера P на $\mathcal{A}$ называется *вероятностной мерой,* или *законом распределения* (*вероятностей*), или просто *распределением* (*вероятностей*).

Случайная величина X есть измеримая функция из пространства вероятностей $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в измеримое пространство, называемое *пространством состояний* возможных значений переменной; обычно берутся действительные числа с *борелевой* α*-алгеброй,* так что $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Множество значений χ случайной величины X называется *несущим множеством* распределения P; элемент $x \in \chi$ называется *состоянием.*

Закон распределения можно единственным образом описать через *кумулятивную функцию распределения* (*CDF*, функцию распределения, кумулятивную *функцию плотности*) $F(x)$, которая показывает вероятность того, что случайная величина X принимает значение не больше, чем x: $F(x) = P(X \le x) = P(\omega \in \Omega: X(\omega) < x)$.

Таким образом, любая случайная величина X порождает такое *распределение вероятностей,* которым интервалу $[a, b]$ ставится в соответствие вероятность $P(a \le X \le b) = P(\omega \in \Omega: a \le X(\omega) \le b)$, т.е. вероятность, что величина X будет иметь значение в интервале $[a, b]$.

Распределение называется *дискретным,* если $F(x)$ состоит из последовательности конечных скачков при x_i; распределение называется *непрерывным,* если $F(x)$ непрерывна. Мы рассматриваем (как в большинстве приложений) только дискретные или *абсолютно непрерывные распределения*, т.е. функция распределения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является *абсолютно непрерывной.* Это означает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой последовательности попарно непересекающихся интервалов $[x_k, y_k]$, $1 \le k \le n$ неравенство $\sum_{1 \le k \le n} (y_k - x_k) < \delta$ влечет неравенство $\sum_{1 \le k \le n} |F(y_k) - F(x_k)| < \varepsilon$.

Закон распределения может быть также единственным образом определен через *плотность распределения вероятностей* (*PDF, функцию плотности, функцию вероятности*) $p(x)$ соответствующей случайной величины. Для абсолютно непрерывного распределения функция распределения является почти всюду дифференцируемой и функция плотности определяется как производная

$p(x) = F'(x)$ функции распределения; следовательно, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$ и $\int_{a}^{b} p(t)dt = P(a \le X \le b)$. Для случая дискретного распределения функция плотности (плотности случайной величины X) определяется как ее значения $p(x_i) = P(X = x)$, так что $F(x) = \sum_{x_i \le x} p(x_i)$. В противоположность этому каждое элементарное событие имеет в непрерывном случае вероятность ноль.

Случайная величина X применяется для "переноса" меры P на Ω на меру dF на $\mathbb{R}$. Соответствующее пространство вероятностей является техническим инструментом, применение которого обеспечивает существование случайных величин, а иногда используется и для их построения.

В теории вероятностей метрики между распределениями называются *простыми метриками,* а метрики между случайными величинами называются *сложными метриками* [Rach91]. Для простоты мы будем обычно рассматривать дискретный вариант метрик теории вероятностей, однако большинство из них определяются на любом измеримом пространстве. Для вероятностной метрики d условие $P(X = Y) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $d(X, Y) = 0$. Во многих случаях на пространстве состояний χ задается некоторое *базовое* расстояние и рассматриваемое расстояние является его лифтингом на пространство распределений.

В статистике многие из указанных ниже расстояний между распределениями P_1 и P_2 применяются как меры *степени согласия* между оцениваемым (P_2) и теоретическим (P_1) распределениями.

Далее по тексту символом $\mathbb{E}[X]$ обозначается *математическое ожидание* (или *среднее значение*) случайной величины X: в дискретном случае $\mathbb{E}[X] = \sum_{x} xp(x)$, а для непрерывного случая $\mathbb{E}[X] = \int xp(x)dx$. *Дисперсией* X называется величина $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X])^2]$. Используются также обозначения $p_X = p(x) = P(X = x)$, $F_X = F(x) = P(X \le x)$, $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.

14.1. РАССТОЯНИЯ НА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Все расстояния в данном разделе определяются на множестве **Z** всех случайных величин с одним и тем же несущим множеством χ; здесь $X, Y \in Z$.

L_p-метрика между величинами

L_p-метрика между величинами есть метрика на **Z** с $\chi \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{E}[|Z|^p] < \infty$ для всех $Z \in \mathbb{Z}$, определенная как

$$(\mathbb{E}[|X - Y|^p])^{1/p} = \left(\sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} |x - y|^p \; p(x,y) \right)^{1/p}.$$

Для $p = 1, 2$ и ∞ она называется соответственно *инженерной метрикой, среднеквадратическим расстоянием* и *расстоянием существенного супремума между переменными.*

Индикаторная метрика

Индикаторная метрика – метрика на **Z**, определенная как

$$\mathbb{E}[1_{X \neq Y}] = \sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} 1_{x \neq y} \, p(x,y) = \sum_{(x,y) \in \chi \times \chi, \; x \neq y} p(x,y).$$

(см. **Хэммингова метрика,** гл. 1).

К метрика Ки Фана

***K* метрика Ки Фана** есть метрика K на **Z,** определенная как

$$\inf\{\varepsilon > 0 : P(|X - Y| > \varepsilon) < \varepsilon\}.$$

Это является случаем $d(x, y) = |X - Y|$ **вероятностного расстояния.**

***K** метрика Ки Фана**

***K** метрика Ки Фана** есть метрика K^* на **Z**, определенная как

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right] = \sum_{(x,y) \in \chi \times \chi} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \, p(x,y).$$

Вероятностное расстояние

Для метрического пространства (χ, d) **вероятностное расстояние** на **Z** определяется как

$$\inf\{\varepsilon : P(d(X,Y) > \varepsilon) < \varepsilon\}.$$

14.2. РАССТОЯНИЯ НА ЗАКОНАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Все расстояния в данном разделе определяются на множестве $\mathcal{P}$ всех законов распределения таким образом, что соответствующие случайные величины имеют одинаковое множество значений χ; здесь $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$.

***L_p*-метрика между плотностями**

***L_p*-метрика между плотностями** есть метрика на $\mathcal{P}$ (для счетного χ), определенная для любог $p > 0$ как

$$\left(\sum_x |p_1(x) - p_2(x)|^p \right)^{\min(1, 1/p)}.$$

Для $p = 1$ ее половина называется **метрикой полной вариации** (или *изменяемым расстоянием, расстоянием следа*). Точечная метрика $\sup_x |p_1(x) - p_2(x)|$ соответствует $p = \infty$.

Полуметрика Махаланобиса

Полуметрика Махаланобиса (или *квадратичное расстояние, квадратичная метрика*) есть полуметрикая на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}^n$), определяемая как

$$\sqrt{(\mathbb{E}_{P_1}[X] - \mathbb{E}_{P_2}[X])^T A^{-1} (\mathbb{E}_{P_1}[X] - \mathbb{E}_{P_2}[X])}$$

для данной положительно определенной матрицы A.

Инженерная полуметрика

Инженерной полуметрикой называется полуметрика на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$|\mathbb{E}_{P_1}[X] - \mathbb{E}_{P_2}[X]| = \left| \sum_x x(p_1(x) - p_2(x)) \right|.$$

Метрика ограничения потери порядка *m*

Метрика ограничения потери порядка *m* есть метрикой на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{x \geq t} \frac{(x-t)^m}{m!} (p_1(x) - p_2(x)).$$

Метрика Колмогорова–Смирнова

Метрикой Колмогорова–Смирнова (или *метрикой Колмогорова, равномерной метрикой*) является метрика на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)|.$$

Расстояние Куипера на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)) + \sup_{x \in \mathbb{R}} (P_2(X \leq x) - P_1(X \leq x))$$

(см. *Метрика Помпейю–Эгглестона,* гл. 9).

Расстояние Андерсона–Дарлинга на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)}{\ln \sqrt{P_1(X \leq x)(1 - P_1(X \leq x))}}.$$

Расстояние Крнковича–Драхмы определяется как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (P_1(X \leq x) - P_2(X \leq x)) \ln \frac{1}{\sqrt{P_1(X \leq x)(1 - P_1(X \leq x))}} +$$

$$+ \sup_{x \in \mathbb{R}} (P_2(X \leq x) - P_1(X \leq x)) \ln \frac{1}{\sqrt{P_1(X \leq x)(1 - P_1(X \leq x))}}.$$

Три вышеприведенных расстояния используются в статистике в качестве степени согласия, особенно для расчета рисковой стоимости в финансовой сфере.

Расстояние Крамера–фон Мизеса

Расстояние Крамера–фон Мизеса есть расстояние на $\mathcal{P}$ (для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенное как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (P_1(X \le x) - P_2(X \le x))^2 \, dx.$$

Оно представляет собой квадрат ***L_2*-метрики** между кумулятивными функциями плотности.

Метрика Леви

Метрика Леви – метрика на $\mathcal{P}$ (только для $\chi \subset \mathbb{R}$), определенная как

$$\inf\{\varepsilon < 0 : P_1(X \le x - \varepsilon) - \varepsilon \le P_2(X \le x) \le P_1(X \le x + \varepsilon) + \varepsilon$$

$$\text{для любого } x \in \mathbb{R}\}$$

Она является специальным случаем **метрики Прохорова** для $(\chi, d) = (\mathbb{R}, |x - y|)$.

Метрика Прохорова

Для метрического пространства (χ, d) *метрика Прохорова* на $\mathcal{P}$ определяет0 ся как

$$\inf\{\varepsilon > 0 : P_1(X \in B) \le P_2(X \in B^\varepsilon) + \varepsilon \text{ и } P_2(X \in B) \le P_1(X \in B^\varepsilon) + \varepsilon\},$$

где B – любое борелевское подмножество множества χ, а $B^\varepsilon = \{x : d(x,y) < \varepsilon, y \in B\}$.

Это наименьшее (по всем совместным распределениям пар (X, Y) случайных величин X, Y, таких что их маргинальныеми распределениями являются P_1 и P_2 соответственно) **вероятностное расстояние** между случайными величинами X и Y.

Метрика Дадли

Для метрического пространства (χ, d) **метрика Дадли** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{f \in F} |\mathbb{E}_{P_1}[f(X)] - \mathbb{E}_{P_2}[f(X)]| = \sup_{f \in F} \left| \sum_{x \in \chi} f(x)(p_1(x) - p_2(x)) \right|.$$

где $F = \{f : \chi \to \mathbb{R}, \ \| f \|_\infty + \mathrm{Lip}_d(f) \le 1\}$ и $\mathrm{Lip}_d(f) = \sup_{x,y \in \chi, \ x \ne y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$.

Метрика Шульги

Для метрического пространства (χ, d) **метрика Шульги** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sup_{f \in F} \left| \left(\sum_{x \in \chi} |f(x)|^p \ p_1(x) \right)^{1/p} - \left(\sum_{x \in \chi} |f(x)|^p \ p_2(x) \right)^{1/p} \right|,$$

где $F = \{f : \chi \to \mathbb{R}, \ \mathrm{Lip}_d(f) \le 1\}$ и $\mathrm{Lip}_d(f) = \sup_{x,y \in \chi, \ x \ne y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$.

Полуметрика Золотарева

Полуметрикой Золотарева называется полуметрика на $\mathcal{P}$, определенная как

$$\sup_{f\in F}\left|\sum_{x\in\chi} f(x)(p_1(x)-p_2(x))\right|,$$

где F – любое множество функций (для непрерывного случая F – любое множество таких ограниченных непрерывных функций); см. **Метрика Шульги, Метрика Дадли.**

Метрика свертки

Пусть G – сепарабельная локально компактная абелева группа и пусть $C(G)$ – множество всех действительных ограниченных непрерывный функций на G, которые обращаются в нуль в бесконечности. Зафиксируем функцию $g \in C(G)$, такую что $|g|$ является интегрируемой по отношению к мере Хаара на G и $\{\beta \in G^* : \hat{g}(\beta) = 0\}$ имеет пустую внутренность: здесь G^* – дуальная группа для G и $\hat{g}$ – преобразование Фурье для g.

Метрика свертки Юкича (или *метрика сглаживания*) определяется для любых двух конечных мер Бэра со знаком P_1 и P_2 на G как

$$\sup_{x\in G}\int_{y\in G} g(xy^{-1})(dP_1 - dP_2)(y)\,|\,.$$

Данную метрику можно также рассматривать как разность $T_{p_1}(g) - T_{p_2}(g)$ *операторов свертки* на $C(G)$, где для любой $f \in C(G)$ оператор $T_p f(x)$ определяется как $\int_{y\in G} f(xy^{-1})dP(y)$.

Метрика несходства

Для метрического пространства (χ, d) **метрика несходства** на $\mathcal{P}$ определяется как

$\sup\{|P_1(X \in B) - P_2(X \in B)|: B$ – любой замкнутый шар$\}$.

Полуметрика двойного несходства

Полуметрика двойного несходства есть полуметрика между распределениями P_1 и P_2, заданными над разными семействами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ измеримых множеств, определяемая следующим образом:

$$D(P_1, P_2) + D(P_2, P_1),$$

где $D(P_1, P_2) = \sup\{\inf\{P_2(C) : B \subset C \in \mathcal{A}_2\} - P_1(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ – *расхождение.*

Расстояние Ле Кама

Расстояние Ле Кама есть полуметрика между распределениями вероятностей P_1 и P_2 (заданных на различных пространствах χ_1 и χ_2), определенная следующим образом:

$$\max\{\delta(P_1, P_2),\ \delta(P_2, P_1)\},$$

где $\delta(P_1, P_2) = \inf_B \sum_{x_2 \in \chi_2} |BP_1(X_2 = x_2) - BP_2(X_2 = x_2)|$ – *невязка Ле Кама.* Здесь $BP_1(X_2 = x_2) = \sum_{x_1 \in \chi_1} p_1(x_1) b(x_2 \mid x_1)$, где B – распределение вероятностей над $\chi_1 \times \chi_2$ и

$$b(x_2 \mid x_1) = \frac{B(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{B(X_1 = x_1)} = \frac{B(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{\sum_{x \in \chi_2} B(X_1 = x_2, X_2 = x)}.$$

Следовательно, $BP_2(X_2 = x_2)$ является распределением вероятностей над χ_2, поскольку $\sum_{x_2 \in \chi_2} b(x_2 \mid x_1) = 1$. Расстояние Ле Кама не является расстоянием теории вероятностей, поскольку P_1 и P_2 заданы над разными пространствами; это есть расстояние между статистическими экспериментами (моделями).

Метрика Скорохода–Билингсли

Метрика Скорохода–Билингсли – метрика на $\mathcal{P}$, определенная как

$$\inf_f \max\left\{\sup_x |P_1(X \le x) - P_2(X \le f(x))|, \sup_x |f(x) - x|, \sup_{x \ne y} \left|\ln \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right|\right\},$$

где f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – строго возрастающая непрерывная функция.

Метрика Скорохода

Метрикой Скорохода называется метрика на $\mathcal{P}$, определенная как

$$\inf\left\{\varepsilon > 0 : \max\left\{\sup_x |P_1(X < x) - P_2(X \le f(x))|, \sup_x |f(x) - x|\right\} < \varepsilon\right\},$$

где f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – строго возрастающая непрерывная функция.

Расстояние Бирнбаума–Орлича

Расстояние Бирнбаума–Орлича – расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(|P_1(X \le x) - P_2(X \le x)|),$$

где f: $\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ – любая неубывающая непрерывная функция с $f(0) = 0$ и $f(2t) \le Kf(t)$ для любого $t > 0$ и некоторого заданного K. Оно является **почти метрикой,** поскольку соблюдается условие $d(P_1, P_2) \le K(d(P_2, P_3) + d(P_3, P_2))$.

Расстояние Бирнбаума–Орлича применяется также в функциональном анализе на множестве всех интегрируемых функций на отрезке [0, 1], где оно определяется как $\int_0^1 H(|f(x) - g(x)|)dx$, где H – неубывающая непрерывная функция из [0, ∞) в [0, ∞), которая обращается в нуль в нуле и удовлетворяет *условию Орлича*:

$$\sup_{t>0} \frac{H(2t)}{H(t)} < \infty.$$

Расстояние Круглова

Расстояние Круглова – расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\int f(P_1(X \le x) - P_2(X \le x))dx,$$

где f: $\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ – строго возрастающая четная функция с $f(0) = 0$ и $f(s+t) \le K(f(s)+f(t))$ для любых $s, t \ge 0$ и некоторого заданного $K \ge 1$. Оно является **почти метрикой**, поскольку соблюдается условие $d(P_1, P_2) \le K(d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2))$.

Расстояние Бурби–Рао

Рассмотрим непрерывную выпуклую функцию $\phi(t) : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ и положим $\phi(0) = \lim_{t \to 0} \phi(t) \in (-\infty, \infty]$. Выпуклость ϕ влечет неотрицательность функции $\delta_\phi : [0,1]^2 \to (-\infty, \infty]$, определенной как $\delta_\phi(x, y) = \frac{\phi(x) + \phi(y)}{2} - \phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$ если $(x, y) \ne (0, 0)$ и $\delta_\phi(0, 0) = 0$.

Соответствующее **расстояние Бурби–Рао** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sum_x \delta_\phi(p_1(x), p_2(x)).$$

Расстояние Брегмана

Рассмотрим дифференцируемую выпуклую функцию $\phi(t)$: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ и положим $\phi(0) = \lim_{t \to 0} \phi(t) \in (-\infty, \infty]$. Выпуклость ϕ влечет неотрицательность функции $\delta_\phi : [0,1]^2 \to (-\infty, \infty]$, определенной как непрерывное продолжение функции $\delta_\phi(u, v) = \phi(u) - \phi(v) - \phi'(v)(u - v)$, $0 < u$, $v \le 1$ на $[0, 1]^2$.

Соответствующее **расстояние Брегмана** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\sum_1^m \delta_\phi(p_i, q_i)$$

(см. **Квазирасстояние Брегмана**).

***f*-расхождение Чизара**

***f*-расхождение Чизара** есть функция на множестве $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, определенная как

$$\sum_x p_2(x) f\left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right),$$

где f: $\mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция.

Случаи $f(t) = t \ln t$ и $f(t) = (t - 1)^2/2$ соответствуют **расстоянию Куллбака–Лейблера** и **χ^2-расстоянию**, указанных ниже. Случай $f(t) = |t - 1|$ соответствует ***L_1*-метрике между плотностями,** а случай $f(t) = 4\left(1 - \sqrt{t}\right)$ (так же как и случай $f(t) = 2(t+1) - 4\sqrt{t}$) соответствует квадрату **метрики Хеллинджера.**

Полуметрики могут быть получены так же, как квадратный корень f-расхождения Чизара в случаях $f(t) = (t-1)^2/(t+1)$ (**полуметрика Важды–Куса**), $f(t) = |t^a - 1|^{1/a}$ с $0 < a \le 1$ (**полуметрика Матушиты**) и $f(t) = \dfrac{(t^a+1)^{1/a} - 2^{(1-a)/a}(t+1)}{1-1/a}$ (**полуметрика Остеррейхера**).

Подобность достоверности

Подобность достоверности (или *коэффициент Бхаттачарья, аффинность Хеллинджера*) на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\rho(P_1, P_2) = \sum_x \sqrt{p_1(x)p_2(x)}.$$

Метрика Хеллинджера

В терминах **подобности достоверности, метрика Хеллинджера** (или *метрика Хеллинджера–Какутани*) на $\mathcal{P}$ определяется как

$$\left(2\sum_x \left(\sqrt{p_1(x)} - \sqrt{p_2(x)}\right)^2\right)^{1/2} = 2(1-\rho(P_1, P_2))^{1/2}.$$

Это – $\boldsymbol{L_2}$**-метрика** между квадратными корнями функций плотности.

Подобность среднего гармонического

Подобность среднего гармонического есть подобность на $\mathcal{P}$, определенная как

$$2\sum_x \frac{p_1(x)p_2(x)}{p_1(x)+p_2(x)}.$$

Расстояние 1 Бхаттачарья

В терминах **подобности достоверности, расстояние 1 Бхаттачарья** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$(\arccos \rho(P_1, P_2))^2.$$

Удвоение такого расстояния применяется также в статистике и машинном обучении, где оно называется **расстоянием Фишера.**

Расстояние 2 Бхаттачарья

В терминах **подобности достоверности, расстояние 2 Бхаттачарья** на $\mathcal{P}$ определяется как

$$-\ln \rho(P_1, P_2).$$

χ_2-расстояние

χ_2-расстояние (или **χ_2-расстояние Неймана**) есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\sum_x \frac{(p_1(x)-p_2(x))^2}{p_2(x)}.$$

χ_2-расстояние Пирсона определяется как

$$\sum_x \frac{(p_1(x)-p_2(x))^2}{p_1(x)}.$$

Вероятностная **симметрическая χ_2-мера** есть расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$2\sum_x \frac{(p_1(x)-p_2(x))^2}{p_1(x)-p_2(x)}.$$

Расстояние разделения

Расстоянием разделения называется квазирасстояние на $\mathcal{P}$ (для любого счетного χ), определенное как

$$\max_x\left(1-\frac{p_1(x)}{p_2(x)}\right).$$

(Не путать с **расстоянием разделения** между выпуклыми телами.)

Расстояние Куллбака–Лейблера

Расстояние Куллбака–Лейблера (или *относительная энтропия, отклонение информации, KL-расстояние*) есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$KL(P_1,P_2)=\mathbb{E}_{P_1}[\ln L]=\sum_x p_1(x)\ln\frac{p_1(x)}{p_2(x)},$$

где $L=\dfrac{p_1(x)}{p_2(x)}$ – *отношение правдоподобия*. Следовательно,

$$KL(P_1,P_2)=-\sum_x (p_1(x)\ln p_2(x))+\sum_x (p_1(x)\ln p_1(x))=H(P_1,P_2)-H(P_1),$$

где $H(P_1)$ – *энтропия* P_1, а $H(P_1,P_2)$ – *перекрестная энтропия* P_1 и P_2. Если P_2 является произведением маргиналов P_1, то KL-расстояние $KL(P_1,\ P_2)$ называется **количеством информации Шэннона** и равно $\sum_{(x,y)\in\chi\times\chi} p_1(x,y)\ln\dfrac{p_1(x,y)}{p_1(x)p_1(y)}$ (см. **расстояние Шэннона**).

Косое расхождение

Косое расхождение – квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$KL(P_1,aP_2+(1-a)P_1),$$

где $a\in[0,\ 1]$ – константа и KL – **расстояние Куллбака–Лейблера.** Таким образом, случай $a=1$ соответствует $KL(P_1,\ P_2)$. Косое расхождение с $a=\dfrac{1}{2}$ называется *K-расхождением.*

Расхождение Джеффри

Расхождением Джеффри (или *J-расхождением*) называется симметричная версия **расстояния Куллбака–Лейблера,** определенная как

$$KL(P_1, P_2) + KL(P_2, P_1) = \sum_x \left(p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_2(x)} + p_2(x) \ln \frac{p_2(x)}{p_1(x)} \right).$$

Для $P_1 \to P_2$ расхождение Джеффри ведет себя аналогично **χ_2-расстоянию.**

Расхождение Дженсена–Шэннона

Расхождение Дженсена–Шэннона определяется как

$$aKL(P_1, P_3) + (1-a)KL(P_2, P_3),$$

где $P_3 = aP_1 + (1-a)P_2$ и $a \in [0, 1]$ – константа (см. **Подобность ясности**).

На языке *энтропии* $H(P) = \sum_x p(x) \ln p(x)$ расхождение Дженсена–Шэннона равно $H(aP_1 + (1-a)P_2) - aH(P_1) - (1-a)H(P_2)$.

Расстояние Топсе есть симметричная версия **расстояния Куллбака–Лейблера** на $\mathcal{P}$. Оно определяется как

$$KL(P_1, P_3) + KL(P_2, P_3) = \sum_x \left(p_1(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_3(x)} + p_2(x) \ln \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \right),$$

где $P_3 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$. Расстояние Топсе есть удвоенное расхождение Дженсена–Шэннона с $a = \frac{1}{2}$. Некоторые авторы используют термин "расхождение Дженсена–Шэннона" только для данной величины a. Расстояние тоже метрикой не является, но его квадратный корень – метрика.

Расстояние среднего сопротивления

Расстояние среднего сопротивления по Дженсену–Шимановичу есть симметричная версия **расстояния Куллбака–Лейблера** на $\mathcal{P}$. Оно определяется как гармоническая сумма

$$\left(\frac{1}{KL(P_1, P_2)} + \frac{1}{KL(P_2, P_1)} \right)^{-1}$$

(см. **Метрика сопротивления** для графов, гл. 15).

Расстояние Али–Силвея

Расстояние Али–Силвея есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, заданное функционалом

$$f(\mathbb{E}_{P_1}[g(L)]),$$

где $L = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ – *отношение правдоподобия*, f – неубывающая функция, а g – непрерывная выпуклая функция (см. ***f*-расхождение Чизара**).

Случай $f(x) = x$, $g(x) = x \ln x$ соответствует **расстоянию Куллбака–Лейблера**; случай $f(x) = -\ln x$, $g(x) = x'$ – **расстоянию Чернова.**

Расстояние Чернова

Расстоянием Чернова (или *перекрестной энтропией Реньи*) называется расстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\max_{t\in[0,1]} D_t(P_1, P_2),$$

где $D_t(P_1, P_2) = -\ln \sum_x (p_1(x))^t (p_2(x))^{1-t}$, что пропорционально **расстоянию Реньи.**

Случай $t = \frac{1}{2}$ соответствует **расстоянию 2 Бхаттачарья.**

Расстояние Реньи

Расстояние Реньи (или *энтропия Реньи порядка t)* есть квазирасстояние на $\mathcal{P}$, определенное как

$$\frac{1}{t-1} \ln \sum_x p_2(x) \left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right)^t,$$

где $t \geq 0$, $t \neq 1$.

Пределом расстояния Реньи для $t \to 1$ является **расстояние Куллбака–Лейблера.** Для $t = \frac{1}{2}$ половина расстояния Реньи есть **расстояние 2 Бхаттачарья** (см. ***f*-расхождение Чизара** и **расстояние Чернова**).

Подобность ясности

Подобность ясности – это подобность на $\mathcal{P}$, определенная как

$$(KL(P_1, P_3) + KL(P_2, P_3)) - (KL(P_1, P_2) + KL(P_2, P_1)) =$$

$$= \sum_x \left(p_1(x) \ln \frac{p_2(x)}{p_3(x)} + p_2(x) \ln \frac{p_1(x)}{p_3(x)} \right),$$

где KL – **расстояние Куллбака–Лейблера** и P_3 – заданный ссылочный закон теории вероятностей. Впервые определена в труде [CCL01], где P_3 означало распределение вероятностей общего английского языка.

Расстояние Шэннона

Для *пространства с мерой* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ где множество Ω конечно и P является вероятностной мерой, *энтропия* функции $f: \Omega \to X$, где X – конечное множество, определяется как

$$H(f) = \sum_{x\in X} P(f = x) \ln(P(f = x));$$

следовательно, f может рассматриваться как *разбиение* пространства с мерой. Для любых двух таких разбиений $f: \Omega \to X$ и $g: \Omega \to Y$ обозначим *энтропию* разбиения (f, g): $\Omega \to X \times Y$ (*общую энтропию*) как $H(f, g)$ и *условную энтропию* как $H(f \mid g)$. Тогда **расстояние Шэннона** между f и g определяется как

$$2H(f, g) - H(f) - H(g) = H(f \mid g) + H(g \mid f).$$

Данное расстояние является метрикой. **Количество информации Шэннона** определяется как

$$H(f,g) - H(f) - H(g) = \sum_{(x,y)} p(f = x, g = y) \ln \frac{p(f = x, g = y)}{p(f = x)p(g = y)}.$$

Если P – закон равномерного распределения вероятностей, то, как доказал Гоппа, расстояние Шэннона может быть получено как предельный случай **метрики конечных подгрупп.**

В общем случае **метрика информации** (или **метрика энтропии**) между двумя случайными величинами (источниками информации) X и Y определяется как

$$H(X \mid Y) + H(Y \mid X),$$

где *условная энтропия* $H(X \mid Y)$ определяется как $\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \ln p(x \mid y)$ и $p(x,y) = P(X = x \mid Y = y)$ является условной вероятностью.

Нормализированная метрика информации определяется как

$$\frac{H(X \mid Y) - H(Y \mid X)}{H(X,Y)}.$$

Она равна 1, если X и Y независимы (см. другое понятие **Нормализированного расстояния информации,** гл. 11).

Метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна

Для метрического пространства (χ, d) **метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна** определяется как

$$\inf \mathbb{E}_S[d(X, Y)],$$

где инфимум берется по всем распределениям S пар (X, Y) случайных величин X и Y, таких что маргинальными распределениями X и Y являются P_1 и P_2.

Для любого **сепарабельного** метрического пространства (χ, d) это эквивалентно **липшицеву расстоянию между мерами** $\sup_f \int f d(P_1 - P_2)$, где супремум берется по всем функциям f с $| f(x) - f(y) | \le d(x,y)$ для любых $x, y \in \chi$.

В более общем смысле L_p**-расстояние Вассерштейна** для $\chi = \mathbb{R}^n$ определяется как

$$(\inf \mathbb{E}_S[d^p(X,Y)])^{1/p},$$

и для $p = 1$ оно называется также $\overline{\rho}$*-расстоянием.* Для (χ, d) = ($\mathbb{R}$, $| x - y |$) оно называется L_p*-метрикой между функциями распределения* (CDF) и его можно записать

$$(\inf \mathbb{E}[| X - Y |^p])^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} | F_1(x) - F_2(x) |^p \, dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 | F_1^{-1}(x) - F_2^{-1}(x) |^p \, dx \right)^{1/p}$$

с $F_i^{-1}(x) = \sup_u (P_i(X \le x) < u)$.

Случай $p = 1$ этой метрики называется **метрикой Монжа–Канторовича** (или, в теории фракталов *метрикой Хатчинсона*), **метрикой Вассерштейна** (или *метрикой Форте–Мурье*)

$\bar{d}$-метрика Орнштейна

$\bar{d}$-метрика Орнштейна есть метрика на $\mathcal{P}$ (для $\chi = \mathbb{R}^n$), определенная как

$$\frac{1}{n} \inf \int_{x,y} \left(\sum_{i=1}^{n} 1_{x_i \neq y_i} \right) dS,$$

где инфимум берется по всем совместным распределениям S пар (X, Y) случайных величин X и Y, таких что маргинальными распределениями X и Y являются P_1 и P_2.

Данная метрика используется в теории стационарных случайных процессов, теории динамических систем и теории кодирования.

Часть IV

РАССТОЯНИЯ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Глава 15

Расстояния в теории графов

Графом называется пара $G = (V, E)$, где V – множество, называемое множеством *вершин* графа G, и E – множество неупорядоченных пар вершин, которые называются *ребрами* графа G. *Ориентированный граф* (или *орграф*) есть пара $D = (V, E)$, где V – множество, называемое множеством *вершин* орграфа D, и E – множество упорядоченных пар вершин, которые называются *дугами* орграфа D.

Граф, у которого любые две вершины соединены не более чем одним ребром, называется *простым графом*. Если допускается соединение вершин кратными (параллельными) ребрами, то такой граф называется *мультиграфом*. Граф называется *конечным* (*бесконечным*), если множество V его вершин *конечно* (или соответственно *бесконечно*). *Порядком* конечного графа называется количество его вершин; *размером* конечного графа называется число его ребер.

Граф или ориентированный граф совместно с функцией, приписывающей положительный вес каждому ребру, называется *взвешенным графом* или *сетью*. Сеть также называют **каркасом** в том случае когда веса интерпретируются как длины ребер возможного вложения в некоторое евклидово пространство. В терминах теории прочности ребра каркаса называются *прутьями* (обычно одинаковой длины); **тенсегрити** – это каркасная структура, в которой прутья являются либо элементом натяжения – *тросами* (т.е. не могут отдалиться друг от друга), либо элементом сжатия – *распорками* (т.е. не могут сблизиться).

Подграфом графа G называется граф G', вершины и ребра которого образуют подмножества вершин и ребер графа G. Если G' является подграфом G, то граф G называется *суперграфом графа* G'. *Индуцированный подграф* – подмножество вершин графа G вместе со всеми ребрами, обе конечные точки которых принадлежат данному подмножеству.

Граф $G = (V, E)$ называется *связным*, если для любых вершин $u, v \in V$ существует $(u - v)$ *путь*, т.е. такая последовательность ребер $uw_1 = w_0w_1, w_1w_2, \ldots, w_{n-1}w_n = w_{n-1}v$ из E, что $w_i \neq w_j$ для $i \neq j, i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Орграф $D = (V, E)$ называется *сильно связным*, если для любых вершин $u, v \in V$ существуют как *ориентированный* $(u - v)$ *путь*, так и *ориентированный* $(v - u)$ *путь*. Любой максимальный связный подграф графа G называется его *связной компонентой*.

Соединенные ребром вершины называются *смежными*. *Степень* $\deg(v)$ вершины $v \in V$ графа $G = (V, E)$ равна числу его вершин, смежных с v.

Полным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена ребром. *Двудольный граф* – граф, в котором множество вершин V разбивается на два таких непересекающихся подмножества, что в одном и том же подмножестве нет ни одной пары смежных вершин. *Путь* – это простой связный граф, в котором две вершины имеют степень 1, а другие вершины, если они существуют, имеют степень 2; *длиной* пути является число его ребер. *Циклом* является *замкнутый путь*, т.е. простой связный граф, каждая вершина которого имеет степень 2. *Дерево* – это простой связный граф, не имеющий циклов.

Два графа, содержащие одинаковое число одинаково соединенных вершин, называются *изоморфными.* Формально, два графа $G = (V(G), E(G))$ и $H = (V(H), E(H))$ называются *изоморфными,* если существует биекция $f: V(G) \to V(H)$, такая что для любых $u, v \in V(G)$ ребро $uv \in E(G)$ тогда и только тогда, когда ребро $f(u)f(v) \in E(H)$.

Мы будем рассматривать только простые конечные графы и орграфы, точнее классы эквивалентности таких изоморфных графов.

15.1. РАССТОЯНИЯ НА ВЕРШИНАХ ГРАФА

Метрика пути

Метрикой пути (или *метрикой графа*, *метрикой кратчайшего пути*) d_{path} называется метрика на множестве вершин графа $G = (V, E)$, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего $(u - v)$ пути в G. Кратчайший $(u - v)$ путь называется *геодезической линией.* Соответствующее метрическое пространство называется *графическим метрическим пространством,* связанным с графом G.

Метрика пути *графа Кэли* Γ конечно порожденной группы $(G, \cdot, e)$ называется **словарной метрикой.** Метрика пути графа $G = (V, E)$, такого что V может быть циклически упорядоченно в *гамильтоновом цикле,* называется **гамильтоновой метрикой. Метрика гиперкуба** – метрика пути *графа гиперкуба* $H(m, 2)$ с множеством вершин $V = \{0, 1\}^m$, ребра которого являются парами векторов $x, y \in \{0, 1\}^m$, такими что $|\{i \in \{1,\ldots, n\}: x_i \neq y_i\}| = 1$; она равна $|\{i \in \{1,\ldots, n\}: x_i \neq 1\} \Delta \{i \in \{1,\ldots, n\}: y_i = 1|$. Графическое метрическое пространство, соответствующее графу гиперкуба, называется *метрическим пространством гиперкуба.* Оно совпадает с метрическим пространством $(\{0,1\}^m, d_{l_1})$.

Взвешенная метрика пути

Взвешенная метрика пути d_{wpath} есть метрика на множестве вершин V связного взвешенного графа $G = (V, E)$ с положительными весами ребер $(w(e))_{e \in E}$, определенная как

$$\min_P \sum_{e \in P} w(e),$$

где минимум берется по всем $(u - v)$ путям P в G.

Расстояние обхода

Расстояние обхода – расстояние на множестве вершин V связного графа $G = (V, E)$, определенное как длина самого длинного *индуцированного пути* (т.е. пути, который является индуцированным подграфом графа G) из вершины u в вершину $v \in V$.

В общем случае оно не является метрикой. Граф называется *графом обхода*, если его расстояние обхода совпадает с **метрикой пути** (см., например, [CJT93]).

Квазиметрика пути в орграфах

Квазиметрика пути в орграфах d_{dpath} есть квазиметрика на множестве вершин V сильно связного ориентированного графа $D = (V, E)$, определенная для любых $u, v \in V$ как длина кратчайшего ориентированного $(u - v)$ пути в графе D. Хороший таксист при езде по городским улицам с односторонним движением должен пользоваться данной квазиметрикой.

Циклическая метрика в орграфах

Циклической метрикой в орграфах называется метрика на множестве вершин V сильно связного ориентированного графа $D = (V, E)$, определенная как

$$d_{\text{dpath}}(u, v) + d_{\text{dpath}}(v, u),$$

где d_{dpath} – **квазиметрика пути в орграфах.**

ϒ-метрика

Для класса Υ связных графов метрика d метрического пространства (X, d) называется **ϒ-метрикой**, если (X, d) изометрично подпространству метрического пространства (V, d_{wpath}), где граф $G = (V, E) \in \Upsilon$ и d_{wpath} – **взвешенная метрика пути** на множестве вершин V графа G с положительной функцией реберных весов w (см. **древовидная метрика**).

Древовидная метрика

Древовидная метрика (или **взвешенная метрика дерева**) d на множестве X есть **ϒ-метрика** для класса Υ всех деревьев, т.е. метрическое пространство (X, d) изометрично подпространству метрического пространства (V, d_{wpath}), где $T = (V, E)$ есть дерево и d_{wpath} – **взвешенная метрика пути** на множестве вершин V дерева T с положительной функцией реберных весов w. Метрика является древовидной метрикой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет **неравенству четырех точек.**

Метрика d на множестве X называется ослабленной древоподобной метрикой, если множество X может быть вложено в некоторое (не обязательно положительно) реберно-взвешенное дерево, такое что для любых $x, y \in X$ метрика $d(x, y)$ равна сумме весов всех ребер вдоль (единственного) пути между соответствующими вершинами x и y дерева. Метрика является ослабленной древовидной метрикой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет **ослабленному неравенству четырех точек.**

Метрика сопротивления

Для случая связного графа $G = (V, E)$ с положительной функцией реберных весов $w = (w(e))_{e \in E}$ рассмотрим веса ребер как сопротивления. Возьмем любые две различные вершины u и v предположим, что к ним подсоединена батарея таким образом, что единица тока течет из v в u. Необходимая для этого разность (потенциалов) напряжения определяется по закону Ома как эффективное сопротивление между u и v в электрической цепи; оно называется **метрикой сопротивления** $\Omega(u, v)$ между ними ([KlRa93]) (см. **Расстояние среднего сопротивления**, гл. 14). Число $\dfrac{1}{\Omega(u, v)}$ можно рассматривать подобно электрической *проводимости* как меру *соединяемости* между u и v. Именно, выполняется условие $\Omega(u, v) \le \min\limits_{P} \sum\limits_{e \in P} \dfrac{1}{w(e)}$, где P – любой $(u – v)$ путь, с равенством тогда и только тогда, когда такой путь P является единственным; следовательно, если $w(e) = 1$ для всех ребер, равенство означает, что G является деревом. Метрика сопротивления применяется (в физике, химии и сетях) в случаях, когда необходимо учитывать число путей между любыми двумя вершинами.

Если $w(e) = 1$ для всех ребер, то

$$\Omega(u, v) = (g_{uu} + g_{vv}) - (g_{vv} + g_{uu}),$$

где $((g_{ij}))$ – *обобщённая обратная матрица для матрицы Лапласа* (l_{ij}) графа G: здесь l_{ii} есть степень вершины i, а для $i \neq j$ величина $l_{ij} = 1$, если вершины i и j смежные, и $l_{ij} = 0$, иначе. Вероятностная интерпретация такова: $\Omega(u,v) = (\deg(u)\Pr(u-v))^{-1}$, где $\deg(u)$ – степень вершины u и $\Pr(u-v)$ – вероятность при случайног блуждании, начинающемся с u, посетить v перед возвращением в u.

Усеченная метрика

Усеченной метрикой называется метрика на множестве вершин графа, равная 1 для любых двух смежных вершин и равная 2 для любых различных несмежных вершин. Она является 2-**усеченной метрикой** для **метрики пути** графа. Она является **(1,2)-*B*-метрикой,** если степень любой вершины не больше чем B.

Многократно выверенное расстояние

Многократно выверенным расстоянием называется расстояние на множестве вершин V *m-связного* взвешенного графа$G = (V, E)$, определенное для любых $u, v \in V$ как минимальная взвешенная сумма длин m непересекающихся $(u - v)$ путей. Оно является обобщением понятия расстояния на случай, когда требуется найти несколько непересекающихся путей между двумя точками, например, в системах связи, где $m - 1$ из $(u - v)$ путей используются для кодирования сообщения, передаваемого по оставшемуся $(u - v)$ пути (см. [McCa97]).

Граф G называется *m-связным,* если не существует множества из $m - 1$ ребра, удаление которых превратит граф в несвязный. Связный граф является 1-связным.

Разрез – это *разбиение* множества на две части. Если задано подмножество S множества $V_n = \{1,\ldots, n\}$, то задано разбиение $\{S, V_n \backslash S\}$ множества V_n. **Полуметрика разреза** на V_n, определяемая таким разбиением, может рассматриваться как специальная полуметрика на множестве вершин *полного двудольного графа* $K_{S,V_n \backslash S}$, где расстояние между вершинами равно 1, если они принадлежат разным частям данного графа, и равно 0, иначе.

Полуметрика разреза

Если задано подмножество S множества $V_n = \{1,\ldots, n\}$, то **полуметрика разреза** (или **полуметрика раздвоения**) δ_S является полуметрика на V_n, определенная как

$$\delta_S(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq j, \ |S \cap \{i,j\}| = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обычно она рассматривается как вектор в $\mathbb{R}^{|E_n|}$, $E(n) = \{\{i,j\} : 1 \le i < j \le n\}$.

Круговой разрез V_n задается подмножеством $S_{[k+1,\,l]} = \{k+1,\ldots, l\} \pmod n \subset V_n$: если рассматривать точки как упорядоченные вдоль окружности в том же круговом порядке, то $S_{[k+1,\,l]}$ есть множество последовательных вершин от $k+1$ до l. Для кругового разреза соответствующая полуметрика разреза называется **полуметрикой кругового разреза.**

Полуметрикой четного разреза называется полуметрика δ_S на V_n с четным $|S|$. **Полуметрикой нечетного разреза** называется полуметрика δ_S на V_n с нечетным $|S|$. Полуметрика ***k*-равномерного разреза** есть δ_S на V_n с $|S| \in \{k, n-k\}$. **Полуметрика равного разреза** есть полуметрика δ_S на V_n с $|S| \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$.

Полуметрика неравного разреза – полуметрика δ_S на V_n с $|S| \notin \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$ (см., например, [DeLa97]).

Разложимая полуметрика

Разложимая полуметрикой – полуметрика на $V_n = \{1,\ldots, n\}$, которую можно представить как неотрицательную линейную комбинацию **полуметрик разреза.** Множеством всех разложимых полуметрик на V_n образует *выпуклый конус,* который называется *разрезным конусом* CUT_n.

Полуметрика на V_n будет разложимой тогда и только тогда, когда она является **конечной l_1-полуметрикой.**

Круговой разложимой полуметрикой называется полуметрика на $V_n = \{1,\ldots, n\}$, которую можно представить как неотрицательную линейную комбинацию **полуметрик кругового разреза.**

Полуметрика на V_n будет круговой разложимой полуметрикой тогда и только тогда, когда она является **полуметрикой Калмансона** по отношению к тому же порядку (см. [ChFi98]).

Конечная l_p-полуметрика

Для конечного множества X **конечная l_p-полуметрик** называетсяс полуметрика d на X, такая что (X, d) есть полуметрическое подпространство l_p^m*-пространства* $(\mathbb{R}^m, d_{l_p})$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если $X = \{0, 1\}^n$, то метрическое пространство (X, d) называется l_p^m-кубом. l_1^m-куб называется *хэмминговым кубом.*

Полуметрика Калмансона

Полуметрикой Калмансона называется полуметрика d на $V_n = \{1,\ldots, n\}$, удовлетворяющая условию

$$\max\{d(i,j)+d(r,s), d(i,s)+d(j,r)\} \le d(i,r)+d(j,s)$$

для всех $1 \le i \le j \le r \le s \le n$. В данном определении важен порядок элементов; именно, d является полуметрикой Калмансона *по отношению к порядку* $1,\ldots, n$.

Эквивалентно, если рассматривать точки $\{1,\ldots, n\}$ как расположенные вдоль цикла C_n в том же круговом порядке, то расстояние d на V_n является полуметрикой Калмансона, если неравенство

$$d(i,r)+d(j,s) \le d(i,j)+d(r,s)$$

выполняется для всех $i, j, r, s \in V_n$, таких что отрезки $[i, j]$ и $[r, s]$ являются пересекающимися хордами C_n.

Древовидная метрика есть метрика Калмансона для некоторой упорядоченности вершин дерева. Евклидова метрика, ограниченная на множество точек, образующих выпуклый многоугольник на плоскости, является метрикой Калмансона.

Полуметрика мультиразреза

Пусть $\{S_1,\ldots, S_q\}$, $q \ge 2$ – *разбиение* множества $V_n = \{1,\ldots, n\}$, т.е. совокупность $S_1,\ldots, S_q$ попарно непересекающихся подмножеств множества V_n, таких что $S_1 \cup \ldots \cup S_q = V_n$.

Полуметрика мультиразреза $\delta_{S_1,\ldots,S_q}$ – это полуметрика на V_n, определенная как

$$\delta_{S_1,\ldots,S_q}(i,j)=\begin{cases}0, \text{ если } i,j\in S_h \text{ для некоторого } h, 1\le h\le q,\\ 1, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Квазиполуметрика ориентированного разреза

Для подмножества S множества $V_n = \{1,\ldots, n\}$ **квазиполуметрикой ориентированного разреза** δ'_S называется квазиполуметрика на V_n, определенная как

$$\delta'_S(i,j)=\begin{cases}1, \text{ если } i\in S,\ j\notin S,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Обычно она рассматривается как вектор в $\mathbb{R}^{|I_n|}$, $I(n)=\{\{i,j\}: 1\le i\ne j\le n\}$. **Полуметрика разреза** δ_S может быть представлена как $\delta'_S+\delta'_{V_n\setminus S}$.

Квазиполуметрика ориентированного мультиразреза

Для *разбиения* $\{S_1,\ldots, S_q\}$, $q \ge 2$ множества V_n **квазиполуметрикой ориентированного мультиразреза** $\delta_{S_1,\ldots,S_q}$ называется квазиполуметрика на V_n, определенная как

$$\delta'_{S_1,\ldots,S_q}(i,j)=\begin{cases}1, \text{ если } i\in S_h,\ j\in S_m,\ h<m,\\ 0, \text{ иначе.}\end{cases}$$

15.2. ГРАФЫ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ РАССТОЯНИЙ

***k*-степень графа**

***k*-степень графа** $G = (V, E)$ есть суперграф $G^k = (V, E')$ графа G с ребрами между всеми парами вершин, метрика пути для которых не больше чем k.

Изометрический подграф

Подграф H графа $G = (V, E)$ называется **изометрическим подграфом,** если метрика пути между любыми двумя вершинами подграфа H равна их метрике пути в графе G.

Ретракт подграфа

Подграф H графа $G = (V, E)$ называется **ретракт-подграфом,** если он порожден идемпотентным **сжимающим отображением** G в себя, т.е. $f^2 = f: V \to V$ с $d_{\text{path}}(f(u), f(v)) \le d_{\text{path}}(u, v)$ для всех . Любой ретракт – подграф является **изометрическим подграфом.**

Геодетический граф

Связный граф называется **геодетическим,** если существует только один кратчайший путь между любыми двумя его вершинами. Любое дерево является геодетическим графом.

Расстоянно-регулярный граф

Связный граф $G = (V, E)$ диаметра T называется **расстоянно-регулярным,** если для любых его вершин u, v и любых целых чисел $0 \le i, j \le T$ количество вершин w, таких что $d_{path}(u, w) = i$ и $d_{path}(v, w) = j$, зависит только от i, j и $k = d_{path}(u, v)$, но не от выбранных вершин u и v.

Специальным случаем является **расстоянно-транзитивный граф,** т.е. такой граф, что его группа автоморфизмов транзитивна для любого $0 \le i < T$ на парах вершин (u, v) с $d_{path}(u, v) = i$.

Любой расстоянно-регулярный граф является **расстоянно-уравновешенным графом,** т.е. $|\{x \in V: d(x, u) \le d(x, v)\}| = |\{x \in V: d(x, v) \le d(x, u)\}|$ для любых его ребер uv, и **расстоянно-степенно-регулярным графом,** т.е. $|\{x \in V: d(x, u) = i\}|$ зависит только от i, но не от $u \in V$.

Расстоянно-регулярный граф иначе называется *P-полиномиальной ассоциативной схемой.* **Конечное полиномиальное метрическое пространство** – ассоциативная схема, которая P- и Q-полиномиальна. Термин бесконечное **полиномиальное метрическое пространство** используется для *компактного связного двухточечного однородного пространства.* Ванг классифицировал их как евклидовы единичные сферы, действительные, комплексные и кватернионные проективные пространства или проективные плоскости Кэли.

Расстоянно-полиномиальный граф

Возьмем связный граф $G = (V, E)$ диаметра T, для любого $2 \le i \le T$ обозначим через G_i граф с тем же множеством вершин, что и G, и ребрами uv, такими что $d_{path}(u, v) = i$.

Граф G называется **расстоянно-полиномиальным,** если матрица смежности любого графа G_i, $2 \le i \le T$, является полиномом в терминах матрицы смежности G.

Любой расстоянно-регулярный граф является расстоянно-полиномиальным.

Расстоянно-наследственный граф

Связный граф называется **расстоянно-наследственным,** если каждый из его связных индуцированных подграфов изометричен. Граф является расстоянно-наследственным, если изометричен каждый из его индуцированных путей. Любой *кограф,* т.е. граф, который не содержит индуцированных путей на четырех вершин,ах является расстоянно-наследственным. Граф является расстоянно-наследственным тогда и только тогда, когда его метрика пути удовлетворяет **ослабленному неравенству четырех точек.** Граф является расстоянно-наследственным, двудольным расстоянно-наследственным, блоковым графом или деревом тогда и только тогда, когда его метрика пути есть ослабленная древовидная метрика для реберных весов, которые являются, соответственно, ненулевыми полуцелыми, ненулевыми целыми, положительными полуцелыми или положительными целыми числами.

Граф является расстоянно-наследственным тогда и только тогда, когда каждый его индуцированный подграф – **1-остов.**

Блоковый граф

Граф называется **блоковым**, если каждый его *блок,* т.е. максимальный 2-связный индуцированный подграф, является полным графом. Любое дерево – блоковый граф. Граф является блоковым тогда и только тогда, когда его метрика пути является **древовидной метрикой** или, эквивалентно, удовлетворяет **неравенству четырех точек.**

Птолемеев граф

Граф называется **птолемеевым,** если его метрика пути удовлетворяет **неравенству Птолемея**

$$d(x,y)d(u,z) \le d(x,u)d(y,z) + d(x,z)d(y,u).$$

Граф является птолемеевым тогда и только тогда, когда он расстоянно-наследственный и *хордальный,* т.е. каждый цикл длины более 3 имеет хорду. В частности, любой **блоковый граф** является птолемеевым.

Граф *D*-расстояния

Для множества D положительных чисел, содержащего 1, и метрического пространства (X, d) **графом *D*-расстояния** $D(X, d)$ называется граф с множеством вершин X и множеством ребер $\{uv : d(u, v) \in D\}$ (см. ***D*-хроматическое число,** гл. 1).

Граф D-расстояния называется *графом единичного расстояния,* если $D = \{1\}$, *графом* ε*-единичного расстояния,* если $D = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$, *графом единичной окрестности,* если $D = (0, 1]$, *графом целочисленного расстояния*, если $D = \mathbb{Z}_+$, *графом рационального расстояния*, если $D = \mathbb{Q}_+$, *графом простого расстояния,* если D является множеством простых чисел (с 1).

Обычно метрическое пространство (X, d) является подпространством евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Более того, каждый конечный граф $G = (V, E)$ может быть представлен как граф D-расстояния в некотором $\mathbb{E}^n$. Минимальная размерность такого евклидова пространства называется *D-размерностью* графа G.

***t*-Неприводимое множество**

Множество $S \subset V$ вершин в связном графе $G = (V, E)$ называется ***t*-неприводимым** (по Хаттингу и Хеннингу, 1994), если для любого $u \in S$ существует вершина $v \in V$, такая что для метрики пути выполняется неравенство

$$d(v,x) \le t < d(v, V \setminus S).$$

Число *t*-неприводимое ir_t графа G есть наименьшее кардинальное число $|S|$, такое что S является, а $S \cup \{v\}$ не является t-неприводимым для каждого $v \in V \setminus S$.

Число t-доминирования γ_t и *число t-независимости* α_t графа G есть соответственно кардинальное число наименьшего *t-покрытия* и наибольшей $\frac{1}{2}$*-упаковки* метрического пространства (V, d) (см. **Радиус метрического пространства**, гл. 1). Пусть γ_t^i – наименьшее $|S|$, такое что S является, а $S \cup \{v\}$ не является $\frac{t}{2}$-упаковкой для каждого $v \in V \setminus S$; следовательно, такая *нерасширяемая* $\frac{t}{2}$-упаковка является также t-покрытием. При этом выполняется условие $\frac{\gamma_t + 1}{2} \le ir_t \le \gamma_t \le \gamma_t^i \le \alpha_t$.

***t*-Остов**

Остовной подграф $H = (V, E(H))$ связного графа $G = (V, E)$ называется ***t*-остовом** графа G, если для любых $u, v \in V$ справедливо неравенство $d^H_{\text{path}}(u,v) / d^G_{\text{path}}(u,v) \le t$.. Величина t называется *коэффициентом растяжения* подграфа H.

Остовное дерево связного графа $G = (V, E)$ есть подмножеством из $|V| - 1$ ребер, которые образуют дерево на множестве вершин V.

Расстояние Штейнера

Расстояние Штейнера множества $S \subset V$ вершин связного графа $G = (V, E)$ есть минимальное число ребер связного подграфа графа G, содержащего S. Такой подграф является деревом и называется *деревом Штейнера* для S.

Схема индексирования расстояний

Говорят, что семейство графов A (Пелег, 2000) имеет $l(n)$ **схему индексирования расстояний,** если существует функция L, которая индексирует вершины каждого n-вершинного графа в A различными индексами величиной до бит, и существует алгоритм, называемый ***декодером расстояний,*** который находит расстояние между любыми двумя вершинами u, v в графе из A в полиномиальное (по длине его индексов $L(u), L(v)$) время.

15.3. РАССТОЯНИЯ НА ГРАФАХ

Подграф-суперграф расстояния

Общий подграф графов G и H – граф, который изоморфен индуцированным подграфам обоих графов G и H. *Общий суперграф* графов G и H – граф, содержащий индуцированные подграфы, изоморфные графам G и H.

Расстояние Зелинки d_Z на множестве **G** всех графов (более точно, на множестве всех классов эквивалентности изоморфных графов) определяется как

$$\max\{n(G_1), n(G_2)\} - n(G_1, G_2)$$

для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}$, где $n(G_1$, – число вершин в G_i, $i = 1, 2$ и $n(G_1, G_2)$ – максимальное число вершин общего подграфа графов G_1 и G_2).

Для произвольного множества **M** графов **расстояние общего подграфа** d_M на **M** определяется как

$$\max\{n(G_1)n(G_2)\} - n(G_1, G_2),$$

а **расстояние общего суперграфа** d_M^* на **M** определяется как

$$N(G_1, G_2) - \min\{n(G_1), n(G_2)\}$$

для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{M}$, где $n(G_i)$ – число вершин в G_i, $i = 1, 2$ и $n(G_1, G_2)$ – максимальное число вершин общего подграфа графов $G \in \mathbf{M}$ и G_1 и G_2 и $N(G_1, G_2)$ – минимальное число вершин общего суперграфа графов $H \in \mathbf{M}$ и G_1 и G_2.

d_M является метрикой на **M**, если выполняется следующее условие (1): если $H \in \mathbf{M}$ – общий суперграф графов $G_1, G_2 \in \mathbf{M}$, то существует общий подграф $G \in \mathbf{M}$ графов G_1 и G_2 с $n(G) \geq n(G_1) + n(G_2) - n(H)$. d_M^* является метрикой на **M**, если выполняется следующее условие (2): если $G \in \mathbf{M}$ – общий подграф графов $G_1, G_2 \in \mathbf{M}$, то существует общий суперграф $H \in \mathbf{M}$ графов G_1 и G_2 с $n(H) \geq n(G_1) + n(G_2) - n(G)$. Мы имеем $d_M \leq d_M^*$, если выполняется условие (1) и $d_M \geq d_M^*$, если выполняется условие (2).

Расстояние d_M является метрикой на множестве **G** всех графов, множестве всех графов без циклов, множестве всех двудольных графов и множестве всех деревьев. Расстояние d_M^* является метрикой на множестве G всех графов, множестве всех связных графов, множестве всех связных двудольных графов и множестве всех деревьев. Расстояние Зелинки d_Z совпадает с d_M и d_M^* на множестве **G** всех графов. На множестве **T** всех деревьев расстояния d_M и d_M^* идентичны, но отличаются от расстояния Зелинки.

Расстояние Зелинки d_Z является метрикой на множестве $\mathbf{G}(n)$ всех графов с n вершинами и равно $n - k$ или $K - n$ для всех $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n)$, где k – максимальное число вершин общего подграфа графов G_1 и G_2, а K – минимальное число вершин общего суперграфа графов G_1 и G_2. На множестве $\mathbf{T}(n)$ всех деревьев с n вершинами расстояние d_Z называется **расстоянием дерева Зелинки** (см., например, [Zeli75]).

Реберное расстояние

Реберное расстояние – расстояние на множестве **G** всех графов, определенное как

$$|E_1| + |E_2| - 2|E_{12}| + \|V_1| - |V_2\|$$

для любых графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2),$, где $G_{12} = (V_{12}, E_{12})$ – общий подграф графов G_1 и G_2 с максимальным числом ребер. Данное расстояние широко применяется в области органической и медицинской химии.

Расстояние стягивания

Расстояние стягивания – расстояние на множестве $\mathbf{G}(n)$ всех графов с n вершинами, определенное как

$$n - k$$

для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n)$, где k – максимальное число вершин графа, изоморфного одновременно графу, полученному из каждого графа G_1, G_2 конечным числом операций стягивания ребер.

Осуществить *стягивание* ребра $uv \in E$, принадлежащего графу $G = (V, E)$, означает заменить вершины u и v одной такой вершиной, которая является смежной для всех вершин $V \setminus \{u, v\}$, смежных с u или v.

Расстояние перемещения ребра

Расстояние перемещения ребра есть метрика на множестве $\mathbf{G}(n, m)$ всех графов с n вершинами и m ребрами, определенная для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n, m)$ как минимальное число *перемещений ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2. Оно равно $m - k$, где k – максимальное число ребер общего подграфа графов G_1 и G_2.

Перемещение ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G перемещением ребра, если существуют (не обязательно различные) вершины u, v, w и x в графе G, такие что $uv \in E(G)$, $wx \neq E(G)$ и $H = G - uv + wx$.

Расстояние скачка ребра

Расстояние скачка ребра – расширенная метрика (которая в общем случае может принимать значение ∞) на множестве $\mathbf{G}(n, m)$ всех графов с n вершинами и m

ребрами, определенная для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n, m)$ как минимальное число *скачков ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

Скачок ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G с помощью скачка ребра, если существуют четыре различные вершины u, v, w и x в графе G, такие что $uv \in (G)$, $wx \notin E(G)$ и $H = G - uv + wx$.

Расстояние вращения ребра

Расстояние вращения ребра есть метрика на множестве $\mathbf{G}(n, m)$ всех графов с n вершинами и m реберами, определенная для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}(n, m)$ как минимальное число *вращений ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

Вращение ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G с помощью вращения ребра, если существуют различные вершины u, v и w в графе G, такие что $uv \in E(G)$, $wx \notin E(G)$ и $H = G - uv + uw$.

Расстояние вращения дерева

Расстояние вращения дерева – это метрика на множестве $\mathbf{T}(n)$ всех деревьев с n вершинами, определенная для всех $T_1, T_2 \in \mathbf{T}(n)$ как минимальное число *вращений ребер дерева,* необходимых для преобразования T_1 в T_2. Для множества $\mathbf{T}(n)$ расстояние вращения дерева и расстояние вращения ребра могут различаться.

Вращение ребра дерева – это *вращение ребра*, осуществляемое на дереве и дающее в результате дерево.

Расстояние смещения ребра

Расстояние смещения ребра (или **расстояние скольжения ребра**) есть метрика на множестве $\mathbf{G}_c(n, m)$ всех связных графов с n вершинами и m ребрами, задаваемая для любых $G_1, G_2 \in \mathbf{G}_c(n, m)$ как минимальное число *смещений ребра,* необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

Смещение ребра – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: граф H может быть получен из графа G с помощью смещения ребра, если существуют различные вершины u, v и w в графе G, такие что $uv, uv \in E(G)$, $wx \notin E(G)$ и $H = G - uv + uw$. Смещение ребра – это особый тип *вращения ребра* для случая, когда вершины v, w являются смежными в G.

Расстояние смещения ребра может быть получено между любыми графами G и H с компонентами $G_i (1 \le i \le k)$ и $H_i (1 \le i \le k)$, соответственно если G_i и H_i имеют одинаковые порядок и размер.

Расстояние *F*-вращения

Расстоянием *F*-вращения называется расстояние на множестве $\mathbf{G}_F(n, m)$ всех графов с n вершинами и m реберами, содержащих подграф, изоморфный данному графу F порядка не менее 2, определенное для всех $G_1, G_2 \in \mathbf{G}_F(n, m)$ как минимальное число F-вращений, необходимых для преобразования графа G_1 в граф G_2.

F-вращение – один из типов *преобразования ребер,* который задается следующим образом: пусть F' есть подграф графа G, изоморфный графу F, и пусть u, v, w – три различные вершины графа G, такие что $u \notin V(F')$, $v, w \in V(F')$, $uv \in E(G)$ и $uw \notin E(G)$; граф H может быть получен из графа G с помощью *F-вращения* ребра uv в положение uw, если $H = G - uv + uw$..

Расстояние бинарного отношения

Пусть R – нерефлексивное *бинарное отношение* между графами, т.е. $R \subset \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ и существует граф $G \in \mathbf{G}$, такой что $(G, G) \notin R$.

Расстояние бинарного отношения – расширенная метрика (которая в общем случае может принимать значение ∞) на множестве $\mathbf{G}$ всех графов, определенная для любых графов G_1 и G_2 как минимальное число *R-преобразований,* необходимых для трансформации графа G_1 в граф G_2. Мы говорим, что граф H может быть получен из графа G путем *R-преобразования,* если $(H, G) \in R$.

Примером такого расстояния является расстояние между двумя *треугольными вложениями полного графа* (т.е. его клеточными вложениями в поверхность, имеющую только 3-гональные грани), определенное как минимальное число t, такое что вложения изометричны с точностью до замещения t граней.

Метрики преобразования без пересечений

Для подмножества S из $\mathbb{R}^2$ *остовное дерево без пересечений* множества S есть дерево, вершины которого – точки множества S, а ребра – попарно непересекающиеся отрезки прямых.

Метрика перемещения ребра без пересечений ([AAH00]) на множестве $\mathbf{T}_S$ всех остовных деревьев без пересечений множества S определяется для любых $T_1, T_2 \in \in \mathbf{T}_S$ как минимальное число *перемещений ребра без пересечений,* необходимых для преобразования T_1 в T_2. *Перемещение ребра пересечений – преобразование ребер,* суть которого заключается в добавлении некоторого ребра e в $T \in \mathbf{T}_S$ и уничтожении некоторого ребра f из полученного цикла, так чтобы e и f не пересекались.

Метрика скольжения ребра без пересечений есть метрика на множестве $\mathbf{T}_S$ всех остовных деревьев без пересечений множества S, определенная для любых $T_1, T_2 \in \in \mathbf{T}_S$ как минимальное число *скольжений ребре без пересечений*, необходимых для преобразования T_1 в T_2. *Скольжение ребра без пересечений* есть одно из *преобразований ребер,* в ходе которого берется некоторое ребро e в $T \in \mathbf{T}_S$ и одна из его концевых точек перемещается вдоль некоторого смежного с e ребра в T так, чтобы не возникло пересечения ребер и "заметания" точек из S (это дает нам вместо e новое ребро f). Скольжение ребра является особым случаем перемещения ребра без пересечений: новое дерево образуется в результате замыкания с помощью f цикла C длины 3 в T и удаления e из C таким образом, чтобы f не попадало внутрь треугольника C.

Расстояния маршрутов коммивояжера

Проблема коммивояжера известна как задача нахождения кратчайшего маршрута для посещения некоторого множества городов. Мы рассмотрим проблему коммивояжера только для неориентированного случая. Для решения проблемы коммивояжера применительно к N городам рассмотрим пространство $\mathcal{T}_N$ маршрутов как множество, состоящее из $\frac{(N-1)!}{2}$ циклических перестановок городов 1, 2,…, N.

Метрика D на $\mathcal{T}_N$ определяется в терминах различия следующим образом: если маршруты $T, T' \in \mathcal{T}_N$ различаются в m ребрах, то $D(T, T') = m$.

k-OPT преобразование маршрута T получают посредством удаления k ребер из T и построения других ребер. Маршрут T', получаемый из T с использованием *k-OPT* преобразования, называется *k-OPTом* для T. Расстояние d на множестве $\mathcal{T}_N$ определяется в терминах 2-OPT преобразований: $d(T, T')$ есть минимальное число i,

для которого существует последовательность из i 2-OPT преобразований, переводящая T в T'.

Для любых $T, T' \in \mathcal{T}_N$ имеет место неравенство $d(T, T') \le D(T, T')$ (см., например, [MaMo95]).

Расстояния между подграфами

Стандартное расстояние на множестве всех подграфов связного графа $G = (V, E)$ определяется как

$$\min\{d_{\text{path}}(u, v) : u \in V(F),\ \ v \in V(H)\}$$

для любых подграфов F, H графа G. Для любых подграфов F, H сильно связного орграфа $D = (V, E)$ стандартное квазирасстояние определяется как

$$\min\{d_{\text{dpath}}(u, v) : u \in V(F),\ \ v \in V(H)\}.$$

Расстояние вращения ребра на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами в связном графе G определяется как минимальное число *вращений ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *вращением ребра,* если существуют различные вершины u, v и w в G, такие что $uv \in E(F)$, $uw \in E(G)$ и $H = F - uv + uw$.

Расстояние смещения ребра на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами в связном графе G определяется как минимальное число *смещений ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *смещением ребра,* если существуют различные вершины u, v и w в G, такие что $uv \in E(F)$, $uw \in E(G) \backslash E(F)$ и $H = F - uv + uw$.

Расстояние перемещения ребра на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами в графе G (не обязательно связном) определяется как минимальное число *перемещений ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *перемещениям ребра,* если существуют (не обязательно различные) вершины u, v, w и x в G, такие что $uv \in E(F)$, $wx \in E(G) \backslash E(F)$ и $H = F - uv + wx$. Расстояние перемещения ребра – метрика на $\mathbf{S}^k(G)$. Если F и H имеют s общих ребер, то оно равно $k - s$.

Расстояние скачка ребра (которое в общем случае может принимать значение ∞) на множестве $\mathbf{S}^k(G)$ всех реберно-индуцированных подграфов с k ребрами графа G (не обязательно связного) определяется как минимальное число *скачков ребра,* необходимых для преобразования $F \in \mathbf{S}^k(G)$ в $H \in \mathbf{S}^k(G)$. Говорят, что H получается из F *скачком ребра,* если существуют такие четыре различные вершины u, v, w и x в G, что $uv \in E(F)$, $wx \in E(G) \backslash E(F)$ и $H = F - uv + wx$.

15.4. РАССТОЯНИЯ НА ДЕРЕВЬЯХ

Пусть T – корневое дерево, т.е. дерево, у которого одна из его вершин выбрана в качестве *корня*. *Глубина* вершины v, $\text{depth}(v)$ – это число ребер на пути от v к корню. Вершина v называется *родительской* для вершины u, $v = \text{par}(u)$, если они смежные и имеет место равенство $\text{depth}(u) = \text{depth}(v) + 1$; в этом случае u называется *дочерней* для v. Две вершины называются сестрами, если имеют одного и того же родителя. *Степень выхода* вершины – это количество ее дочерних вершин. $T(v)$ есть поддерево дерева T с корнем в вершине $v \in V(T)$. Если $w \in V(T(v))$, то v является *предком* для w, а w – *потомком* для v; $nca(u, v)$ – *ближайший общий предок* для вершин u и v. Дерево называется *помеченным деревом,* если каждая из

его вершин обозначена символом заданного конечного алфавита $\mathcal{A}$. Дерево T называется *упорядоченным деревом,* если задан порядок (слева направо) на вершинах-сестрах.

На множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев допускаются следующие *операции редактирования:*

Переиндексация – изменение метки вершины v.

Удаление – удаление некорневой вершины v с родителем v', так что дочерние элементы v становятся дочерними элементами v'; эти дочерние элементы вставляются вместо v как упорядоченная слева направо подпоследовтельность дочерних элементов v'.

Вставка – дополнение к удалению; вставка вершины v в качестве дочернего элемента v', что делает v родителем последующей подпоследовательности дочерних элементов v'.

Для неупорядоченных деревьев операции редактирования определяются аналогичным образом, но операции вставки и удаления действуют на подмножестве, а не на подпоследовательности.

Предполагается, что существует *функция цены,* определяемая для каждой операции редактирования, а *цена* последовательности операций редактирования определяется как сумма цен этих операций.

Упорядоченное отображение расстояния редактирования – специальная интерпретация операций редактирования. Формально, назовем тройку (M, T_1, T_2) как *упорядоченным отображением расстояния редактирования* дерева T_1 в дерево T_2, $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$, если $M \subset V(T_1) \times V(T_2)$ и, для любых $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in M$ выполняется следующее условие: $v_1 = v_2$ тогда и только тогда, когда $w_1 = w_2$ (условие *взаимной однозначности*), v_1 является предком для v_2 тогда и только тогда, когда w_1 является предком w_2 (*условие предков*), v_1 находится слева от v_2 тогда и только тогда, когда w_1 находится слева от w_2 (*условие сестер*).

Говорят, что вершина v в T_1 и T_2 *тронута линией* в M, если v появляется в некоторой паре из M. Пусть N_1 и N_2 – множества вершин деревьев T_1 и T_2 соответственно, которые не тронуты линиями в M. Цена M задается как $\gamma(M) = \sum_{(v,w)\in M} \gamma(v \to w) + \sum_{v\in N_1} \gamma(v \to \lambda) + \sum_{w\in N_2} \gamma(\lambda \to w)$, где $\gamma(a \to b) = \gamma(a, b)$ – *цена* операции редактирования $a \to b$, которая является переиндексацией, если $a, b \in \mathcal{A}$, удалением, если $b = \lambda$, и вставкой, если $a = \lambda$. Здесь символ $\lambda \notin \mathcal{A}$ выступает как специальный *символ пробела,* и γ является метрикой на множестве $\mathcal{A} \cup \lambda$ (исключая значение $\gamma(\lambda, \lambda)$).

Расстояние редактирования дерева

Расстояние редактирования дерева ([Tai79]) на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев определяется для любых $T_1, T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная цена последовательности операций редактирования (переиндексаций, вставок и удалений), переводящей T_1 в T_2.

В терминах упорядоченного отображения расстояния редактирования это расстояние равно $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем упорядоченным отображениям расстояния редактирования (M, T_1, T_2).

Расстояние редактирования дерева можно определить аналогичным образом на множестве всех корневых неупорядоченных деревьев.

Расстояние Селкоу

Расстояние Селкоу (или расстояние нисходящего редактирования, расстояния редактирования 1-степени) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная цена последовательности операций редактирования (переиндексаций, вставок и удалений), переводящей T_1 в T_2, если вставки и удаления распространяются только на листья деревьев ([Selk77]). Корень дерева T_1 должен отображаться в корень дерева T_2 и, если вершина v подлежит удалению (вставке), то поддерево с корнем в v, если таковое имеется, подлежит удалению (вставке).

В терминах упорядоченного отображения расстояния редактирования расстояние Селкоу равно $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем отображениям расстояния упорядоченного редактирования (M, T_1, T_2), удовлетворяющим следующему условию: если $(v, w) \in M$, где ни v, ни w не являются корнями, то $(\mathrm{par}(v), \mathrm{par}(w)) \in M$.

Расстояние редактирования с ограничением

Расстояние редактирования с ограничением (или **расстояние регламентированного редактирования**) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная цена последовательности операций редактирования (переиндексаций, вставок и удалений), переводящей T_1 в T_2, с тем ограничением, что непересекающиеся поддеревья должны отображаться на непересекающиеся поддеревья.

В терминах упорядоченного отображения расстояния редактирования расстояние редактирования с ограничением равно $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем упорядоченным отображениям расстояния редактирования (M, T_1, T_2), удовлетворяющим следующему условию: для всех (v_1, w_1), (v_2, w_2), $(v_3, w_3) \in M$, $nca(v_1, v_2)$ является собственным предком v_3 тогда и только тогда, когда $nca(w_1, w_2)$ является собственным предком w_3.

Это расстояние эквивалентно **расстоянию редактирования соответственно структуре,** определенному как $\min_{(M,T_1,T_2)} \gamma(M)$, где минимум берется по всем упорядоченным отображениям расстояния редактирования (M, T_1, T_2), удовлетворяющим следующему условию: для всех (v_1, w_1), (v_2, w_2), $(v_3, w_3) \in M$, таких что ни одна из v_1, v_2 и v_3 не является предком для других, $nca(v_1, v_2) = nca(v_1, v_3)$ тогда и только тогда, когда $nca(w_1, w_2) = nca(w_1, w_3)$

Расстояние редактирования единичной цены

Расстояние редактирования единичной цены – расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальное число операций редактирования (переиндексацией, вставок и удалений), переводящих T_1 в T_2.

Расстояние выравнивания

Расстояние выравнивания ([JWZ94]) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальная *цена выравнивания* T_1 и T_2. Оно соответствует расстоянию регламентированного редактирования, где все вставки должны предшествовать удалениям.

Это означает, что мы вставляем *пробелы,* т.е. вершины, обозначенные *символом пробела* λ, в деревья T_1 и T_2 так, чтобы они стали изоморфны при игнориро-

вании индексов; полученные в результате деревья накладываются друг на друга и дают *выравнивание* T_A, – дерево, в котором каждая вершина получена парой индексов. *Цена* T_A – сумма цен всех пар противоположенных индексов в T_A.

Расстояние разбиений-совмещений

Расстояние разбиений-совмещений ([ChLu85]) есть расстояние на множестве $\mathbb{T}_{rlo}$ всех корневых помеченных упорядоченных деревьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_{rlo}$ как минимальное число разбиений и совмещений вершин, необходимых для преобразования T_1 в T_2.

Расстояние 2-степени

Расстояние 2-степени есть метрика на множестве $\mathbb{T}_l$ всех помеченных деревьев (*помеченных свободных деревьев*), определенная как минимальное взвешенное число операций редактирования (переиндексацией, вставок и удалений), переводящих T_1 в T_2, если любая вставляемая (удаляемая) вершина имеет не более двух соседних вершин. Такая метрика является естественным расширением **расстояния редактирования дерева** и **расстояния Селкоу**.

Филогенетическое X-дерево – неупорядоченное дерево без корня с множеством помеченных листьев X, не имеющее вершин порядка 2. Если каждая внутренняя вершина имеет порядок 3, то дерево называется *бинарным* (или *вполне разрешенным*).

Разрез A|B множества *X* есть *разбиение* множества *X* на два подмножества *A* и *B* (см. **Полуметрика разреза**). Удаление ребра *e* из филогенетического X-дерева влечет разрез множества листьев *X*, называемый *разрезом, ассоциированным* с *e*.

Метрика Робинзона–Фоулдса

Метрика Робинзона-Фоулдса (или **метрика ближайшего разбиения,** *расстояние разреза*) есть метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических *X*-деревьев, определенная как

$$\frac{1}{2}\left|\Sigma(T_1)\Delta\Sigma(T_2)\right| = \frac{1}{2}\left|\Sigma(T_1) - \Sigma(T_2)\right| + \frac{1}{2}\left|\Sigma(T_2) - \Sigma(T_1)\right|.$$

для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}(X)$, где $\Sigma(T)$ – совокупность всех разрезов *X*, ассоциированных с ребрами *T*.

Взвешенная метрика Робинзона–Фоулдса

Взвешенная метрика Робинзона–Фоулдса – метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических *X*-деревьев, определенная как

$$\sum_{A|B \in \Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)} \left| w_1(A \mid B) - w_2(A \mid B) \right|$$

для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}(X)$, где $w_i = (w(e))_{e \in E(T_i)}$ – совокупность положительных реберных весов *X*-дерева T_i, $\Sigma(T_i)$ – совокупность всех разрезов *X*, ассоциированных с ребрами T_i, и $w_i(A|B)$ – вес ребра, ассоциированного с разрезом *A|B* множества X_i, $i = 1, 2$.

Метрика обмена ближайшими соседями

Метрика обмена ближайшими соседями (или **метрика кроссовера**) есть метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических *X*-деревьев, определенная для всех $T_1, T_2 \in \mathbb{T}(X)$ как минимальное число *обменов ближайшими соседями*, необходимых для преобразования T_1 в T_2.

Обмен ближайшими соседями – замена двух поддеревьев в дереве, смежных с одним и тем же внутренним ребром; при этом остальная часть дерева остается без изменений.

Расстояние упрощения и пересадки поддерева

Расстояние упрощения и пересадки поддерева есть метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}(X)$ как минимальное число *упрощений и пересадки поддерева,* необходимых для преобразования T_1 в T_2.

Преобразование упрощения и пересадки поддерева осуществляется в три этапа: сначала выбирается и удаляется ребро uv дерева, тем самым дерево разделяется на два поддерева T_u (содержащее u) и T_v (содержащее v); затем выбирается и подразделяется ребро поддерева T_v, что дает нам новую вершину w; наконец, вершины u и w соединяются ребром, а все вершины степени два удаляются.

Метрика рассечения-восстановления дерева

Метрика рассечения-восстановления дерева – метрика на множестве $\mathbb{T}(X)$ всех филогенетических X-деревьев, определенная для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}(X)$ как минимальное число *преобразований рассечения – восстановления дерева,* необходимых для обращения T_1 в T_2.

Преобразование рассечения – восстановления дерева осуществляется в три этапа: сначала выбирается и удаляется ребро uv дерева, тем самым дерево разделяется на два поддерева T_u (содержащее u) и T_v (содержащее v); затем выбираются и подразделяются ребро поддерева T_v, что дает нам новую вершину w, и ребро поддерева T_u, что дает нам новую вершину z; наконец, вершины w и z соединяются ребром, а все вершины степени два удаляются.

Расстояние квартета

Расстояние квартета ([EMM85]) – расстояние на множестве $\mathbb{T}_b(X)$ всех бинарных филогенетических X-деревьев, определенное для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_b(X)$ как число несовпадающих квартетов (из общего числа $\binom{n}{4}$ возможных квартетов) для T_1 и T_2.

Данное расстояние основано на том факте, что для четырех листьев {1, 2, 3, 4} дерева существует только три различных способа их объединения на бинарном поддереве: (12|34), (13|24) или (14|23): символом (12|34) обозначается бинарное дерево с множеством листьев {1, 2, 3, 4}, из которого после удаления внутреннего ребра получаются деревья с множествами листьев {1, 2} и {3, 4}.

Расстояние триплета

Расстоянием триплета ([CPQ96]) называется расстояние на множестве $\mathbb{T}_b(X)$ всех бинарных филогенетических X-деревьев, определенное для всех T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_b(X)$ как число троек (из общего числа $\binom{n}{3}$ возможных троек), которые различаются (например, по расположению листа) для T_1 и T_2.

Расстояние совершенного паросочетания

Расстояние совершенного паросочетания – расстояние на множестве $\mathbb{T}_b(X)$ всех корневых бинарных филогенетических X-деревьев с множеством X n помеченных листьев, определенное для любых T_1, $T_2 \in \mathbb{T}_b(X)$ как минимальное число перестановок, необходимых для того, чтобы перевести совершенное паросочетание дерева T_1 в совершенное паросочетание дерева T_2.

Для множества $A = \{1,..., 2k\}$, состоящего из $2k$ точек, *совершенным паросочетанием A называется разбиение A* на k пар. Корневое бинарное филогенетическое дерево с n помеченными листьями имеет корень и $n - 2$ внутренние вершины, отличающихся от корня. Его можно отождествить с совершенным паросочетанием на $2n - 2$ отличающихся от корня вершин с помощью следующего построения: обозначим внутренние вершины числами $n + 1,..., 2n - 2$, поставив наименьший имеющийся индекс в качестве родительской вершины пары помеченных дочерних элементов, из которых один имеет наименьший индекс среди помеченных дочерних элементов; теперь паросочетание осуществляется посредством отслоения по двое дочерних элементов или пар вершин-сестер.

Метрики атрибутивного дерева

Атрибутивным деревом называется тройка (V, E, α), где $T = (V, E)$ – исходное дерево и α – функция, которая ставит в соответствие каждой вершине $v \in V$ вектор атрибутов $\alpha(v)$. Для двух атрибутивных деревьев (V_1, E_1, α) и (V_2, E_2, β) рассмотрим множество всех *изоморфизмов поддеревьев* между ними, т.е. множество всех изоморфизмов $f: H_1 \to H_2$, $H_1 \subset V_1$, $H_2 \subset V_2$ между их *индуцированными поддеревьями.* Если на множестве атрибутов имеется подобность s, то подобность между изоморфными индуцированными под деревьями определяется как $W_s(f) = \sum_{v \in H_1} s(\alpha(v), \beta(f(v)))$. Изоморфизм ϕ с максимальной подобностью $W_s(\phi) = W(\phi)$ называется *изоморфизмом дерева с максимальной подобностью.*

На множестве $\mathbf{T}_{att}$ всех атрибутивных деревьев используются следующие полуметрики:

1. $\max\{|V_1|, |V_2|\} - W(\phi)$;
2. $|V_1| + |V_2| - 2W(\phi)$;
3. $1 - \dfrac{W(\phi)}{\max\{|V_1|, |V_2|\}}$;
4. $1 - \dfrac{W(\phi)}{|V_1| + |V_2| - W(\phi)}$.

Они становятся метриками на множестве классов эквивалентности атрибутивных деревьев: два атрибутивных дерева (V_1, E_1, α) и (V_2, E_2, β) называются *эквивалентными,* если они *атрибутивно-изоморфны,* т.е. существует изоморфизм $g: V_1 \to V_2$ между деревьями T_1 и T_2, такой что для любой вершины $v \in V_1$ имеется $\alpha(v) = \beta(g(v))$. Тогда $|V_1| = |V_2| = W(g)$.

Расстояние поддерева наибольшего сходства

Расстояние поддерева наибольшего сходства – расстояние на множестве **T** всех деревьев, определенное для любых $T_1, T_2 \in \mathbf{T}$ как минимальное число листьев, которые нужно удалить для получения *поддерева наибольшего сходства.*

Поддерево сходства (или *общее упрощенное дерево*) двух деревьев есть дерево, которое может быть получено из обеих деревьев посредством удаления листьев с одинаковым индексом.

Глава 16

Расстояния в теории кодирования

Теория кодирования охватывает вопросы разработки и свойств *кодов с исправлением ошибок* для обеспечения надежной передачи информации по каналам с высоким уровнем шумов в системах связи и устройствах хранения данных. Целью теории кодирования является поиск кодов, обеспечивающих быструю передачу и дескодирование информации, содержащих много значимых кодовых слов и способных исправлять или, по крайней мере, обнаруживать много ошибок. Эти цели являются взаимно исключающими; таким образом, каждое из приложений имеет свой собственный хороший код.

В области коммуникаций *кодом* называется правило для преобразования сообщений (например, писем, слов или фраз) в другую форму или представление, не обязательно того же типа. *Кодирование* – процесс, посредством которого источник (объект) осуществляет преобразование информации в данные, передаваемые затем получателю (наблюдателю), например, системе обработки данных. *Декодирование* является обратным процессом преобразования данных, поступивших от источника, в понятный для получателя вид.

Код с исправлением ошибок – такой код, в котором каждый передаваемый элемент данных подчиняется специальным правилам построения, с тем чтобы отклонения от данного построения в полученном сигнале могли автоматически выявляться и корректироваться. Такая технология используется в компьютерных накопительных устройствах, например в динамической памяти RAM и в системах передачи данных. Задача выявления ошибок решается гораздо легче, чем задача исправления ошибок, и для обнаружения ошибок в номера кредитных карт дополнительно вводятся одна или более "контрольных" цифр. Существуют два основных класса кодов с исправлением ошибок: *блоковые коды* и *сверточные коды.*

Блоковый код (или *равномерный код*) длины n над алфавитом $\mathcal{A}$, обычно над конечным полем $\mathbb{F}_q = \{0,..., q-1\}$, является подмножеством $C \subset \mathcal{A}^n$; каждый вектор $x \in C$ называется *кодовым словом*, $M = |C|$ называется *размером* кода; для данной метрики d на $\mathbb{F}_q^n$ (обычно **хэмминговой метрики** d_H) значение $d^* = d^*(\mathrm{C}) = \min_{x,y \in C,\ x \neq y} d(x, y)$ называется **минимальным расстоянием** кода C. *Вес* $w(x)$ кодового слова $x \in C$ определяется как $w(x) = d(x, 0)$. (n, M, d^*)-*код* есть q-значный блоковый код длины n, размера M и с минимальным расстоянием d^*. *Бинарным кодом* называется код над $\mathbb{F}_2$.

Когда кодовые слова выбираются таким образом, чтобы расстояние между ними было максимальным, код называется *кодом с исправлением ошибок,* поскольку незначительно искаженные векторы могут быть восстановлены путем выбора ближайшего кодового слова. Код C является *кодом с исправлением t ошибок* (и *кодом с обнаружением* $2t$ *ошибок*), если $d^*(C) \geq 2t + 1$. В этом случае каждая *окрестность* $U_t(x) = \{y \in C: d(x, y) \leq t\}$ точки $x \in C$ не пересекается с $U_t(y)$ для любой точки $y \in C$, $y \neq x$. *Совершенный код* – это q-значный $(n, M, 2t + 1)$-код,

для которого M сфер $U_t(x)$ с радиусом t и центрами в кодовых словах заполняют полностью все пространство F_q^n без пересечений.

Блоковый код $C \subset F_q^n$ называется *линейным,* если C является векторным подпространством пространства F_q^n. $[n, k]$-код есть k-мерный линейный код $C \subset F_q^n$ (с минимальным расстоянием d^*); он имеет размер q^k, т.е. является (n, q^k, d^*)-кодом. *Кодом Хэмминга* называется линейный совершенный $\left(\frac{q^r-1}{q-1}, \frac{q^r-1}{q-1}-r, 3\right)$-код с исправлением одной ошибки.

$k \times n$ Матрица G со строками, являющимися базисными векторами для линейного $[n, k]$-кода C, называется *порождающей матрицей* кода C. В *стандартном виде* ее можно записать как $(1_k|A)$, где 1_k есть $k \times k$ единичная матрица. Каждое *сообщение* (или *информационный символ, символ источника*) $u = (u_1, ..., u_k) \in F_q^n$ может быть закодирован путем умножения его (справа) на порождающую матрицу: $uG \in C$. Матрица $H = (-A^T|1_{n-k})$ называется *матрицей проверки на прочность* кода C. Число $r = n - k$ соответствует количеству цифр проверки на четность в коде и называется *избыточностью* кода C. *Информационная скорость* (или *кодовая скорость*) кода C – это число $R = \frac{\log_2 M}{n}$. Для q-значного $[n, k]$-кода $R = \frac{k}{n}\log_2 q$; для бинарного $[n, k]$-кода $R = \frac{k}{n}$.

Сверточный код – такой тип кода с исправлением ошибок, в котором подлежащий кодированию k-битов информационный символ преобразуется в n-битовое кодовое слово, где $R = \frac{k}{n}$ – кодовая скорость ($n \geq k$), а преобразование является функцией последних m информационных символов, где m – *длина кодового ограничения.* Сверточные коды часто используются для повышения качества радио и спутниковых линий связи. *Код переменной длины* – код с кодовыми словами различной длины.

В отличие от кодов с автоматическим исправлением ошибок, которые предназначены только для повышения надежности передачи данных, *криптографические коды* предназначены для повышения защищенности линий связи. В криптографии отправитель использует *ключ* для шифрования сообщения до его передачи по незащищенным каналам связи, а авторизованный получатель на другом конце использует ключ для расшифровки полученного сообщения. Чаще всего алгоритмы сжатия и коды с исправлением ошибок используются совместно с криптографическими кодами, что обеспечивает одновременно эффективную и надежную связь без ошибок передачи данных и защиту данных от несанкционированного доступа. Зашифрованные сообщения, которые, более того, могут быть скрыты в тексте, изображении и т.п., называются *стеганографическими сообщениями*.

16.1. МИНИМАЛЬНОЕ РАССТОЯНИЕ И ЕГО АНАЛОГИ

Минимальное расстояние

Для кода $C \subset V$, где V – n-мерное векторное пространство, снабженное метрикой d, **минимальное расстояние** $d^* = d^*(C)$ кода C определяется как

$$\min_{x,y \in C, x \neq y} d(x, y).$$

Метрика d зависит от природы подлежащих исправлению ошибок в соответствии с предназначением кода. Для обеспечения требуемых характеристик по корректировке необходимо применять коды с максимальным количеством кодовых слов. Наиболее широко исследованными в этом плане кодами являются *q-значные блоковые коды* в **хэмминговой метрике** $d_H(x,y) = |\{i : x_i \neq y_i, i = 1,...,n\}|$.

Для *линейных кодов* C минимальное расстояние $d^*(C) = w(C)$, где $w(C) = \min\{w(x): x \in C\}$, называется *минимальным весом* кода C. Поскольку матрица H матрица проверена честность $[n, k]$-кода C имеет $\text{rank}(H) \leq n - k$ независимых столбцов, то $d^*(C) \leq n - k + 1$ (*верхняя граница Синглтона*).

Двойственное расстояние

Двойственное расстояние $d^\perp$ *линейного* $[n, k]$-кода $C \subset \mathbb{F}_q^n$ является **минимальным расстоянием** *двойственного кода* $C^\perp$ для C.

Двойственный код $C^\perp$ для кода C определяется как множество всех векторов $\mathbb{F}_q^n$, ортогональных каждому кодовому слову из C: $C^\perp = \{v \in \mathbb{F}_q^n : \langle v, u \rangle = 0$ для любого $u \in C\}$. Код $C^\perp$ является линейным $[n, n-k]$-кодом. $(n-k) \times n$ порождающая матрица для $C^\perp$ является матрицей проверки на четность для C.

Расстояние bar-произведения

Для линейных кодов C_1 и C_2, имеющих длину n с $C_2 \subset C_1$, их *bar-произведение* $C_1|C_2$ есть линейный код длины $2n$, определенный как $C_1 \mid C_2 = \{x \mid x + y : x \in C_1, y \in C_2\}$.

Расстояние bar-произведения – минимальное расстояние $d^*(C_1|C_2)$ bar-произведения $C_1 \mid C_2$.

Расстояние дизайна

Линейный код называется *циклическим кодом*, если все циклические сдвиги кодового слова также принадлежат C, т.е. если для любого $(a_0,...., a_{n-1}) \in C$ вектор $(a_{n-1}, a_0,..., a_{n-2}) \in C$. Удобно отождествлять кодовое слово $(a_0,..., a_{n-1})$ с многочленом $c(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1}x^{n-1}$, тогда каждый циклический $[n, k]$-код может быть представлен как главный идеал $\langle g(x) \rangle = \{r(x)g(x) : r(x) \in R_n\}$ кольца $R_n = \mathbb{F}_q(x)/(x^n - 1)$, порожденный многочленом $g(x) = g_0 + g_1 x + ... + x^{n-k}$, называемым *порождающим многочленом* кода C.

Для элемента α порядка n в конечном поле $\mathbb{F}_{q^s}$ $[n, k]$-*код Бозе–Чодхури–Хоквенгема,* имеющий **расстояние дизайна** d, является циклическим кодом длины n, порожденным многочленом $g(x)$ в $\mathbb{F}_q(x)$ степени $n - k$, имеющим корни α, α^2,..., α^{d-1}. Минимальное расстояние d^* кода Бозе–Чодхури–Хоквенгема с нечетным расстоянием дизайна d больше или равно d.

Код Рида–Соломона – это код Бозе–Чодхури–Хоквенгема с $s = 1$. Порождающим многочленом кода Рида–Соломона с расстоянием дизайна d является многочлен $g(x) = (x - \alpha)...(x - \alpha^{d-1})$ степени $n - k = d - 1$, т.е. для кода Рида–Соломона расстояние дизайна $d = n - k + 1$ и минимальное расстояние $d^* \geq d$. Поскольку для линейного $[n, k]$-кода минимальное расстояние $d^* \leq n - k + 1$ (*верхняя граница Синглтона*), код Рида–Соломона обладает минимальным расстоянием $d^* = n - k + 1$ и достигает верхней границы Синглтона. В проигрывателях компакт-дисков преимущественно используется система двойной коррекции ошибок (255, 251,5) кода Рида–Соломона над полем $\mathbb{F}_{256}$.

Расчетное минимальное расстояние Гоппы

Расчетное минимальное расстояние Гоппы ([Gopp71]) – нижняя граница $d^*(m)$ для минимального расстояния *одноточечных геометрических кодов Гоппы* (или кодов *алгебраической геометрии*) $G(m)$. Для кода $G(m)$, ассоциированного с делителями D и mP, $m \in \mathbb{N}$ гладкой проективной абсолютно неприводимой алгебраической кривой рода $g > 0$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$, мы имеем равенство $d^*(m) = m + 2 - 2g$, если $2g - 2 < m < n$.

Для кода Гоппы $C(m)$ структура последовательности пропусков в P может позволить получить более точную нижнюю границу минимального расстояния (см. **расстояние Фенга-Рао**).

Расстояние Фенга–Рао

Расстояние Фенга-Рао $\delta_{FR}(m)$ – нижняя граница для минимального расстояния о*дноточечных геометрических кодов Гоппы* $G(m)$, которое лучше **расчетного минимального расстояния Гоппы.** Используемый метод кодирования Фенга–Рао для кода $C(m)$ декодирует ошибки до половины расстояния Фенга–Рао $\delta_{FR}(m)$ и увеличивает возможности по исправлению ошибок для одноточечных геометрических кодов Гоппы.

Формально расстояние Фенга–Рао определяется следующим образом. Пусть S будет *числовая полугруппа,* т.е. подполугруппа S полугруппы $\mathbb{N} \cup \{0\}$, такая что *род* $g = |\mathbb{N} \cup \{0\} \setminus S|$ полугруппы S является конечным, и $0 \in S$. **Расстояние Фенга–Рао** на S есть функция $\delta_{FR} : S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, такая что $\delta_{FR}(m) = \min\{\nu(r) : r \geq m, r \in S\}$, где $\nu(r) = |\{(a,b) \in S^2 : a + b = r\}|$. Обобщенное ***r*-е расстояние Фенга–Рао** на S определяется как $\delta^r_{FR}(m) = \min\{\nu[m_1,...,m_r] : m \leq m1 < ... < m_r, m_i \in S\}$, где $\nu[m_1,...,m_r] = |\{a \in S : m_i - a \in S$ для некоторого $i = 1,..., r\}|$. Тогда имеем $\delta_{FR}(m) = \delta^1_{FR}(m)$ (см., например, [FaMu03]).

Свободное расстояние

Свободное расстояние – минимальный ненулевой *вес Хэмминга* любого кодового слова в *сверточном коде* или *коде переменной длины*.

Формально, k-е **минимальное расстояние** d^*_k сверточного кода или кода переменной длины есть наименьшее хэммингово расстояние между начальными отрезками длины k любых двух кодовых слов, которые различаются на данных начальных отрезках. Последовательность $d^*_1, d^*_2, d^*_3, ... (d^*_1 \leq d^*_2 \leq d^*_3 \leq ...)$ называется *расстоянным профилем* кода. Свободное расстояние сверточного кода или кода переменной длины равно $\max\limits_l d^*_l \lim\limits_{l \to \infty} d^*_l = d^*_\infty$.

Эффективное свободное расстояние

Турбо-кодом называется длинный *блоковый код*, в котором имеется L входящих битов и каждый из этих битов кодируется q раз. При j-м кодировании L битов пропускаются через блок перестановок P_j, а затем кодируются блоковым $[N_j, L]$ кодером (*кодером кодовых фрагментов*), который может рассматриваться как $L \times N_j$ матрица. Тогда искомым турбо-кодом является *линейный* $[N_1 + ... + N_q, L]$-код (см., например, [BGT93]).

i-взвешенное минимальное расстояние входа $d^i(C)$ турбо-кода C есть минимальный вес для кодовых слов, соответствующих входящим словам веса i. **Эффективным свободным расстоянием** кода C показывается его 2-*взвешенное минималь-*

ное расстояние входа $d^2(C)$, т.е. минимальный вес для кодовых слов, соответствующих входящим словам веса 2.

Распределение расстояний

Для кода C над конечным метрическим пространством (X, d) с диаметром $\mathrm{diam}(X, d) = D$ **распределение расстояний** для C есть $(D + 1)$-вектор $(A_0,..., A_D)$, где $A_i = \frac{1}{|C|}|\{(c,c') \in C^2 : d(c,c') = i\}|$. Таким образом, мы рассматриваем величины $A_i(c)$ – число кодовых слов на расстоянии i от кодового слова c, и берем A_i как среднее от $A_i(c)$ по всем $c \in C$. $A_0 = 1$ и, если $d^* = d^*(C)$ является минимальным расстоянием для C, то $A_1 = ...A_{d^*-1} = 0$.

Распределение расстояний для кода с заданными параметрами важно, в частности, для оценки вероятности ошибки декодирования при применении различных алгоритмов декодирования. Кроме того, это может помочь при определении свойств кодовых структур и доказательстве невозможности сущетвования определенных кодов.

Расстояние однозначности

Расстоянием однозначности криптосистемы (Шеннон, 1949) называется минимальная длина шифротекста, необходимая для уверенности в том, что существует только единственный смысловой вариант его расшифровки. Для классических криптографических систем с фиксированным ключевым пространством расстояние однозначности аппроксимируется по формуле $H(K)/D$, где $H(K)$ – *энтропия ключевого пространства* (грубо говоря, $\log_2 N$, где N – количество ключей), а D измеряет избыточность резервирования исходного языка открытого текста в битах на букву.

Криптосистема обеспечивает идеальную секретность, если ее расстояние однозначности бесконечно. Например, одноразовые блокноты обеспечивают идеальную секретность; именно такие коды используются для связи по "красному телефону" между Кремлем и Белым домом.

16.2. ОСНОВНЫЕ РАССТОЯНИЯ НА КОДАХ

Расстояние арифметического кода

Арифметическим кодом (или *кодом с исправлением арифметических ошибок*) называется конечное подмножество C множества $\mathbb{Z}$ целых (обычно неотрицательных) чисел. Он предназначается для контроля функционирования *блока суммирования* (модуля сложения). Когда сложение чисел осуществляется в двоичной системе счисления, то единственный сбой в работе блока суммирования ведет к изменению результата на некоторую степень двойки, т.е., к одной *арифметической ошибке.* Формально одна *арифметическая ошибка* на $\mathbb{Z}$ определяется как преобразование числа $n \in \mathbb{Z}$ в число $n = n \pm 2^i$, $i = 1, 2,...$.

Расстояние арифметического кода есть метрика на $\mathbb{Z}$, определенная для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ как минимальное число *арифметических ошибок*, переводящих n_1 в n_2. Его можно записать как $w_2(n_1 - n_2)$, где $w_2(n)$ есть арифметический 2-вес n, т.е. наименьшое возможное число ненулевых коэффициентов в представлении $n = \sum_{i=0}^{k} e_i 2^i$, где e_i 0, ±1 и k – некоторое неотрицательное число. Именно, для каждого n имеется единственное такое представление с $e_k \neq 0$, $e_i e_{i+1} = 0$ для всех

$i = 0,..., k - 1$, которое обладает наименьшим числом ненулевых коэффициентов (см. **Арифметическая метрика *r*-нормы**, гл. 12).

Расстояние Шармы–Кошика

Пусть $q \geq 2$ и $m \geq 2$. *Разбиение* $\{B_0, B_1,..., B_{q-1}\}$ множества $\mathbb{Z}_m$ называется *разбиением Шармы–Кошика,* если выполняются следующие условия:

1) $B_0 = \{0\}$;

2) для любого $i \in \mathbb{Z}_m$, $i \in B_s$ тогда и только тогда, когда $m - i \in B_s$, $s = 1, 2,..., q - 1$;

3) если $i \in B_s$, $j \in B_t$ и $s > t$, то $\min\{i, m - i\} > \{j, m - j\}$;

4) если $s > t$, $s, t = 0, 1,..., q - 1$, то $|B_s| \geq |B_t|$, кроме $s = q - 1$, когда $|B_{q-1}| \geq \frac{1}{2}|B_{q-2}|$.

Для разбиения Шармы–Кошика множества $\mathbb{Z}_m$ *вес Шармы–Кошика* $w_{SK}(x)$ любого элемента $x \in \mathbb{Z}_m$ определяется как $w_{SK}(x) = i$, если $x \in B_i$, $i \in \{0, 1,..., q - 1\}$.

Расстояние Шармы–Кошика (см., например, [ShKa97]) есть метрика на $\mathbb{Z}_m$, определенная как

$$w_{SK}(x - y).$$

Расстояние Шармы–Кошика на $\mathbb{Z}_m^n$ определяется как $w_{SK}(x - y)$, где для $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{Z}_m^n$ мы имеем $w_{SK}^n(x) = \sum_{i=1}^{n} w_{SK}(x_i)$.

Хэммингова метрика и метрика Ли возникают как два частных случая разбиений вышеназванного типа: $P_H = \{B_0, B_1\}$, где $B_1 = \{1, 2,...., q - 1\}$ и $PL = \{B_0, B_1,..., B_{\lfloor q/2 \rfloor}\}$, где $B_i = \{i, m - i\}$, $i = 1,..., \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor$.

Расстояние абсолютного суммирования

Расстояние абсолютного суммирования (или *расстояние* Ли) – **метрика Ли** на множестве $\mathbb{Z}_m^n$, определенная как

$$w_{Lee}(x - y),$$

где $w_{SK}(x) = \sum_{i=1}^{n} \min\{x_i, m - x_i\}$ является *весом Ли* элемента $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{Z}_m^n$.

Если множество $\mathbb{Z}_m^n$ снабжено расстоянием абсолютного суммирования, то подмножество С множества $\mathbb{Z}_m^n$ называется *кодом расстояния Ли.* Коды расстояния Ли применяются в каналах связи с фазовой модуляцией и с многоуровневой квантованной импульсной модуляцией, а также в тороидальных сетях связи. Важнейшими кодами расстояния Ли являются негациклические коды.

Расстояние Манхейма

Пусть $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi: a, b \in \mathbb{Z}\}$ – множество *целых гауссовых чисел*. Пусть $\pi = a + bi (a > b > 0)$ – г*ауссово простое число*. Это значит, что $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = p$, где $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ есть простое число, или что $\pi = p + 0 \cdot i = p$, где $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ есть простое число.

Расстояние Манхейма – это расстояние на $\mathbb{Z}[i]$, определенное для любых двух целых гауссовых чисел x и y как сумма абсолютных значений действительной и мнимой частей разности $x - y (\mathrm{mod}\, \pi)$. Приведение по модулю перед суммированием

абсолютных значений действительной и мнимой частей – разница между **метрикой Манхэттена** и расстоянием Манхейма.

Элементы конечного поля $\mathbb{F}_p = \{0, 1,..., p-1\}$ для $p \equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, $p = a^2 + b_2$ и элементы конечного поля $\mathbb{F}_{p^2}$ для $p \equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$, $p = a$ могут отображаться на подмножество целых гауссовых чисел с использованием функции $\mu(k) = k - \left[\frac{k(a-bi)}{p}\right](a+bi)$, $k = 0,..., p-1$, где [.] обозначает округление до ближайшего целого гауссового числа. Множество выбранных целых гауссовых чисел с минимальными нормами Галуа называется созвездием. Такое представление дает новый способ построения кодов для двумерных сигналов. Расстояние Манхейма было введено для того, чтобы обеспечить применение к OAM-подобным сигналам методов алгебраического декодирования. Для кодов над созвездиями гексагональных сигналов может быть применена аналогичная метрика на множестве *целых чисел Эйнштейна–Якоби.* Она является удобной для блоковых кодов над тором (см., например, [Hube93], [Hube94]).

Расстояние упорядоченного множества

Пусть $(V_n, \preceq)$ – *упорядоченное множество* на $V_n = \{1,..., n\}$. Подмножество I множества V_n называется *идеалом,* если $x \in I$ и из условия $y \preceq x$ следует, что $y \in I$. Если $J \subset V_n$, то (J) – наименьший идеал множества V_n, содержащий J. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{F}_q^n$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$. *P-вес* элемента $x = (x_1,..., x_n) \in \mathbb{F}_q^n$ определяется как кардинальное число наименьшего идеала множества V_n, содержащего *несущее множество* x: $w_p(x) = |\langle \mathrm{supp}(x) \rangle|$, где $\mathrm{supp}(x) = \{i: x_i \neq 0\}$. **Расстояние упорядоченного множества** (см. [BGL95]) есть метрика на $\mathbb{F}_q^n$, определенная как

$$w_P(x - y).$$

Если $\mathbb{F}_q^n$ снабжено расстоянием упорядоченного множества, то подмножество C множества $\mathbb{F}_q^n$ называется *кодом упорядоченного множества.* Если V_n образует цепь $1 \leq 2 \leq ... \leq n$, то линейный код C размерности k, состоящий из всех векторов $(0,...,0, a_{n-k+1},..., a_n) \in \mathbb{F}_q^n$, является совершенным кодом упорядоченного множества с минимальным расстоянием (упорядоченного множества) $d_P^*(C) = n - k + 1$. Если V_n образует антицепь, то расстояние упорядоченного множества совпадает с хеммингово метрикой.

Расстояние ранга

Пусть $\mathbb{F}_q$ – конечное поле, $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ – расширение степени m поля $\mathbb{F}_q$ и $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n$ – векторное пространство размерности n над $\mathbb{K}$. Для любого $a = (a_1,..., a_n) \in \mathbb{E}$ его *ранг*, $\mathrm{rank}(a)$, определяется как размерность векторного пространства над $\mathbb{F}_q$, порождаемого множеством $\{a_1,..., a_n\}$. **Расстояние ранга** есть метрика на $\mathbb{E}$, определенная как

$$\mathrm{rank}(a - b).$$

Поскольку расстояние ранга между двумя кодовыми словами не больше, чем хэммингово расстояние между ними, для любого кода $C \subset \mathbb{E}$ его минимальное рас-

стояние (ранга) $d^*_{RK}(C) \le \min\{m, n - \log_{q^m} |C| + 1\}$. Код C с $d^*_{RK}(C) = n - \log_{q^m} |C| + 1$, $n < m$, называется *кодом Габидулина* (см. [Gabi85]). Код C с $d^*_{RK}(C) = m$, $m \le n$, называется *кодом расстояния полного ранга.* Такой код имеет не более q^n элементов. *Максимальным кодом расстояния полного ранга* показывается код расстояния полного ранга с q^n элементами; он существует тогда и только тогда, когда m делит n.

Метрики Габидулина–Симониса

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{F}_q^n$ (над конечным полем $\mathbb{F}_q$) и конечное семейство $F = \{F_i: i \in I\}$ его подмножеств, таких что $\bigcup_{i \in I} F_i = \mathbb{F}_q^n$. Не ограничивая общности, можно считать, что F – антицепь линейных подпространств $\mathbb{F}_q^n$. *F-вес* w_F вектора $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{F}_q^n$ определяется как кардинальное число наименьшего подмножества J из I, такого что $x \in \bigcup_{i \in I} F_q^n$.

Метрика Габидулина–Симониса (или ***F*-расстояние,** см. [GaSi98]) есть метрика на $\mathbb{F}_q^n$, определенная как

$$w_F(x - y).$$

Хэммингова метрика соответствует случаю, когда F_i, $i \in I$ образуют стандартный базис. **Метрика Вандермонда** – это F-расстояние с F_i, $i \in I$, которые являются столбцами обобщенной матрицы Вандермонда. Метриками Габидулина–Симониса являются также: **расстояние ранга**, *расстояние b-пакета*, *комбинаторные метрики* Габидулина (см. **Расстояние упорядоченного сомножества**).

Расстояние Розенблюма–Цфасмана

Пусть $Mm,n(F_q)$ – множество всех $m \times n$ матриц с элементами из конечного поля F_q (в общем случае из любого конечного алфавита $\mathcal{A} = \{a_1, ..., a_q\}$). *Норма Розенблюма–Цфасмана* $\| \cdot \|_{RT}$ на $M_{m,n}(F_q)$ определяется следующим образом: если $m = 1$ и $a = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in M_{1,n}$, то $\| 0_{1,n} \|_{RT} = 0$ и $\| a \|_{RT} = \max\{i \mid \xi_i \ne 0\}$ для $a \ne 0_{1,n}$; если $A = (a_1, ..., a_m)^T \in M_{m,n}(F_q)$, $a_j \in M_{1,n}(F_q)$, $1 \le j \le m$, то $\| A \|_{RT} = \sum_{j=1}^{m} \| a_j \|_{RT}$.

Расстояние Розенблюма–Цфасмана ([RoTs96]) есть метрика (более того, **ультраметрика**) на $M_{m,n}(F_q)$, определенная как

$$\| A - B \|_{RT} .$$

Для каждого матричного кода $C \subset M_{m,n}(F_q)$ с q^k элементами минимальное расстояние (Розенблюма–Цфасмана) $d^*_{RT}(C) \le mn - k + 1$. Коды, на которых достигается равенство, называются *разделительными кодами с максимальным расстоянием.*

Наиболее часто используемым расстоянием между кодовыми словами матричного кода $C \subset M_{m,n}(F_q)$ является **хэммингова метрика** на $M_{m,n}(F_q)$, определенная как $\| A - B \|_H$, где $\| A \|_H$ – *вес Хэмминга* матрицы $A \in M_{m,n}(F_q)$, т.е. число ненулевых элементов матрицы A.

Расстояние взаимообмена

Расстояние взаимообмена (или *расстояние свопа*) есть метрика на коде $C \subset \mathcal{A}^n$ над алфавитом $\mathcal{A}$, определенная для любых $x, y \in C$ как минимальное число *свопов* (*транспозиций*), т.е. перестановок смежных пар символов, необходимое для преобразования x в y.

Расстояние ACME

Расстояние ACME – это метрика на коде $C \subset \mathcal{A}^n$ над алфавитом $\mathcal{A}$, определенная как

$$\min\{d_H(x,y), d_I(x,y)\},$$

где d_H – хэммингова метрика, а d_I – расстояние перестановок.

Расстояние вставки-удалени

Пусть W – множеством всех слов над алфавитом $\mathcal{A}$. *Удаление* буквы в слове $\beta = b_1...b_n$ длины n есть преобразование β в слово $\beta' = b_1...b_{i-1}b_{i+1}...b_n$ длины $n-1$. *Вставка* буквы в слово $\beta = b_1...b_n$ длины n есть преобразование β в слово $\beta'' = b_1...b_i b b_{i+1}...b_n$ длины $n+1$.

Расстояние вставки-удаления (или **расстояние кодов с исправлением удалений и вставок**) есть метрика на W, определенная для любых $\alpha, \beta \in W$ как минимальное число удалений и вставок букв, преобразующих α в β.

Код C с исправлением удалений и вставок – произвольное конечное подмножество множества W. Примером такого кода является множество слов $\beta = b_1...b_n$ длины n над алфавитом $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, для которого $\sum_{i=1}^{n} i b_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n+1)$.

Количество слов в этом коде равно $\frac{1}{2(n+1)} \sum_k \phi(k) 2^{(n+1)/k}$, где сумма берется по всем нечетным делителям k числа $n+1$, а ϕ – *функция Эйлера*.

Интервальное расстояние

Интервальное расстояние (см., например, [Bata95]) – метрика на конечной группе $(G, +, 0)$, определенная как

$$w_{\mathrm{int}}(x - y),$$

где $w_{\mathrm{int}}(x)$ – *интервальный вес* на G, т.е. *норма группы,* значения которой являются последовательными неотрицательными целыми числами $0,..., m$. Это расстояние используется в *групповых кодах* $C \subset G$.

Метрика Фано

Метрикой Фано называется *метрика декодирования,* предназначенная для определения наилучшей возможной последовательности применительно к *алгоритму Фано последовательного декодирования сверточных кодов.*

Сверточный код – код с исправлением ошибок, в котором каждый k-бит подлежащего кодированию информационного символа преобразуется в n-битов кодовое слово, где $R = \frac{k}{n}$ есть кодовая скорость ($n \geq k$), а преобразование – функция последних m информационных символов. Линейный, не зависящий от времени декодер (*фиксированный сверточный декодер*) отображает информационный символ

$u_i \in \{u_1, ..., u_N\}$, $u_i = (u_{i1}, ..., u_{ik})$, $u_{ij} \in \mathbb{F}_2$ кодовое слово $x_i \in \{x_1, ..., x_N\}$, $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in})$, $x_{ij} \in \mathbb{F}_2$ таким образом, что на выходе получается код $\{x_1, ..., x_N\}$ из N кодовых слов с вероятностями $\{p(x_1), ..., p(x_N)\}$. Последовательность l кодовых слов формирует *поток* (или *путь*) $x = x_{[1,l]} = \{x_1, ..., x_l\}$, который передается по *дискретным каналам без памяти* и поступает на приемник в виде последовательности $y = y_{[1,l]}$. В задачу декодера, предназначенного для минимизации вероятности ошибок в последовательности, входит поиск последовательности, которая максимально увеличивает общую вероятность входящей и исходящей последовательностей $p(x, y) = p(y \mid x) \cdot p(x)$. Обычно достаточно найти процедуру максимизации $p(y \mid x)$, и декодер, всегда выбирающий в качестве своей оценки одну из последовательностей, максимизирующих эту величину (или, эквивалентно, **метрика Фано**), называется *декодером максимального правдоподобия.*

Грубо говоря, каждый код можно считать деревом, у которого каждая ветвь является отдельным кодовым словом. Декодер начинает работу с первой вершины дерева и рассчитывает метрику ветви для каждой из возможных ветвей, определяя как наилучшую ту, ветвь которая соответствует кодовому слову x_j, обладающему наибольшей метрикой ветви $\mu F(x_j)$. Эта ветвь добавляется к пути, и алгоритм продолжается с новой вершины, представляющей сумму предыдущей вершины и количества битов в текущем наилучшем кодовом слове.

Посредством процесса итерации до конечной вершины дерева алгоритм прокладывает наиболее вероятный путь. В этом построении **битовая метрика Фано** определяется как

$$\log_2 \frac{p(y_i \mid x_i)}{p(y_i)} - R,$$

метрика ветви Фано определяется как

$$\mu_F(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\log_2 \frac{p(y_i \mid x_{ji})}{p(y_i)} - R \right),$$

а **метрика пути Фано** – как

$$\mu_F(x_{[1,l]}) = \sum_{j=1}^{l} \mu_F(x_j),$$

где $p(y_i \mid x_{ji})$ – вероятности перехода каналов, $p(y_i) = \sum_{xm} p(x_m) p(y_i \mid x_m)$ – распределение вероятностей выходных данных при заданных входных данных (усредненное по всем входным символам) и $R = \frac{k}{n}$ – кодовая скорость.

Для декодера с "жестким" решением $p(y_i = 0 \mid x_j = 0) = p$, $0 < p < \frac{1}{2}$ метрику Фано для пути $x_{[1,l]}$ можно записать как

$$\mu_F(x_{[1,l]}) = -\alpha d_H(y_{[1,l]}, x_{[1,l]}) + \beta \cdot l \cdot n,$$

где $\alpha = -\log_2 \frac{p}{1-p} > 0$, $\beta = 1 - R + \log_2(1-p)$ и d_H – хэммингова метрика.

Обобщенная метрика Фано для последовательного декодирования определяется как

$$\mu_F^w(x_{[1,l]}) = \sum_{j=1}^{ln} \left(\log_2 \frac{p(y_i \mid x_j)^w}{p(y_j)^{1-w}} - wR \right),$$

$0 \le w \le 1$. Когда $w = 1/2$, обобщенная метрика Фано сводится к метрике Фано с мультипликативной константой 1/2.

Метрическая рекурсия MAP декодирования

Максимальная апостериорная оценка последовательности или *MAP декодирование для кодов переменной длины,* использующая алгоритм Витерби, основана на **метрической рекурсии**

$$\Lambda_k^{(m)} = \Lambda_{k-1}^{(m)} + \sum_{n=1}^{l_k^{(m)}} x_{k,n}^{(m)} \log_2 \frac{p(y_{k,n} \mid x_{k,n}^{(m)} = +1}{p(y_{k,n} \mid x_{k,n}^{(m)} = -1} + 2 \log_2 p(u_k^{(m)}),$$

где $\Lambda_k^{(m)}$ – **метрика ветви** для ветви m в период времени (уровень) k; $x_{k,n}$ – n-й бит кодового слова с $l_k^{(m)}$ битами, помеченных на каждой ветви; $y_{k,n}$ – соответствующий принятый "мягкий" бит; u_k^m – исходные символы ветви m в период k, и при предположении статистической независимости исходных символов вероятность $p(u_k^{(m)})$ эквивалентна вероятности исходного символа, помеченного на ветви m, которая известна или рассчитывается. Метрический инкремент рассчитывается для каждой ветви, и наибольшее значение, при использовании логарифмического значения правдоподобия каждого состоянияиспользуется для дальнейшей рекурсии. Декодер сначала вычисляет метрику на всех ветвях, и затем соответствующая последовательность с наибольшей метрикой ветви выбирается начиная с заключительного состояния.

Глава 17

РАССТОЯНИЯ И ПОДОБНОСТИ В АНАЛИЗЕ ДАННЫХ

Множество данных – конечное множество, состоящее из m последовательностей $(x_1^j,...,x_n^j)$, $j \in \{1,...,m\}$ длины n. Значения $x_i^1,...,x_i^m$ представляют *атрибут* S_i. Он может быть *числовым,* в том числе *непрерывным* (действительные числа) и *двоичным* (да/нет выражается как 1/0), *ординальным* (числами указывается только ранг) или *номинальным* (неупорядоченным).

Кластерный анализ (или *классификация, таксономия*, *распознавание образов*) представляет собой разбиение данных A на относительно малое число *кластеров,* т.е. таких множеств объектов, что (по отношению к выбранной мере расстояния) объекты, насколько это возможно, "близки", если принадлежат одному и тому же кластеру, и "далеки", если принадлежат разным кластерам, и дальнейшее подразделение на кластеры ослабит вышеуказанные условия.

Рассмотрим три типичных случая. В приложениях, связанных с *выборкой информации,* узлы одноранговой базы данных экспортируют информацию (совокупность текстовых документов); каждый документ характеризуется вектором из $\mathbb{R}^n$. В *запросе* пользователя содержится вектор $x \in \mathbb{R}^n$, и пользователю необходимы все документы базы данных, *имеющие отношение* к этому запросу, т.е. принадлежащие *шару* в $\mathbb{R}^n$ с центром в x, фиксированного радиуса и подходящей функцией расстояния. *В группировке записей,* каждый документ (запись в базе данных) представлен вектором частотности термина $x \in \mathbb{R}^n$, и требуется определить семантическую значимость синтаксически разных записей. В *экологии,* если вектора x, y обозначают *распределения численности видов,* полученные двумя методами, выборки данных (т.е. x_j, y_j – числа индивидов вида j, полученные в соответствующей выборке), то требуется определить меру расстояния между x и y для сравнения двух методов. Зачастую данные организуются сначала в виде **метрического дерева**, т.е. в виде дерева, индексированного элементами метрического пространства.

После выбора расстояния d между объектами **метрика линкиджа,** т.е. расстояние между кластерами $A = \{a_1,..., a_m\}$ и $B = \{b_1,..., b_n\}$, обычно определяется как одно из следующих:

– **усредненная линкидж:** среднее значение расстояний между всеми членами этих кластеров, т.е. $\dfrac{\sum_i \sum_j d(a_i, b_j)}{mn}$;

– **одинарный линкидж:** расстояние между ближайшими членами этих кластеров, т.е. $\min_{ij} d(a_i, b_j)$;

– **полный линкидж:** расстояние между самыми удаленными друг от друга членами этих кластеров, т.е. $\min_{ij} d(a_i, b_j)$;

– **линкидж центроидов:** расстояние между центроидами (центрами тяжести) этих кластеров, т.е. $\| \tilde{a} - \tilde{b} \|_2$, где $a = \frac{\sum_i a_i}{m}$ и $b = \frac{\sum_i b_i}{n}$;

– линкидж варда: расстояние $\sqrt{\frac{\min}{m+n}} \| \tilde{a} - \tilde{b} \|_2$.

Многомерное шкалирование – техника, применяемая в области поведенческих и социальных наук для исследования объектов или людей. Вместе с кластерным анализом она базируется на использовании расстояний. Однако при многомерном шкалировании, в отличие от кластерного анализа, процесс начинается с некоторой $m \times m$ матрицы D расстояний между объектами и затем (итерационно) ищется репрезентация объектов в $\mathbb{R}^n$ с малым n, такая что их матрица евклидовых расстояний имеет минимальное квадратичное отклонение от исходной матрицы D.

В процессе анализа данных применяются многие **подобности**; их выбор зависит от характера данных и пока точной наукой не является. Ниже приводятся основные из этих подобностей и расстояний.

Для двух объектов, представленных ненулевыми векторами $x = (x_1,..., x_n)$ и $y = (y_1,..., y_n)$ из $\mathbb{R}^n$, в данной главе используются следующие обозначения:

$\sum x_i$ означает $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

1_F – *характеристическая функция* события F: $1_F = 1$, если F имеет место и $1_F = 0$, если нет.

$\| x \|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$ – обычная евклидова норма на $\mathbb{R}^n$.

$\frac{\sum x_i}{n}$, т.е. *среднее значение* компонента x, обозначается как $\bar{x}$. Так, $\bar{x} = \frac{1}{n}$, если x является вектором частотности (*дискретным распределением вероятностей*), т.е. все $x_i \geq 0$, $\sum x_i = 1$; и $\bar{x} = \frac{n+1}{2}$, если x является *ранжированием* (*перестановкой*), т.е. все x_i – разные числа множества $\{1,..., n\}$.

Для бинарного случая $x \in \{0, 1\}^n$ (т.е. когда x является бинарной n-последовательностью) пусть $X = \{1 \leq i \leq n : x_i = 1\}$ и $\overline{X} = \{1 \leq i \leq n : x_i = 0\}$. Пусть $|X \cap Y|$, $|X \cup Y|$, $|X \setminus Y|$ и $|X \Delta Y|$ обозначают кардинальное число пересечения, объединения, разности и симметрической разности $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ множеств X и Y соответственно.

17.1. ПОДРОБНОСТИ И РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ЧИСЛОВЫХ ДАННЫХ

Подобность Ружечки

Подобность Ружечки – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum \min\{x_i, y_i\}}{\sum \max\{x_i, y_i\}}$$

Соответствующее расстояние

$$1-\frac{\sum\min\{x_i,y_i\}}{\sum\max\{x_i,y_i\}}=\frac{\sum|x_i-y_i|}{\sum\max\{x_i,y_i\}}$$

совпадает на $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ с **метрикой нечеткого полинуклеотида** (см. гл. 25).

Подобность Робертса

Подобность Робертса – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i+y_i)\dfrac{\min\{x_i,y_i\}}{\max\{x_i,y_i\}}}{\sum(x_i+y_i)}.$$

Подобность Элленберга

Подобность Элленберга – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i+y_i)1_{x_ix_i\neq 0}}{\sum(x_i+y_i)(1+1_{x_iy_i=0})}.$$

Бинарные случаи подобностей Элленберга и Ружечки совпадают; такая подобность называется **подобностью Танимото** (или **жаккардовой подобностью общности**):

$$\frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|}$$

Расстояние Танимото (или **расстояние биотопа**) – расстояние на $\{0, 1\}^n$, определенное как

$$1-\frac{|X\cap Y|}{|X\cup Y|}=\frac{|X\Delta Y|}{|X\cup Y|}.$$

Подобность Глисона

Подобность Глисона – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i+y_i)1_{x_ix_i\neq 0}}{\sum(x_i+y_i)}.$$

Бинарные случаи **подобностей Глисона, Мотыки** и **Брэя-Куртиса** совпадают; такая подобность называется **подобностью Дайса** (или *подобностью Соренсена, подобностью Шекановского*):

$$\frac{2|X\cap Y|}{|X\cup Y|+|X\cap Y|}=\frac{2|X\cap Y|}{|X|+|Y|}.$$

Расстояние Шекановского–Дайса (или *неметрический коэффициент Брэя–Куртиса, нормализованное расстояние симметрической разности*) есть **почти метрика** на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$1-\frac{2|X\cap Y|}{|X|+|Y|}=\frac{|X\Delta Y|}{|X|+|Y|}.$$

Расстояние пересечения

Расстояние пересечения – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$1-\frac{\sum\min\{x_i,y_i\}}{\min\{\sum x_i,\sum y_i\}}.$$

Подобность Мотыки

Подобность Мотыки – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum\min\{x_i,y_i\}}{\sum(x_i+y_i\}}=n\frac{\sum\min\{x_i,y_i\}}{\bar{x}+\bar{y}}.$$

Подобность Брэя–Куртиса

Подобность Брэя-Куртиса – это подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{2}{n(\bar{x}+\bar{y})}\sum\min\{x_i,y_j\}.$$

Она называется *% подобностью Ренконена* (или *процентной подобностью*), если x, y являются *векторами частотности.*

Расстояние Брэя–Куртиса

Расстояние Брэя-Куртиса – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\frac{\sum|x_i-y_i|}{\sum(x_i+y_i)}.$$

Расстояние Канберры

Расстояние Канберры – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sum\frac{|x_i-y_i|}{|x_i|+|y_i|}.$$

Подобность 1 Кульчинского

Подобность 1 Кульчинского – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum\min\{x_i,y_i\}}{\sum|x_i-y_i|}.$$

Соответствующим расстоянием является

$$\frac{\sum|x_i-y_i|}{\sum\min\{x_i,y_i\}}.$$

Подобность 2 Кульчинского

Подобность 2 Кульчинского – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\bar{x}}+\frac{1}{\bar{y}}\right)\sum\min\{x_i,y_i\}.$$

Для бинарного случая она принимает вид

$$\frac{|x\cap Y|\cdot(|X|+|Y|)}{2|X|\cdot|Y|}.$$

Подобность Барони-Урбани–Бусера

Подобность Барони-Урбани-Бусера – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum \min\{x_i, y_i\} + \sqrt{\sum \min\{x_i, y_i\} \sum (\max_{1 \le j \le n} x_j - \max\{x_i, y_i\})}}{\sum \max\{x_i, y_i\} + \sqrt{\sum \min\{x_i, y_i\} \sum (\max_{1 \le j \le n} x_j - \max\{x_i, y_i\})}}.$$

Для бинарного случая она принимает вид

$$\frac{|X \cap Y| + \sqrt{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|}}{|X \cup Y| + \sqrt{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|}}.$$

17.2. АНАЛОГИ ЕВКЛИДОВА РАССТОЯНИЯ

Степенное (*p, r*) – расстояние

Степенным (*p, r*)-расстоянием называется расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$(\sum w_i (x_i - y_i)^p)^{1/p}$$

Для $p = r \ge 1$ оно является l_p**-метрикой**, включая соответственно **евклидову метрику,** метрику **Манхэттена и чебышевскую метрику** для $n = 2{,}1$ и ∞ соответственно.

Случай $0 < p = r < 1$ называется **дробным l_p-расстоянием** (не метрика); оно используется для случаев, когда количество наблюдений незначительно, а число n переменных велико.

Взвешенные версии $(\sum w_i (x_i - y_i)^p)^{1/p}$ (с неотрицательными весами w_i) также используются в приложениях для $p = 2{,}1$.

Расстояние размера Пенроуза

Расстояние размера Пенроуза – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{n} \sum |x_i - y_i|.$$

Оно пропорционально **метрике Манхэттена.** Средняя разность Щекановского определяется как $\frac{\sum |x_i - y_i|}{n}$.

Расстояние формы Пенроуза

Расстояние формы Пенроуза – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum ((x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}))^2}.$$

Сумма квадратов вышеприведенных **расстояний Пенроуза равна квадрату евклидова расстояния.**

Лоренцевское расстояние

Лоренцевское расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sum \ln(1 + |x_i - y_i|).$$

Евклидово двоичное расстояние

Евклидово двоичное расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum (1_{x_i > 0} - 1_{y_i > 0})^2}.$$

Евклидово среднее цензурированное расстояние

Евклидово среднее цензурированное расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\frac{\sum (x_i - y_i)^2}{\sum 1_{x_i^2 + y_i^2 \neq 0}}}.$$

Нормированное l_p-расстояние

Нормированное l_p-расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\frac{\| x - y \|_p}{\| x \|_p + \| y \|_p}.$$

Единственным целым числом p, для которого нормированное l_p-расстояние является метрикой, есть $p = 2$. Более того, как показано в [Yian91], для любых $a, b > 0$ расстояние $\dfrac{\| x - y \|_2}{a + b(\| x \|_2 + \| y \|_2)}$ является метрикой.

Расстояние Кларка

Расстояние Кларка – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\left(\frac{1}{n} \sum \left(\frac{x_i - y_i}{| x_i | + | y_i |} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Расстояние Мила

Расстояние Мила (или *индекс Мила*) – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sum_{1 \leq i \leq n-1} (x_i - y_i - x_{i+1} + y_{i+1})^2.$$

Расстояние Хеллинджера

Расстояние Хеллинджера – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{2 \sum \left(\sqrt{\frac{x_i}{\bar{x}}} - \sqrt{\frac{y_i}{\bar{y}}} \right)^2}$$

(см. **Метрика Хеллинджера,** гл. 14).

Индекс ассоциации Уайттекера определяется как $\dfrac{1}{2} \sum \left| \dfrac{x_i}{\bar{x}} - \dfrac{y_i}{\bar{y}} \right|$.

Симметричная χ^2-мера

Симметричная χ^2-мера – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{\sum \frac{\bar{x} + \bar{y}}{n(x_i + y_i)} \left(\frac{x_i}{\bar{x}} - \frac{y_i}{\bar{y}} \right)^2} = \sqrt{\sum \frac{\bar{x} + \bar{y}}{n(\bar{x} \cdot \bar{y})^2} \cdot \frac{(x_i \bar{y} - y_i \bar{x})^2}{x_i + y_i}}.$$

Симметрическое χ^2-расстояние

Симметрическое χ^2-расстояние (или *хи-расстояние*) есть расстояние по $\mathbb{R}^n$,

определенное как

$$\sqrt{\sum \frac{\bar{x}+\bar{y}}{n(x_i+y_i)}\left(\frac{x_i}{\bar{x}}-\frac{y_i}{\bar{y}}\right)^2}=\sqrt{\sum \frac{\bar{x}+\bar{y}}{n(\bar{x}\cdot\bar{y})^2}\cdot\frac{(x_i\bar{y}-y_i\bar{x})^2}{x_i+y_i}}.$$

Расстояние Махаланобиса

Расстояние Махаланобиса (или *статистическое расстояние*) – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$\sqrt{(\det A)^{1/n}(x-y)A^{-1}(x-y)^T}.$$

где A – положительно определенная матрица (обычно это *матрица ковариантности* матрица конечного подмножества из $\mathbb{R}^n$, состоящего из *векторов наблюдения*) (см. **Полуметрика Махаланобиса,** гл. 14).

17.3. ПОДОБНОСТИ И РАССТОЯНИЯ ДЛЯ БИНАРНЫХ ДАННЫХ

Обычно такие подобности s имеют множество значений от 0 до 1 или от –1 до 1, а соответствующие расстояния обычно равны $1 - s$ или $\frac{1-s}{2}$.

Подобность Амана

Подобность Амана – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{2\,|\,\overline{X\Delta Y}\,|}{n}-1=\frac{n-2\,|\,X\Delta Y\,|}{n}.$$

Подобность Рэнда

Подобность Рэнда (или *подобность Сокала–Миченера, простое соответствие*) – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\,\overline{X\Delta Y}\,|}{n}.$$

Соответствующая метрика $\frac{|\,X\Delta Y\,|}{n}$ называется *вариантностью* (является бинарным случаем *средней разности между признаками Щекановского*) и $1-\frac{|\,X\Delta Y\,|}{n}$ называется *подобностью Говара.*

Подобность 1 Сокала–Сниса

Подобность 1 Сокала–Сниса – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{2\,|\,\overline{X\Delta Y}\,|}{n+|\,X\Delta Y\,|}.$$

Подобность 2 Сокала–Сниса

Подобность 2 Сокала–Сниса – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\,X\cap Y\,|}{|\,X\cup Y\,|+|\,X\Delta Y\,|}.$$

Подобность 3 Сокала–Сниса

Подобность 3 Сокала–Сниса – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X\Delta Y|}{|\overline{X\Delta Y}|}.$$

Подобность Рассела–Рао

Подобность Рассела–Рао – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|}{n}.$$

Подобность Симпсона

Подобность Симпсона (*подобность перекрытия)* – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|}{\min\{|X|,|Y|\}}.$$

Подобность Брауна–Бланке

Подобность Брауна–Бланке – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|}{\max\{|X|,|Y|\}}.$$

Подобность Роджера–Танимото

Подобность Роджера–Танимото – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\overline{X\Delta Y}|}{n+|X\Delta Y|}.$$

Подобность Фэйса

Подобность Фейта – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y| + |\overline{X\Delta Y}|}{2n}.$$

Подобность Тверского

Подобность Тверского – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|}{a|X\Delta Y| + b|X \cap Y|}.$$

Она становится **подобностью Танимото, подобностью Дайса** и (для бинарного случая) **подобностью 1 Кульчинского** для $(a,b) = (1,1), \left(\frac{1}{2},1\right)$ и (1, 0) соответственно.

Подобность Говера–Лежандра

Подобность Гоуэра–Лежандра – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|\overline{X\Delta Y}|}{a|X\Delta Y| + |\overline{X\Delta Y}|} = \frac{|\overline{X\Delta Y}|}{n+(a-1)|X\Delta Y|}.$$

Подобность Андерберга

Подобность Андерберга (или *подобность 4 Сокала–Сниса*) – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y|}{4}\left(\frac{1}{|X|}+\frac{1}{|Y|}\right)+\frac{|\overline{X \cup Y}|}{4}\left(\frac{1}{|\overline{X}|}+\frac{1}{|\overline{Y}|}\right).$$

***Q* подобность Юле**

***Q* подобность Юле** – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}| - |X \setminus Y| \cdot |Y \setminus X|}{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}| + |X \setminus Y| \cdot |Y \setminus X|}.$$

***Y* подобность взаимосвязанности Юле**

***Y* подобность взаимосвязанности Юле** – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{\sqrt{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|} - \sqrt{|X \setminus Y| \cdot |Y \setminus X|}}{\sqrt{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|} + \sqrt{|X \setminus Y| \cdot |Y \setminus X|}}.$$

Подобность дисперсии

Подобность дисперсии – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}| - |X \setminus Y| \cdot |Y \setminus X|}{n^2}.$$

ϕ подобность Пирсона

ϕ подобность Пирсона – подобность на $\{0, 1\}^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}| - |X \setminus Y| \cdot |Y \setminus X|}{\sqrt{|X| \cdot |\overline{X}| \cdot |Y| \cdot |\overline{Y}|}}.$$

Подобность 2 Говера

Подобность 2 Говера (или *подобность* 5 *Сокала–Сниса*) – подобность на $\{0, 1)^n$, определенная как

$$\frac{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|}{\sqrt{|X| \cdot |\overline{X}| \cdot |Y| \cdot |\overline{Y}|}}.$$

Разность образов

Разность образов – расстояние на $\{0, 1\}^n$, определенное как

$$\frac{4|X \setminus Y| \cdot |Y / X|}{n^2}.$$

***Q_0*-разность**

***Q_0*-разность** – расстояние на $\{0, 1\}^n$, определенное как

$$\frac{|X \setminus Y| \cdot |Y / X|}{|X \cap Y| \cdot |\overline{X \cup Y}|}.$$

17.4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ПОДРОБНОСТИ И РАССТОЯНИЯ

Ковариационная подобность

Ковариационная подобность – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}=\frac{\sum x_i y_i}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}.$$

Кореляционная подобность

Кореляционная подобность (или *корреляция Пирсона*, или *линейный коэффициент корреляции по смешанным моментам Пирсона*) s – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{(\sum(x_j-\bar{x})^2)(\sum(y_j-\bar{y})^2)}}.$$

Несходства $1-s$ и $1-s^2$ называются **кореляционным расстоянием Пирсона** и *квадратом расстояния Пирсона* соответственно. Более того,

$$\sqrt{2(1-s)}=\sqrt{\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sqrt{\sum(x_j-\bar{x})^2}}-\frac{y_i-\bar{y}}{\sqrt{\sum(y_j-\bar{y})^2}}\right)}$$

является нормализацией евклидова расстояния (см. отличающееся **нормированное l_2-расстояние** в данной главе).

Для случая $\bar{x}=\bar{y}=0$ корреляционная подобность принимает вид $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\|y\|_2}$.

Подобность косинуса

Подобность косинуса (или *подобность Орчини, угловая подобность, нормированное скалярное произведение*) есть подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}=\cos\phi,$$

где ϕ – угол между векторами x и y. Для бинарного случая она принимает вид

$$\frac{|X\cap Y|}{\sqrt{|X|\cdot|Y|}}$$

и называется **подобностью Очиаи-Отсуки.**

В группировке записей подобность косинуса называется **TF-IDF** (сокращенно от английских терминов *Частота – Обратная Частота Документа*).

Расстояние косинуса определяется как $1-\cos\phi$.

Угловая полуметрика

Угловая полуметрика на $\mathbb{R}^n$ – угол (измеренный в радианах) между векторами x и y:

$$\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}.$$

Расстояние Орлочи

Расстояние Орлочи (или *хордовое расстояние*) – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определяемое как

$$\sqrt{2\left(1-\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}\right)}.$$

Отношение подобности

Отношение подобности (или *подобностью Кохонена*) – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,y\rangle+\|x-y\|_2^2}.$$

Для бинарного случая она совпадает с **подобностью Танимото.**

Подобность Мориситы–Хорна

Подобность Мориситы–Хорна – подобность на $\mathbb{R}^n$, определенная как

$$\frac{2\langle x,y\rangle}{\|x\|_2^2\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{x}}+\|y\|_2^2\cdot\frac{\bar{x}}{\bar{y}}}.$$

Ранговая корреляция Спирмана

В случае, когда векторы $x, y \in \mathbb{R}^n$ являются *ранжированиями* (или *перестановками*), т.е. компоненты каждого из них – различные числа множества $\{1,..., n\}$, мы имеем $\bar{x}=\bar{y}=\frac{n+1}{2}$. Для таких ординальных данных корреляционная подобность принимает вид

$$1-\frac{6}{n(n^2-1)}\sum(x_i-y_i)^2.$$

Это – ρ **ранговая корреляция Спирмана.** Она называется также ρ-*метрикой Спирмана*, но не является расстоянием. ρ **расстояние Спирмена** – евклидова метрика на перестановках. **Масштабная линейка Спирмана** определяется как

$$1-\frac{3}{n^2-1}\sum|x_i-y_i|.$$

Это l_1-версия **ранговой корреляции Спирмана. Расстояние масштабной линейки Спирмана** является l_1-метрикой на перестановках.

Другой корреляционной подобностью для перестановок является τ **ранговая корреляция Кендалла,** называемая также τ *метрикой Кендалла* (расстоянием не является), которая определяется как

$$\frac{2\sum_{1\le j<j\le n}\operatorname{sign}(x_i-x_j)\operatorname{sign}(y_i-y_j)}{n(n-1)}.$$

τ **расстояние Кендалла** на перестановках определяется как

$$|\{(i,j):1\le i<j\le n,\ (x_i-x_j)(y_i-y_j)<0\}|.$$

Расстояние Кука

Расстоянием Кука называется расстояние на $\mathbb{R}^n$, дающее статистическую оценку того, насколько сильно некое i-е наблюдение может повлиять на оценки регрессии. Оно является нормированным **квадратом евклидова расстояния** между расчетными параметрами регрессионных моделей, построенных на основе всех данных и данных без учета i-го наблюдения.

Основными расстояниями такого рода, применяемыми в регрессивном анализе для выявления наиболее влиятельных наблюдений, являются *DFITS расстояние, расстояние Вэлша* и *расстояние Хади.*

Машинное обучение на базе расстояний

Для многих практических приложений (*нейронных сетей, информационных сетей* и т.п.), характерными признаками которых являются неполнота данных, а также непрерывность и номинальность атрибутов рассматриваются следующие задачи. Для $m \times (n + 1)$ матрицы $((x_{ij}))$, ее строка $(x_{i0}, x_{i1},..., x_{in})$ *обозначает входной вектор* $x_i = (x_{i1},..., x_{in})$ с выходной меткой x_{i0}; множество из m входных векторов представляет собой тренировочное множество. Для любого нового входного вектора $y = (y1,..., y_n)$ ищется ближайший (в терминах выбранного расстояния) входной вектор x_i, необходимый для *классификации* y, т.е. для прогнозирования его выходной метки как x_{i0}.

Расстояние ([WiMa97]) $d(x_i, y)$ определяется как

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} d_j^2(x_{ij}, y_j)}$$

с $d_j(x_{ij}, y_j) = 1$, если x_{ij} или y_j неизвестны. Если атрибут j (т.е. диапазон значений x_{ij} для $1 \le i \le m$) является номинальным, то $dj(x_{ij}, y_j)$ определяется, например, как $1_{x_{ij} \ne y}$ или как

$$\sum_{o} \left| \frac{|\{1 \le t \le m : x_{t0} = a, x_{ij} = x_{ij}\}|}{|\{1 \le t \le m : \ x_{tj} = x_{ij}\}|} - \frac{|\{1 \le t \le m : \ x_{t0} = a, x_{tj} = y_i\}|}{|\{1 \le t \le m : \ x_{tj} = y_j\}|} \right|^q$$

для $q = 1$ или 2; сумма берется по всем классам выходных меток, т.е. значений a из $\{x_{t0}: 1 \le t \le m\}$. Для непрерывных атрибутов j число d_j берется как величина $|x_{ij} - y_j|$, деленная на $\max_t x_{tj} - \min_t x_{tj}$ или на $\frac{1}{4}$ стандартного отклонения значений x_{ij}, $1 \le t \le m$.

Глава 18

Расстояния в математической инженерии

В этой главе сгруппированы основные расстояния, применяемые при *программировании движения роботов, клеточных автоматов, систем с обратной связью и многоцелевой оптимизации.*

18.1. РАССТОЯНИЯ В ОРГАНИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ РОБОТОВ

Методы программирования перемещений автоматических механизмов применяются в области робототехники, системах виртуальной реальности и автоматизированного проектирования. **Метрика программирования перемещений** – это метрика, используемая в методике программирования перемещений автоматических механизмов.

Роботом называется конечная совокупность жёстких звеньев, организованных в соответствии с кинематической иерархией. Если робот имеет n степеней свободы, это приводит нас к n-мерному *многообразию* C, называемому *пространством конфигураций* (или *C-пространством*) робота. *Рабочее пространство* W робота – это пространство, в пределах которого робот перемещается. Обычно оно моделируется как евклидово пространство $\mathbb{E}^3$. *Область препятствий* CB – множество всех конфигураций $q \in C$, которые либо вынуждают робота сталкиваться с препятствиями B, либо заставляют разные звенья робота сталкиваться между собой. Замыкание $\mathrm{Cl}(C_{\mathrm{free}})$ множества $C\mathrm{free} = C\backslash\{CB\}$ называется *пространством конфигураций без столкновений.* Задача *алгоритма программирования перемещений* состоит в поиске свободного от столкновений пути от первоначальной конфигурации к конечной.

Метрикой конфигурации называется любая метрика программирования перемещений на пространстве конМфигураций C робота.

Обычно пространство конфигураций C представляет собой упорядоченную шестерку чисел $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$, где первые три числа – координаты положения и последние три – ориентация. Координаты ориентации выражены углами в радианах. Интуитивно, хорошая мера расстояния между двумя конфигурациями – это мера рабочего пространства, заметаемого роботом в ходе перемещения между ними (заметаемый объем). Однако расчет такой метрики является чрезмерно дорогостоящим делом.

Проще всего рассматривать C-пространство как евклидово пространство и использовать евклидовы расстояния или их обобщения. Для таких метрик конфигурации осуществляется нормализация координат ориентации таким образом, чтобы они были одинаковыми по величине с координатами положения. Грубо говоря, координаты ориентации умножаются на максимум значений x, y или z размера ограничивающего блока рабочего пространства. Примеры таких метрик конфигурации приводятся ниже.

В общем случае пространство конфигураций для трехмерного жесткого тела можно отождествить с группой Ли $ISO(3): C \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}P^3$. Общая форма матрицы в $ISO(3)$ задается как

$$\begin{pmatrix} R & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{R} \in SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$ и $X \in \mathbb{R}^3$. Если X_q и R_q являются компонентами переноса и вращения конфигурации $q = (X_q, R_q) \in ISO(3)$, то метрика конфигурации между конфигурациями q и r задается как $w_{tr} \| X_q - X_r \| + w_{\text{rot}} f(R_q, R_r)$, где **расстояние переноса** $\| X_q - X_r \|$ получается в результате использования некоторой нормы $\| \cdot \|$ на $\mathbb{R}^3$, а **расстояние вращения** $f(R_q, R_r)$ является положительной скалярной функцией, задающей нам расстояние между вращениями $R_q, R_r \in SO(3)$. Расстояние вращения масштабируется относительно расстояния переноса с помощью весов w_{tr} и w_{rot}.

Метрика рабочего пространства – любая метрика программирования перемещений в рабочем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Имеется также много других типов метрик, используемых в процессе программирования перемещений, в частности, **римановы метрики, хаусдорфова метрика, расстояние роста** и т.п.

Взвешенное евклидово расстояние

Взвешенное евклидово расстояние – метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^2 + \sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^2 \right)^{1/2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$, где $x = (x_1,..., x_6)$, x_1, x_2, x_3 – координаты положения, x_4, x_5, x_6 – координаты ориентации и w_i – нормализирующий множитель. Взвешенное евклидово расстояние в $\mathbb{R}^6$ делает одинаковой значимость и положения, и ориентации.

Масштабированное евклидово расстояние

Масштабированным евклидовым расстоянием называется метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(s \sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^2 + (1-s) \sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^2 \right)^{1/2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$. Масштабированное евклидово расстояние изменяет относительную значимость элементов положения и ориентации посредством масштабного параметра s.

Взвешенное расстояние Минковского

Взвешенное расстояние Минковского – метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^p + \sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^p \right)^{1/p}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$. Она использует параметр $p \geq 1$ и как и в евклидовом случае, имеет одинаковую значимость положения и ориентации.

Модифицированное расстояние Минковского

Модифицированное расстояние Минковского – метрика конфигурации на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\left(\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i |^{p_1} + \sum_{i=4}^{6} (w_i | x_i - y_i |)^{p_2} \right)^{1/p_3}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^6$. Различия между положением и ориентацией определяются с использованием параметров $p1 \geq 1$ (для положения) и $p_2 \geq 1$ (для ориентации).

Взвешенное расстояние Манхэттена

Взвешенным расстоянием Манхэттена называется **метрика конфигурации** на $\mathbb{R}^6$, определенная как

$$\sum_{i=1}^{3} | x_i - y_i | + \sum_{i=4}^{6} w_i | x_i - y_i |$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^6$. Она совпадает с точностью до нормализующего множителя с обычной $\boldsymbol{l_1}$**-метрикой** на $\mathbb{R}^6$.

Метрика перемещения робота

Метрика перемещения робота – метрика конфигурации на пространстве конфигурации C робота, определенная как

$$\max_{a \in A} \| a(q) - a(p) \|$$

для любых конфигураций $q, r \in C$, где $a(q)$ – положение точки a в рабочем пространстве $\mathbb{R}^3$, когда робот находится в конфигурации q, и $\| \cdot \|$ – одна из норм на $\mathbb{R}^3$, обычно евклидова норма. Интуитивно, метрика вычисляет максимальное из тех расстояний в рабочем пространстве, которые проходит каждая часть робота при его переходе от одной конфигурации к другой (см. **метрика ограниченного блока**).

Метрика углов Эйлера

Метрика углов Эйлера – **метрика вращения** на группе $SO(3)$ (для случая использования *эйлеровых углов* для вращения), определенная как

$$w_{\text{rot}} \sqrt{\Delta(\theta_1, \theta_2)^2 + \Delta(\phi_1, \phi_2)^2 + \Delta(\eta_1, \eta_2)^2}$$

для всех R_1, $R_2 \in SO(3)$, заданных *углами Эйлера* $(\theta_1, \phi_1, \eta_1)$ и $(\theta_2, \phi_2, \eta_2)$ соответственно, где $\Delta(\theta_1, \theta_2) = \min\{| \theta_1 - \theta_2 |, 2\pi - | \theta_1 - \theta_2 |\}$, $\theta_i \in [0, 2\pi]$ – **метрика между углами** и w_{rot} –коэффициент масштабирования.

Метрика единичных кватернионов

Метрикой единичных кватернионов называется **метрика вращения** на *представлении с помощью единичных кватернионов для* $SO(3)$, т.е. представлении $SO(3)$ как множества точек (*единичных кватернионов*) на единичной сфере S^3 в $\mathbb{R}^4$ с отождествленными антиподальными точками ($q \sim -q$). Данное представление $SO(3)$

предполагает наличие многих возможных метрик на нем, например таких, как:

1) $\| \ln(q^{-1}r) \|$,

2) $w_{\text{rot}}(1 - \| \lambda \|)$, $\lambda = \sum_{i=1}^{4} q_i r_i$,

3) $\min\{\| q - r \|, \| q + r \|\}$,

4) $\arccos \lambda, \lambda = \sum_{i=1}^{4} q_i r_i$,

где $q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, $\sum_{i=1}^{4} q_i = 1$, $\| \cdot \|$ – норма на $\mathbb{R}^4$ и w_{rot} – коэффициент масштабирования.

Метрика центра массы

Метрика центра массы – **метрика рабочего пространства**, определенная как евклидово расстояние между *центром массы* робота в двух конфигурациях. Центр массы аппроксимируется путем усреднения всех вершин объекта.

Метрика ограниченного блока

Метрикой ограниченного блока называется **метрика рабочего пространства,** определенная как максимальное евклидово расстояние между любой вершиной *ограничивающего блока* робота в одной конфигурации и соответствующий вершиной в другой конфигурации.

Расстояние позы

Расстояние позы обеспечивает меру несходства между действиями *исполнительных устройств* (включая роботов и людей) в процессе обучения роботов посредством имитации.

В этом контексте исполнительные устройства рассматриваются как *кинематические цепи* и представлены в форме *кинематического дерева,* такого что каждое звено в кинематической цепи представлено единственным ребром соответствующего дерева. Конфигурация цепи представлена позой соответственного дерева, полученной посредством размещения пары (n_i, l_i) на каждом ребре e_i. Здесь n_i является единичным вектором нормали, представляющим ориентацию соответствующего звена цепи, а l_i есть длина звена. *Класс поз* состоит из всех поз данного кинематического дерева.

Расстояние позы – расстояние на данном классе поз, которое является суммой мер несходства для каждой пары сопоставимых отрезков в данных двух позах.

Метрики миллиботов

Миллиботы – группа разнородных ограниченных по ресурсам роботов малого размера. Группа роботов может коллективно обмениваться информацией. Они в состоянии объединять информацию о расстояниях, получаемую от разных платформ, и строить карту глобального размещения, представляющую собой единое коллективное видение окружающей среды. При программировании перемещения миллиботов с целью построения **метрики программирования перемещения** можно назначить последовательность случайных точек вокруг робота и представить каждую точку как место для предстоящего перемещения. После этого выбирается точка с наиболее высокой функцией полезности и робот направляется именно в

эту точку. Так, **метрика свободного пространства,** определяемая контуром свободного пространства, позволяет выбирать только те точки, которые не предполагают преодоления роботом каких-либо препятствий; **метрикой исключения столкновений** отвергаются перемещения, маршрут которых проходит слишком близко от препятствий; **метрикой осваиваемой области** поощряются перемещения робота по маршрутам, выводящим его на открытое пространство; **метрикой конфигурации** поощряются перемещения, позволяющие сохранить конфигурацию; **метрика локализации,** основанная на угле расхождения между одной или несколькими парами локализации, поощряет те перемещения, которые максимизируют локализацию ([GKC04], см. **Расстояние исключения столкновений, Расстояние носильщиков пианино,** гл. 19).

18.2. РАССТОЯНИЯ ДЛЯ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Пусть S, $2 \le |S| < \infty$ есть конечное множество (*алфавит*) и пусть S^{∞} – множество бесконечных в обе стороны последовательностей $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ (*конфигураций*) элементов (*букв*) множества S. (*Одномерный*) *клеточный автомат* – непрерывное отображение $f : S^{\infty} \to S^{\infty}$, которое *коммутирует с отображением переноса* $g : S^{\infty} \to S^{\infty}$, определенным как $g(x_i) = x_{i+1}$. После определения метрики на S^{∞} полученное метрическое пространство вместе с отображением f образуют **дискретную динамическую систему.** Клеточные автоматы (в общем случае бесконечные в обе стороны таблицы вместо последовательностей) применяются в символической динамике, информатике и (как модели) в физике и биологии. Основные расстояния между конфигурациями $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ из S^{∞} (см. [BFK99]) приведены ниже.

Метрика Кантора

Метрикой Кантора называется метрика на S^{∞}, определенная как

$$2^{-\min\{i \ge 0 : |x_i - y_i| + |x_{-i} - y_{-i}| \ne 0\}}.$$

Она соответствует случаю $a = \dfrac{1}{2}$ **обобщенной метрики Кантора** (гл. 11). Соответствующее метрическое пространство является компактным.

Полуметрика Бесиковича

Полуметрикой Бесиковича называется метрика на S^{∞}, определенная как

$$\overline{\lim}_{l \to \infty} \frac{|\, -l \le i \le l : x_i \ne y_i \,|}{2l+1}.$$

Соответствующее полуметрическое пространство является **полным** (см. **Расстояние Бесиковича** на измеримых функциях, гл. 13).

Полуметрика Вейля

Полуметрика Вейля называется полуметрика на S^{∞}, определенная как

$$\overline{\lim}_{l \to \infty} \max_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\, k+1 \le i \le l : x_i \ne y_i \,|}{l}.$$

Эта и приведенные выше метрики являются **инвариантными относительно переноса,** однако они не являются сепарабельными или локально компактными (см. Расстояние Вейля, гл. 13).

18.3. РАССТОЯНИЯ В ТЕОРИИ КОНТРОЛЯ

В *теории контроля* рассматривается цепь обратной связи между *установкой P* (функция, представляющая подлежащий контролю объект и *управляющим устройством C* (функция, которую предстоит построить). Результат y, измеренный сенсорным датчиком, сравнивается с эталонным значением r. Затем управляющее устройство использует вычисленную ошибку $e = r - y$ для ввода данных $u = Ce$. При наличи нулевых начальных условий сигналы ввода и вывода на установку соотносятся как $y = Pu$, где r, y, v и P, C являются функциями частотной переменной s. Таким образом, $y = \dfrac{PC}{1+PC} r$ и $y \approx r$ (т.е. вывод контролируется просто установкой эталонного значения), если PC больше любого значения s. Если система моделируется как система линейных дифференциальных уравнений, то *передаточная функция* $\dfrac{PC}{1+PC}$ является рациональной функцией. Установка P является стабильной, если не имеет полюсов в замкнутой правой полуплоскости $C_+ = \{s \in \mathbb{C}: \Re s \geq 0\}$.

Задача устойчивой стабилизации состоит в нахождении для заданной *номинальной* установки (модели) P_0 и некоей метрики d на установках такого центрированного в P_0 открытого шара с максимальным радиусом, чтобы некоторые управляющие устройства (рациональные функции) C могли стабилизировать каждый элемент данного шара.

Граф G(P) установки P есть множество всех ограниченных пар вход-выход $(u, y = Pu)$. Как u так и y принадлежат *пространству Харди* $H^2(\mathbb{C}_+)$ правой полуплоскости; граф является замкнутым подпространством $H^2(\mathbb{C}_+) + H^2(\mathbb{C}_+)$. Именно, $G(P) = f(P)H^2(\mathbb{C}^2)$ для некоторой функции $f(P)$, называемой *символом графа*, а $G(P)$ является замкнутым подпространством $H^2(\mathbb{C}^2)$.

Все приведенные ниже метрики являются пропускоподобными метриками; они топологически эквивалентны, и стабилизация является устойчивым свойством по отношению к каждой из них.

Метрика пропуска

Метрика пропуска между установками P_1 и P_2 (введена в теорию контроля Замесом и Эль-Заккари) определяется как

$$\mathrm{gap}(P_1, P_2) = \| \Pi(P_1) - \Pi(P_2) \|_2,$$

где $\Pi(P_o)$, $i = 1, 2$ является ортогональной проекцией графа $G(P_i)$ установки P_i, рассматриваемого как замкнутое подпространство $H^2(\mathbb{C}^2)$.

Имеем

$$\mathrm{gap}(P_1, P_2) = \max\{\delta_1(P_1, P_2),\ \delta_1(P_2, P_1)\},$$

где $\delta_1(P_1, P_2) = \inf_{Q \in H\infty} \| f(P_1) - f(P_2)Q \|_{H\infty}$ и $f(P)$ – символ графа.

Если A является $m \times n$ матрицей с $m < n$, то ее n столбцов порождают n-мерное подпространство, а матрица B ортогональной проекции на пространство столбцов матрицы A имеет вид $A(A^TA) - 1A^T$. Если базис ортонормирован, то $B = AA^T$. В общем случае метрика пропуска между двумя подпространствами одной и той же размерности – *l_2-норма* разности их ортогональных проекций (см. **Расстояние Фробениуса**, гл. 12).

Метрика Видьясагара

Метрика Видьясагара (или *метрика графа*) между установками P_1 и P_2 определяется как

$$\max\{\delta_2(P_1,P_2),\ \delta_2(P_2,P_1)\},$$

где $\delta_2(P_1,P_2) = \inf_{\|Q\|\le 1} \| f(P_1) - f(P_2)Q \|_{H\infty}$.

Поведенческое расстояние – пропуск между *расширенными графами* установок P_1 и P_2; новый элемент добавлен к графу $G(P)$ для учета всех возможных исходных условий (вместо обычной ситуации, когда исходные условия нулевые).

Метрика Винникомбе

Метрика Винникомбе (*метрика* ν-*пропуска*) между установками P_1 и P_2 определяется как

$$\delta_\nu(P_1,P_2) = \| (1+P_2P_2^*)^{-1/2}(P_2-P_1)(1+P_1^*P_1)^{-1/2} \|_\infty$$

если $\mathrm{wno}(f^*(P_2)f(P_1)) = 0$ и равна 1, иначе. Здесь $f(P)$ является функцией символа графа установки P. В [Youn98] даны определения *числа кручения* wno(f) для рациональной функции f, а также хорошее введение в теорию стабилизации с обратной связью.

18.4. MOEA РАССТОЯНИЯ

Многие связанные с оптимизацией задачи преследуют несколько целей одновременно, однако для простоты только одна из них оптимизируется, а остальные выступают в качестве ограничений. При *многоцелевой оптимизации* рассматривается (помимо некоторых ограничений в виде неравенств) целевая вектор-функция $f: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ из *пространства поиска* (или *генотипа, переменных решения*) X в *пространство целей* (или *фенотипа, векторов решений*) $f(X) = \{f(x): x \in X\} \subset \mathbb{R}^k$. Точка $x^* \in X$ является *оптимальной по Парето*, если для каждой другой точки $x \in X$ вектор решений $f(x)$ не *мажорирует по Парето* вектор $f(x^*)$, т.е $f(x) \le f(x^*)$. *Оптимальный по Парето фронт* – это множество $PF^* = \{f(x): x \in X^*\}$, где X^* является множеством всех оптимальных по Парето точек.

Многоцелевые эволюционные алгоритмы (сокращенно MOEA от английского *Multi-objective evolutionary algorithms*) порождают на каждом этапе *множество аппроксимации* (найденный по Парето фронт PF_{known} приближает к желаемый Парето фронт PF^*) в пространстве целей, где ни один элемент доминирует по Парето над другим. Примеры **метрик MOEA**, т.е. мер оценки, насколько PF_{known} близок к PF^*, представлены ниже.

Расстояние поколений

Расстояние поколений определяется как

$$\frac{\left(\sum_{j=1}^{m} d_j^2\right)^{1/2}}{m},$$

где $m = |PF_{\text{known}}|$ и d_j есть евклидово расстояние (в пространстве целей) между (т.е. j-м членом фронта PF_{known}) и ближайшим членом PF^*.

Термин **расстояние поколений** (или *скорость оборота*) используется также для обозначения минимального числа ветвей между двумя положениями в любой системе ранжированного убывания, представленного в виде иерархического дерева. Примерами являются: **филогенетическое расстояние** на филогенетическом дереве, количество поколений, отделяющих фотокопию от оригинального оттиска, количество поколений, отделяющих посетителей мемориала от памятных событий, которым он посвящен.

Расположение с промежутками

Расположение с промежутками определяется как

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} (\bar{d} - d_j)^2}{m-1} \right)^{1/2},$$

где $m = | PF_{\text{known}} |$ и d_j есть l_1-расстояние (в пространстве целей) между $f^i(x)$ (т.е. j-м членом фронта PF_{known}) и другим ближайшим членом PF_{known}, в то время как d является средним значением всех d_j.

Суммарное недоминированное отношение векторов

Суммарное недоминированное отношение векторов определяется как $\frac{| PF_{\text{known}} |}{| PF^* |}$.

Часть V

РАССТОЯНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СФЕРЕ

Глава 19

Расстояния на действительной и цифровой плоскостях

19.1. МЕТРИКИ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

На плоскости $\mathbb{R}^2$ можно использовать много разных метрик. В частности, любая **l_p-метрика** (так же, как и любая **метрика нормы** для данной нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$) может быть использована на плоскости, при этом наиболее естественной является l_2-метрика, т.е. евклидова метрика $d_E(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, которая дает нам длину отрезка $[x, y]$ прямой и является **внутренней метрикой** плоскости. Однако имеются и другие, нередко "экзотические" метрики на $\mathbb{R}^2$. Многие из них применяются для построения *обобщенных диаграмм Вороного* на $\mathbb{R}^2$ (см., например, **московскую метрику, метрику сети, правильную метрику**). Некоторые из них применяются в цифровой геометрии.

Задачи на расстояния эрдешевского типа (задаваемые обычно для евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$) представляют интерес для случая $\mathbb{R}^n$ и для других метрик на $\mathbb{R}^2$. Примерным содержанием таких задач является:

– нахождение наименьшего числа различных расстояний (или наибольшего числа появлений заданного расстояния) в n-подмножестве множества $\mathbb{R}^2$; наибольший размер подмножества множества $\mathbb{R}^2$, определяющего не более m расстояний;

– определение минимального диаметра n-подмножества множества $\mathbb{R}^2$ только с целочисленными расстояниями (или, скажем, без пары (d_1, d_2) расстояний с $0 < |d_1 - d_2| < 1$);

– существование n-подмножества множества $\mathbb{R}^2$, в котором расстояние i (для каждого $1 \le i \le n$) встречается точно i раз (примеры известны для $n \le 8$);

– определение *недопустимых расстояний* разбиения множества $\mathbb{R}^2$, т.е. расстояний, которые отсутствуют в каждой из частей.

Метрика городского квартала

Метрикой городского квартала называется **l_1-метрика** на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\|x-y\|_1=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|.$$

Данную метрику называют по-разному, например, **метрикой такси, метрикой Манхэттена, прямоугольной метрикой, метрикой прямого угла**; на $\mathbb{Z}^2$ ее называют **метрикой гриды** и **4-метрикой.**

Метрика Чебышева

Метрикой Чебышева называется l_∞-метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\|x-y\|_\infty - \max\{|x_1-y_1|,\ |x_2-y_2|\}.$$

Эту метрику называют также **равномерной метрикой, sup-метрикой и бокс-метрикой**; на $\mathbb{Z}^6$ она называется **метрикой решетки, метрикой шахматной доски, метрикой хода короля** и **8-метрикой.**

(*p, q*)-относительная метрика

Пусть $0 < q \le 1$, $p \ge \max\left\{1-q, \frac{2-q}{3}\right\}$ и пусть $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$).

(*p, q*)-относительная метрика есть метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$ и даже на любом *птолемеевом пространстве* $(V, \|\cdot\|)$), определенная как

$$\frac{\| x-y \|_2}{\left(\frac{1}{2}(\| x \|_2^p + \| y \|_2^p)\right)^{q/p}}$$

для x или $y \neq 0$ (и равная 0, иначе). В случае $p = \infty$ она принимает вид

$$\frac{\| x-y \|_2}{(\max \| x \|_2, \| y \|_2\})^q}.$$

Для q **= 1** и любого $1 \le p < \infty$ мы получаем ***p*-относительную метрику** (или *метрику Кламкина–Меира*); для $q = 1$ и $1 \le p < \infty$ получаем **относительную метрику.** (1,1)-метрика называется **метрикой Шатшнейдер.**

***M*-относительная метрика**

Пусть $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ – выпуклая возрастающая функция, такая что $\frac{f(x)}{x}$ убывает для $x > 0$. Пусть $\|\cdot\|_2$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$).

***M*-относительная метрика** есть метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$ и даже на любом *птолемеевом пространстве* $(V, \|\cdot\|)$), определенная как

$$\frac{\| x-y \|_2}{f(\| x \|_2) \cdot f(\| y \|_2)}.$$

В частности, расстояние

$$\frac{\| x-y \|_2}{\sqrt[p]{1+\| x \|_2^p}\sqrt[p]{1+\| y \|_2^p}}$$

является метрикой на $\mathbb{R}^2$ (на $\mathbb{R}^n$) тогда и только тогда, когда $p \ge 1$. Аналогичная метрика на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$) может быть определена как

$$\frac{\| x-y \|_2}{\| x \|_2 \cdot \| y \|_2}.$$

Московская метрика

Московская метрика (или **метрика Карлсруэ**) есть метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как минимальная евклидова длина всех *допустимых* кривых, соединяющих x и $y \in \mathbb{R}^2$, где кривая называется *допустимой,* если состоит только из отрезков прямых, проходящих через начало координат, и отрезков окружностей с центрами в начале координат (см., например, [Klei88]).

Если полярные координаты для точек x, $y \in \mathbb{R}^2$ равны соответственно (r_x, θ_x) и (r_y, θ_y), то расстояние между данными точками равно $\min\{r_x, r_y\}\Delta(\theta_x - \theta_y) + |r_x - r_y|$, если $0 \le \Delta(\theta_x, \theta_y) < 2$, и равно $r_x + r_y$,, если $2 \le \Delta(\theta_x, \theta_y) < \pi$, где $\Delta(\theta_x, \theta_y) = \min\{|\theta_x - \theta_y|, 2\pi - |\theta_x - \theta_y|\}$, $\theta_x, \theta_y \in [0, 2\pi)$ **есть метрика между углами.**

Метрика французского метро

Для *нормы* $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$ **метрикой французского метро** называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\| x - y \|,$$

если $x = cy$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$, и как

$$\| x \| + \| y \|,$$

иначе. Для евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$ она называется **парижской метрикой, метрикой ежа, радиальной метрикой** или **усиленной метрикой SNCF.** В этом случае она может быть определена как минимальная евклидова длина всех *допустимых* кривых между двумя данными точками x и y, где кривая называется *допустимой,* если состоит только из отрезков прямых, проходящих через начало координат.

В терминах графов эта метрика похожа на **метрику пути** дерева, состоящего из точки, откуда исходят несколько непересекающихся путей.

Парижская метрика – это пример $\mathbb{R}$**-дерева** T, которое является *симплициальным,* т.е. множество точек x, для которых множество $T - \{x\}$ состоит из одной компоненты, является дискретным и замкнутым.

Метрика лифта

Метрикой лифта (или **метрикой сборщика малины, метрической "рекой"**) называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$| x_1 - y_1 |,$$

если $x_2 = y_2$, и как

$$| x_1 | + | x_2 - y_2 | + | y_1 |,$$

если $x_2 \neq y_2$ (см., например, [Brya85]). Она может определяться как минимальная евклидова длина всех *допустимых* кривых, соединяющих две данные точки x и y, где кривая называется допустимой, если состоит только из отрезков прямых, параллельных оси x_1, и отрезков оси x_2.

Метрика лифта является примером *несимплициального* (см. **Метрика французского метро**) $\mathbb{R}$-дерева.

Метрика британской железной дороги

Для нормы $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$) **метрикой британской железной дороги** называется метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$), определенная как

$$\| x \| + \| y \|$$

для $x \neq y$ (и равная 0, иначе).

Ее называют также **метрикой почты, метрикой гусеницы** и **метрикой челнока**.

Метрика цветочного магазина

Пусть d – метрик на $\mathbb{R}^2$ и f – фиксированная точка (*цветочный магазин*) на плоскости.

Метрикой цветочного магазина (иногда ее называют **метрикой SNCF**) называется метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на любом метрическом пространстве), определенная как

$$d(x, f) + d(f, y)$$

для $x \neq y$ (и равная 0, иначе). Так, человек, живущий в точке x, который хочет посетить кого-то, живущего в точке y, сначала заходит в f, чтобы купить цветы. В случае если $d(x, f) = \| x - y \|$, а точка f является началом координат, мы получаем **метрику британской железной дороги**.

Если имеется $k > 1$ цветочных магазинов $f_1,\ldots, f_k$, то человек купит цветы в ближайшем магазине с минимальным отклонением от своего маршрута, т.е. расстояние между различными точками x, y равно $\min_{1 \le i \le k}(d(x, f_i) + d(f_i, y))$.

Метрика экрана радара

Для нормы $\| \cdot \|$ на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$) **метрикой экрана радара** называется метрика на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$), определенная как

$$\min\{1, \| x - y \|\}.$$

Метрика ковра Рикмана

Для числа $\alpha \in (0, 1)$ **метрикой ковра Рикмана** является метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\left| x_1 - y_1 \right| + \left| x_2 - y_2 \right|^{\alpha}.$$

Это является случаем $n = 2$ параболического расстояния (гл. 6; см. там же другие метрики на $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$).

Метрика Бурагро–Иванова

Метрикой Бурагро–Иванова ([BuIv01]) называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как

$$\left| \| x \|_2 - \| y \|_2 \right| + \min\left\{ \| x \|_2 \cdot \| y \|_2 \right\} \cdot \sqrt{\angle(x, y)},$$

где $\angle(x, y)$ – угол между векторами x и y и $\| \cdot \|$ – евклидова норма на $\mathbb{R}^2$. Соответствующая **внутренняя метрика** на $\mathbb{R}^2$ равна $\left| \| x \|_2 - \| y \|_2 \right|$, если $\angle(x, y) = 0$, и равна $\| x \|_2 - \| y \|_2$, иначе.

Метрика $2n$-угольника

Для центрально симметричного правильного $2n$-угольника K на плоскости **метрикой $2n$-угольника** называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ как наикратчайшая евклидова длина ломаной линии от x к y, каждое из звенье которой параллельна некоторому из ребер многоугольника K.

Если K есть прямоугольник с вершинами $\{(\pm 1, \pm 1)\}$, то мы получаем **метрику Манхэттена**. Метрику Манхэттена также можно рассматривать как **метрику Минковского** с единичным шаром в виде *бриллианта,* т.е. квадрата с вершинами $\{(1,0(0,1), (-1,0),(0,-1)\}$.

Метрика центрального парка

Метрикой центрального парка называется метрика на $\mathbb{R}^2$, определенная как длина наикратчайшего l_1-пути (*пути Манхэттена*) между двумя точками, $x, y \in \mathbb{R}^2$ при наличии данного множества зон, через которые проходят кратчайшие евклидовы пути (например, Центральный парк в Манхэттене).

Расстояние исключения столкновений

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся многоугольников на евклидовой плоскости, представляющее собой множество препятствий, которые являются одновременно непрозрачными и непроходимыми.

Расстоянием исключения столкновений (или **расстоянием носильщиков пианино, метрикой кратчайшего пути с препятствиями)** называется метрика на множестве $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbb{O}\}$, определенная для любых $x, y \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbb{O}\}$ как длина кратчайшего из всех возможных непрерывных путей, соединяющих x и y и не пересекающих препятствия $O_i\backslash\partial O_i$ (путь может проходить через точки на границе ∂O_i препятствия ∂O_i), $i = 1,\ldots,m$.

Прямоугольное расстояние с барьерами

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся открытых многоугольных барьеров на $\mathbb{R}^2$. *Прямоугольный путь* (*или путь Манхэттена*) P_{xy} от x к y есть совокупность горизонтальных и вертикальных отрезков на плоскости, соединяющих x и y. Путь P_{xy} называется *осуществляемым* если

$$P_{xy} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} B_i \right) = \emptyset .$$

Прямоугольное расстояние с барьерами (или *прямоугольное расстояние при наличии барьеров*) есть метрика на $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbb{O}\}$, определенная для любых $x, y \in \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbb{O}\}$ как длина *кратчайшего осуществимого прямоугольного пути* от x к y.

Прямоугольное расстояние с барьерами является сужением **метрики Манхэттена** и обычно рассматривается на множестве $\{q_1,\ldots,q_r\} \subset \mathbb{R}^2$ из n точек "отправитель-получатель": задача нахождения путей такого типа возникает, например, при организации транспортных перевозок в городских условиях, а также при планировке заводов и сооружений (см., например, [LaLi81]).

Расстояние связи

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ – *многоугольная область* (на n вершинах с h дырами), т.е. замкнутая многосвязная область, граница которой – объединение n линейных отрезков, образующих $n + 1$ замкнутых многоугольных циклов. **Расстоянием связи** называется метрика на P, определенная для любых $x, y \in P$ как минимальное число ребер многоугольного пути от x к y в пределах многоугольной области P.

Если разрешены только прямоугольные пути, мы получаем *прямоугольное расстояние связи.* Если пути C-ориентированы (т.е. каждое ребро параллельно одному из ребер множества C с заданной ориентацией), то мы имеем *C-ориентированное расстояние связи.*

Расстояния планировки сооружений

Планировка – это разбиение прямоугольной плоской области на прямоугольники меньшего размера, называемые *отделениями,* линиями, проходящими параллельно сторонам исходного прямоугольника. Все внутренние вершины должны быть трехвалентными, а некоторые из них, по крайней мере одна на границе каждого отделения, являются *дверями,* т.е. местами входа-выхода. Проблема заключается в создании подходящего представления о расстоянии $d(x, y)$ между отделениями x и y, которое минимизировало бы *функцию цены* $\sum_{x,y} F(x,y)d(x,y)$, где $F(x, y)$ – некий *материальный поток* между x и y. Основными используемыми для этого расстояниями являются:

– **расстояние центроида**, т.е. кратчайшее евклидово расстояние или расстояние **Манхэттена** между *центроидами* (пересечения диагоналей) x и y;

– **расстояние периметра**, т.е. кратчайшее прямоугольное расстояние между дверями x и y, проходящее только вдоль *стен,* т.е. периметров отделений.

Метрика быстрейшего пути

Метрика быстрейшего пути (или **метрика сети**) – метрика на $\mathbb{R}^2$ (или на подмножестве $\mathbb{R}^2$) при наличии данной *сети,* т.е. плоского взвешенного графа $G(V, E)$. Для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ это является временем *быстрейшего пути* между x и y в при наличии сети G, т.е. пути, максимально сокращающего время перемещения между x и y. После получения доступа в сеть G далее можно перемещаться с некоторой скоростью $v > 1$ вдоль ее ребер. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно заданной метрики d на плоскости (например, евклидовой метрики или **метрики Манхэттена**).

Метрика воздушных перевозок есть метрикой быстрейшего пути на $\mathbb{R}^2$ при наличии *сети аэропортов*, т.е. плоского графа $G(V, E)$ на n вершинах (*аэропортах*) с положительными весами ребер $(w_e)_{e\in E}$ (*время полета*). Войти и выйти из графа можно только через аэропорты. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно евклидовой метрики. Предполагается, что движение на автомобиле по времени равно метрике евклидова расстояния d_E, тогда как полет вдоль ребра $e = uv$ графа G займет время $w_e < d_E(u, v)$. В простейшем случае, когда осуществляется перевозка по воздуху между двумя точками $a, b \in \mathbb{R}^2$, расстояние между x и y равно

$$\min\{d_E(x, y), d_E(x, a) + w + d_E(b, y), d_E(x, b) + w + d_E(a, y)\},$$

где $w < d_2(a, b)$ есть продолжительность полета между a и b.

Метрика города – метрика быстрейшего пути на $\mathbb{R}^2$ при наличии *сети общественного транспорта*, т.е. плоского графа G с горизонтальными или вертикальными ребрами. G может состоять из многих связных компонент и содержать циклы. Каждый может попасть в G в любой точке, будь то вершина или ребро (возможно назначить также и строго фиксированные точки входа). Внутри G движение осуществляется с заданной скоростью $v > 1$ в одном из доступных направлений. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно **метрики Манхэттена** (в нашем случае подразумевается крупный современный город с прямоугольной планировкой улиц по направлениям север–юг и восток–запад).

Метрика метро – метрика быстрейшего пути на $\mathbb{R}^2$, которая является вариантом метрики города: метро (в виде линии на плоскости) используется для сокращения ходьбы пешком в пределах городской сетки координат.

Периодическая метрика

Метрика d на $\mathbb{R}^2$ называется **периодической,** если существуют два линейно независимых вектора v и u, такие что *перенос* по любому вектору $w = mv + nu, m, n \in \mathbb{Z}$ сохраняет расстояния, т.е. $d(x, y) = d(x + w, y + w)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$ (см. **Инвариантная метрика переноса**, гл. 5)

Правильная метрика

Метрика d на $\mathbb{R}^2$ называется **правильной,** если обладает следующими свойствами:

1) d порождает евклидову топологию;

2) d-окружности ограничены относительно евклидовой метрики;

3) если $x, y \in \mathbb{R}^2$ и $x \neq y$, то существует точка $z, z \neq x, z \neq y,$ такая что выполняется равенство $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$;

4) если $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \prec y$ (где $\prec$ фиксированный порядок на $\mathbb{R}^2$, например, лексикографический порядок), $C(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(x, z) \leq d(y, z)\}$, $D(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^2 : d(x,$

$z) < d(y,z)\}$ и $\overline{D(x,y)}$ – замыкание $D(x,y)$, то $J(x,y) = C(x,y) \cap \overline{D(x,y)}$ есть кривая, гомеоморфная (0,1). Пересечение двух таких кривых состоит из конечного числа многих связных компонент.

Каждая **метрика нормы** имеет свойства 1., 2. и 3. Свойство 2. означает, что метрика d является непрерывной в бесконечности относительно евклидовой метрики. Свойством 4. обеспечивается, что границы соответствующих диаграмм *Вороного* являются кривыми и что не слишком много пересечений существует в окрестности точки или в бесконечности. Правильная метрика d имеет *правильную диаграмму Вороного*: в диаграмме Вороного $V(P,d,\mathbb{R}^2)$ (где $P = \{p_1,\ldots,p_k\}, k \geq 2$ – множество генераторов) каждая *область Вороного* $V(p_i)$ является путь-связным множеством с непустой внутренностью, а система $\{V(p_i),\ldots,V(p_k)\}$ образует *разбиение* плоскости.

Квазирасстояния контакта

Квазирасстояния контакта представляют собой следующие варианты **выпуклой функции расстояния** (см. гл. 1), определенной на $\mathbb{R}^2$ (в общем случае на $\mathbb{R}^n$).

Для множества $B \subset \mathbb{R}^2$ **квазирасстояние первого контакта** d_B определяется как

$$\inf\{\alpha > 0 : y - x \in \alpha B\}$$

(см. **Расстояния сети сенсорных датчиков,** гл. 28).

Более того, для точки $b \in B$ и множества $A \subset \mathbb{R}^2$ квазирасстоянием **линейного контакта называется расстояние между точкой и множеством**, определенное как $d_b(x,A) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha b + x \in A\}$.

Квазирасстояние перехвата для конечного множества B определяется как $\dfrac{\sum_{b \in B} d_b(x,y)}{|B|}$.

Дальность распознавания радара

Дальность распознавания радара – расстояние на $\mathbb{R}^2$, определенное как

$$|\rho_x - \rho_y + \theta_{xy}|,$$

если $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, и как

$$|\rho_x - \rho_y|,$$

если $x = 0$ или $y = 0$, где для каждой "локации" $x \in \mathbb{R}^2$ ρ_x – радиальное расстояние x от начала координат, и для любых $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ θ_{xy} – угол между ними (в радианах)ю

Полуметрика Эренфёхта–Хауслера

Пусть S – будет подмножество $\mathbb{R}^2$, так что $x_1 \geq x_2 - 1 \geq 0$ для любого $x \in S$.

Полуметрика **Эренфёхта–Хауслера** ([EhHa88]) на S определяется как

$$\log_2\left(\left(\frac{x_1}{y_2}+1\right)\left(\frac{y_1}{x_2+1}\right)\right).$$

Тороидальная метрика

Тороидальная метрика – метрика на теле $T = [0,1)\times[0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1, x_2 < 1\}$, определенная как

$$\sqrt{t_1^2 + t_2^2}$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, где $t_i = \min\{|x_i - y_i|, |x_i - y_i + 1|\}$ для $i = 1,2$ (см. **Метрика тора**).

Метрика окружности

Метрика окружности – внутренняя метрика на *единичной окружности* S^1 круге на плоскости. Поскольку $S^1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} : 0 \le \theta < 2\pi\}$, эта метрика длиной кратчайшей из двух дуг, соединяющих точки $e^{i\theta}$, $e^{i\vartheta} \in S^1$, и может быть записана как

$$\min\{|\theta - \vartheta|, 2\pi - |\theta - \vartheta|\} = \begin{cases} |\theta - \vartheta|, & \text{если } 0 \le |\theta - \vartheta| \le \pi, \\ 2\pi - |\vartheta - \theta|, & \text{если } |\vartheta - \theta| > \pi \end{cases}$$

(см. **Метрика между углами**).

Угловое расстояние

Угловое расстояние по окружности круга является числом радиан, пройденных путем, т.е.

$$\theta = \frac{l}{r},$$

где l – длина пути и r – радиус окружности.

Метрика между углами

Метрикой между углами Λ называется метрика на множестве всех углов плоскости, определенная как

$$\min\{|\theta - \vartheta|, 2\pi - |\theta - \vartheta|\} = \begin{cases} |\vartheta - \theta|, & \text{если } 0 \le |\vartheta - \theta| \le \pi, \\ 2\pi - |\vartheta - \theta|, & \text{если } |\vartheta - \theta| > \pi \end{cases}$$

для любых θ, $\vartheta \in [0, 2\pi)$ (см. **Метрика круга**).

Метрика между направлениями

На плоскости $\mathbb{R}^2$ *направление* $\hat{l}$ есть класс всех прямых, параллельных данной прямой $l \subset \mathbb{R}^2$. **Метрикой между направлениями** называется метрика на множестве $\mathcal{L}$ всех направлений плоскости, определенная для любых направлений $\hat{l}, \hat{m} \in \mathcal{L}$ как угол между любыми двумя их представителями.

Квазиметрика кольцевой железной дороги

Квазиметрикой кольцевой железной дороги называется квазиметрика на *единичной окружности* $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, определенная для любых $x,y \in S^1$ как длина дуги окружности против часовой стрелки от x к y.

Инверсивное расстояние

Инверсивное расстояние между двумя непересекающимися кругами на плоскости определяется как натуральный логарифм частного радиусов (большего и мень-

шего) двух концентрических кругов, в которые данные круги могут быть инверсированы.

Пусть c – расстояние между центрами двух непересекающихся кругов с радиусами a и $в$, $b < a$. Тогда их инверсивное расстояние задается как

$$\cosh^{-1}\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right|.$$

Описанная окружность и *вписанная окружность* треугольника с радиусом описанной окружности R и радиусом вписанной окружности находятся на инверсивном расстоянии $2\sinh^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}}\right)$.

Имея три неколлинеарных точки, построим три попарно касающиеся окружности с центрами в указанных точках. В этом случае существуют точно две непересекающиеся окружности, которые являются касательными для всех трех окружностей. Они называются внутренним и наружным *кругами Содди*. Инверсивное расстояние между кругами Содди равно $2\cosh^{-1}2$.

19.2. МЕТРИКИ НА ЦИФРОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Ниже перечисляются метрики, которые применяются в *компьютерном зрении* (или *распознавании образов, системах технического зрения робота, цифровой геометрии*).

Машинное изображение (или *компьютерное изображение*) – подмножество $\mathbb{Z}^n$, называемого *цифровым nD пространством*. Обычно изображения представляются на *цифровой плоскости* (или *плоскости образов*) $\mathbb{Z}^2$ или в *цифровом пространстве* (или *пространстве образов*) $\mathbb{Z}^3$. Точки $\mathbb{Z}^n$ называются *пикселями*. Цифровое *nD m-квантованное пространство* есть шкалированное пространство $\frac{1}{m}\mathbb{Z}^n$.

Цифровая метрика (см., например, [RoPf68]) – любая метрика на цифровом *nD* пространстве. Обычно она целочисленна.

Основными используемыми метриками на $\mathbb{Z}^n$ являются l_1- и l_∞**-метрики**, а также l_2**-метрика**, округленные до ближайшего справа (или слева) целого. В общем случае, если задать перечень *соседней* пикселя, то метрику можно рассматривать как перечень *пошаговых движений* на $\mathbb{Z}^2$. Сопоставим **простое расстояние**, т.е. положительный вес, каждому типу таких движений. Теперь многие цифровые метрики можно получить как минимум (по всем возможным *путям*, т.е. последовательностям допустимых движений) суммы соответствующих простых расстояний.

На практике вместо полного пространства $\mathbb{Z}^n$ рассматривается подмножество $(\mathbb{Z}_m)^n = \{0,1,\ldots,m-1\}^n$. $(\mathbb{Z}_m)^2$ и $(\mathbb{Z}_m)^3$ называются соответственно *m-грилем* и *m-стеллажом* структурой. Наиболее часто используемыми метриками на $(\mathbb{Z}_m)^n$ являются **хэммингова метрика** и **метрика Ли.**

Метрика гриды

Метрикой гриды называется l_1**-метрика** на $\mathbb{Z}^n$. l_1-метрику на $\mathbb{Z}^n$ можно рассматривать как **метрику пути** бесконечного графа: две точки $\mathbb{Z}^n$ являются смежными, если их l_1-расстояние равно единице. Для $\mathbb{Z}^2$ данный граф является обычной

гридой (*сеткой координат*). Поскольку каждая точка имеет точно четыре ближайших соседа в $\mathbb{Z}^2$ для l_1-метрики, то ее называют также **4-метрикой**.

Для $n = 2$ данная метрика является сужением на $\mathbb{Z}^2$ **метрики городского квартала**, которую называют также **метрикой такси, прямоугольной метрикой** или **метрикой Манхэттена**.

Метрика решетки

Метрикой решетки называется l_∞**-метрика** на $\mathbb{Z}^n$. l_∞-метрику на $\mathbb{Z}^n$ можно рассматривать как **метрику пути** бесконечного графа: две точки $\mathbb{Z}^n$ являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице. Для $\mathbb{Z}^2$ смежность соответствует ходу короля, в терминах шахмат, и такой граф называется l_∞-*гридой*, а сама метрика называется также **метрикой шахматной доски, метрикой хода короля** или **метрикой короля**. Так как каждая точка имеет точно восемь ближайших соседей в $\mathbb{Z}^2$ для l_∞-метрики, она называется также **8-метрикой**.

Данная метрика является сужением на $\mathbb{Z}^n$ **метрики Чебышева**, которую также называют **sup метрикой** или **равномерной метрикой**.

Шестиугольная метрика

Шестиугольной метрикой называется метрика на $\mathbb{Z}^2$ с *единичной сферой* $S^1(x)$ (с центром в точке $x \in \mathbb{Z}^2$), определенной как $S^1(x) = S^1_{l_1}(x) \cup \{(x_1 - 1, x_2 - 1), (x_1 - 1, x_2 + 1)\}$ для x *четного* (т.е. с четным x_2) и как $S^1(x) = S^1_{l_1}(x) \cup \{(x_1 + 1, x_2 - 1), (x_1 + 1, x_2 + 1)\}$ для x нечетного (т.е. с нечетным x_2). Поскольку любая единичная сфера $S^1(x)$ содержит точно шесть целочисленных точек, шестиугольная метрика называется также **6-метрикой** ([LuRo76]).

Для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ она может быть записана как

$$\max\left\{|u_2|, \frac{1}{2}(|u_2| + u_2) + \left\lfloor \frac{x_2 + 1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y_2 + 1}{2} \right\rfloor - u_1, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}(|u_2| - u_2) - \left\lfloor \frac{x_2 + 1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y_2 + 1}{2} \right\rfloor + u_1 \right\}.$$

где $u_1 = x_1 - y_1$ и $u_2 = x_2 - y_2$.

Шестиугольная метрика может быть определена как **метрика пути** на *шестиугольной гриде* плоскости. В *шестиугольных координатах* (h_1, h_2) (где h_1- и h_2-оси параллельны ребрам гриды) шестиугольное расстояние между точками (h_1, h_2) и (i_1, i_2) можно записать как $|h_1 - i_1| + |h_2 - i_2|$, если $(h_1 - i_1)(h_2 - i_2) \geq 0$, и как $\max\{|h_1 - i_1|, |h_2 - i_2|\}$, если $(h_1 - i_1)(h_2 - i_2) \leq 0$. Здесь шестиугольные координаты (h_1, h_2) точки x соотносятся с их прямоугольными декартовыми координатами (x_1, x_2) как $h_1 = x_1 - \left\lfloor \frac{x_2}{2} \right\rfloor$, $h_2 = x_2$ для x четного и как $h_1 - = x_1 - \left\lfloor \frac{x_2 + 1}{2} \right\rfloor$, $h_2 = x_2$ для x нечетного.

Шестиугольная метрика является лучшей, чем l_1**-метрика** или l_∞**-метрика**, аппроксимацией евклидовой метрики.

Метрика последовательности соседства

На цифровой плоскости $\mathbb{Z}^2$ рассмотрим два типа движений: *движение городского квартала*, где разрешены только горизонтальные или вертикальные направления,

и *движение шахматной доски*, где разрешаются также перемещения по диагонали. Использование двух этих типов движений определяется *последовательностью соседства* $B = \{b(1), b(2), \ldots, b(l)\}$, где $b(i) \in \{1, 2\}$ является специальным типом соседства: $b(i) = 1$ обозначает изменение объекта в одной координате (*соседство городского квартала*), а $b(i) = 2$ обозначает изменение объекта также в двух координатах (*соседство шахматной доски*). Последовательность B определяет тип движения, которое будет применяться на каждом этапе (см. [Das90]).

Метрика последовательности соседства – метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как длина кратчайшего пути между x и $y \in \mathbb{Z}^2$, задаваемого конкретной последовательностью соседства B. Ее можно записать как

$$\max\{d_B^1(u), d_B^2(u)\},$$

где $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$, $d_B^1(u) = \max\{|u_1|, |u_2|\}$, $d_B^2(u) = \sum_{j=1}^{l} \left\lfloor \frac{|u_1| + |u_2| + g(j)}{f(l)} \right\rfloor$,

$f(0) = 0$, $f(i) \sum_{j=1}^{i} b(j)$, $1 \le i \le l$, $g(j) = f(l) - f(j-1) - 1$, $1 \le j \le l$.

Для $B = \{1\}$ получаем **метрику городского квартала,** для $B = \{2\}$ получаем **метрику шахматной доски.** Случай $B = \{1, 2\}$, т.е. альтернативное использование этих передвижений, дает **восьмиугольную метрику** (см. [RoPf68]).

Правильный выбор B-последовательности может подвести соответствующую метрику весьма близко к евклидовой метрике. Она всегда больше, чем расстояние шахматной доски, но меньше, чем расстояние городского квартала.

Метрика последовательности *nD*-соседства

Метрикой последовательности *nD*-соседства называется метрика на $\mathbb{Z}^n$, определенная как длина кратчайшего пути между x и $y \in \mathbb{Z}^n$, задаваемого *последовательностью nD*-соседства B (см. [Faze99]).

Формально две точки $x, y \in \mathbb{Z}^n$ называются *m-соседями,* $0 \le m \le n$, если $0 \le |x_i - y_1| \le 1$, $1 \le i \le n$, и $\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \le m$. Конечная последовательность $B = \{b(1), \ldots, b(l)\}$, $b(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ называется *последовательностью nD-соседства с периодом l*. Для любых $x, y \in \mathbb{Z}^n$ последовательность точек $x = x^0, x^1, \ldots, x^k = y$, где x^i и x^{i+1}, $0 \le i \le k-1$ являются r-соседями, $r = b((i \bmod l)+1)$, называется *путем длины R* от x к y, *заданным с помощью B*. Расстояние между x и y можно записать как

$$\max_{1 \le i \le n} d_i(u) \subset d_i(u) = \sum_{j=1}^{l} \left\lfloor \frac{a_i + g_i(j)}{f_i(l)} \right\rfloor,$$

где $u = (|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|)$ является невозрастающей упорядоченностью $|u_m|$, $u_m = x_m - y_m$, $m = 1, \ldots, n$, т.е. $|u_i| \le |u_j|$, если $i < j$; $a_i = \sum_{j=1}^{n-i+1} u_j$; $b_i(j) = b(j)$, если $b(j) < n - i + 2$, и равно $n - i + 1$,, иначе; $f_i(j) = \sum_{k=1}^{j} b_i(k)$, если $1 \le j \le l$, и равно 0, если $j = 0$; $g_i(j) = f_1(l) - f_i(j-1) - 1, 1 \le j \le l$.

Множество метрик последовательности 3*D*-соседства образует полную дистрибутивную решетку относительно естественного сравнения. Данная структура играет важную роль в аппроксимировании евклидовой метрики цифровыми метриками.

Метрика, порожденная путем

Рассмотрим l_∞-*гриду*, т.е. граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, в котором две вершины являются *соседними,* если их l_∞-расстояние равно единице. Пусть $\mathcal{P}$ – совокупность путей в l_∞-гриде, такая что для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ существует по крайней мере один путь из $\mathcal{P}$ между x и y, и $\mathcal{P}$ если содержит путь Q, то она также содержит каждый путь, содержащийся в Q. Пусть $d_{\mathcal{P}}(x,y)$ – длина кратчайшего пути из $\mathcal{P}$ между x и $y \in \mathbb{Z}^2$. Если $d_{\mathcal{P}}$ является метрикой на $\mathbb{Z}^2$, то она называется **метрикой, порожденной путем** (см., например, [Melt91]).

Пусть G – одно из множеств $G_1 = \{\uparrow, \rightarrow\}$, $G_{2A} = \{\uparrow, \nearrow\}$, $G_{2B} = \{\uparrow, \nwarrow\}$, $G_{2C} = \{\nearrow, \nwarrow\}$, $G_{2D} = \{\rightarrow, \nwarrow\}$, $G_{3A} = \{\rightarrow, \uparrow, \nearrow\}$, $G_{3B} = \{\rightarrow, \uparrow, \nwarrow\}$, $G_{4A} = \{\rightarrow, \nearrow, \nwarrow\}$, $G_{4B} = \{\uparrow, \nearrow, \nwarrow\}$, $G_5 = \{\rightarrow, \uparrow, \nearrow, \nwarrow\}$. Пусть $\mathcal{P}(G)$ – множество путей, полученных посредством сочленения путей в G и соответствующих путей в противоположных направлениях. Любая метрика, порожденная путем, совпадает с одной из метрик $d_{\mathcal{P}(G)}$. Более того, имеют место следующие формулы:

1. $d_{\mathcal{P}(G_1)}(x,y) = |u_1| + |u_2|$;
2. $d_{\mathcal{P}(G_{2A})}(x,y) = \{|2u_1 - u_2|, |u_2|\}$;
3. $d_{\mathcal{P}(G_{2B})}(x,y) = \max\{|2u_1 - u_2|, |u_2|\}$;
4. $d_{\mathcal{P}(G_{2C})}(x,y) = \max\{|2u_2 - u_1|, |u_1|\}$;
5. $d_{\mathcal{P}(G_{2D})}(x,y) = \max\{|2u_2 - u_1|, |u_1|\}$;
6. $d_{\mathcal{P}(G_{3A})}(x,y) = \max\{|u_1|, |u_2|, |u_1 - u_2|\}$;
7. $d_{\mathcal{P}(G_{3B})}(x,y) = \max\{|u_1|, |u_2|, |u_1 + u_2|\}$;
8. $d_{\mathcal{P}(G_{4A})}(x,y) = \max\left\{2\left\lceil (|u_1| - |u_2|)/2 \right\rceil, 0\right\} + |u_2|$;
9. $d_{\mathcal{P}(G_{4B})}(x,y) = \max\left\{2\left\lceil (|u_2| - |u_1|)/2 \right\rceil, 0\right\} + |u_1|$;
10. $d_{\mathcal{P}(G_5)}(x,y) = \max\{|u_1|, |u_2|\}$;

где $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$, а $\lceil \cdot \rceil$ является *потолочной функцией*: для любого действительного x число является $\lceil x \rceil$ наименьшим целым числом, которое больше или равно x.

Полученные из G-множеств метрические пространства, имеющие одинаковые цифровые индексы, являются изометричными. $d_{\mathcal{P}(G_1)}$ есть **метрика городского квартала**, а $d_{\mathcal{P}(G_5)}$ – **метрика шахматной доски**.

Метрика коня

Метрикой коня называется метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как минимальное число ходов, которые понадобится сделать шахматному коню для перемещения из x в $\mathbb{Z}^2$. Ее *единичная сфера* S^1_{knight} с центром в начале координат содержит ровно 8 цело-

численных точек $\{(\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)\}$ и может быть записана как $S^1_{\text{knight}} = S^3_{l_1} \cap S^2_{l_\infty}$, где $S^3_{l_1}$ есть l_1-сфера радиуса 3 и $S^2_{l_\infty}$ есть l_∞-сфера радиуса 2 и центром в начале координат ([DaCh88]).

Расстояние между x и y равно 3, если $(M, m) = (1, 0)$, равно 4, если $(M, m) = (2, 2)$, и равно $\max\left\{\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M+m}{3} \right\rceil\right\} + (M+m) - \max\left\{\left\lceil \frac{M}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{M+m}{3} \right\rceil\right\} \pmod 2$, иначе, где $M = \max\{|u_1|, |u_2|\}$, $m = \min\{|u_1|, |u_2|\}$, $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$.

Метрика супер-коня

Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, причем $p + q$ четно и $(p, q) = 1$.

(p, q)-*супер-конь* (или (p, q)-*прыгун*) есть фигура обобщенных шахмат, ход которой состоит из прыжка на p клеток в одном направлении и последующего ортогонального прыжка на q клеток в заданную конечную клетку. Термины обобщенных шахмат существуют для $(p, 1)$-прыгуна с $p = 0,1,2,3,4$ (*визирь, ферзь, обычный конь, верблюд, жираф*) и для $(p, 2)$-прыгуна с $p = 0,1,2,3$ (*даббаба, обычный конь, алфил, зебра*).

Метрика **(p, q)-супер-коня** (или *метрика* (p, q)-*прыгуна*) – метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как минимальное число ходов, которое понадобится (p, q)-супер-коню для перемещения из x в $y \in \mathbb{Z}^2$. Таким образом, ее *единичная сфера* $S^1_{p,q}$ с центром в начале координат содержит ровно 8 целочисленных точек $\{(\pm p, \pm q), (\pm q, \pm p)\}$ ([DaMu90].)

Метрика коня – метрика (1,2)-супер-коня. Метрику городского квартала можно рассматривать как *метрику визиря*, т.е. метрику (0,1)-супер-коня.

Метрика ладьи

Метрикой ладьи называется метрика на $\mathbb{Z}^2$, определенная как минимальное число ходов, которые понадобится сделать шахматной ладье для перемещения из x в $y \in \mathbb{Z}^2$. Данная метрика имеет только значения $\{0,1,2\}$ и совпадет с **хэмминговой метрикой** на $\mathbb{Z}^2$.

Метрика скругления

Возьмем два положительных числа α, β с $\alpha \le \beta < 2$ и рассмотрим (α,β)-*взвешенную l_∞-гриду координат,* т.е. бесконечный граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, две вершины которого являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице, причем горизонтальные/вертикальные и диагональные ребра имеют *веса* α и β соответственно.

Метрикой скругления (или *метрикой* (α, β)-*скругления*, см. [Borg86]) называется **метрика взвешенного пути** в вышеуказанном графе. Для любых $x, y \in \mathbb{Z}^2$ она может быть записана как

$$\beta m + \alpha(M - m),$$

где $M = \max\{|u_1|, |u_2|\}$, $m = \min\{|u_1|, |u_2|\}$, $u_1 = x_1 - y_1$, $u_2 = x_2 - y_2$.

Если веса α и β равны евклидовым длинам 1, $\sqrt{2}$ горизонтальных/вертикальных и диагональных ребер соответственно, то получаем евклидову длину кратчайшего пути шахматной доски между x и y. Если $\alpha = \beta = 1$, то имеем **метрику шахматной доски**. Метрика (3, 4)-скругления наиболее часто используется для работы с цифровыми образами; она называется просто **(3, 4)-метрикой**.

Метрика 3*D*-скругления – метрика взвешенного пути графа с множеством вершин $\mathbb{Z}^3$ вокселей, два из которых являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице, причем веса α, β и γ связаны соответственно с расстояниями от 6 граневых соседей, 12 реберных соседей и 8 угловых соседей.

Метрика взвешенного разреза

Рассмотрим *взвешенную l_∞-гриду*, т.е. граф с множеством вершин $\mathbb{Z}^2$, две из которых являются смежными, если их l_∞-расстояние равно единице, и каждое ребро имеет заданный положительный *вес* (или *цену*). Обычная **метрика взвешенного пути** между двумя пикселями является минимальной ценой соединяющего их пути. **Метрикой взвешенного разреза** между двумя пикселями называется минимальная цена (определенная сейчас как сумма цен пересекаемых ребер) *разреза,* т.е. кривой в плоскости, соединяющей их и обходящей пиксели.

Метрика цифрового объема

Метрикой цифрового объема называется метрика на множестве K всех ограниченных подмножеств (*изображений* или *образов*) множества $\mathbb{Z}^2$ (в общем случае $\mathbb{Z}^n$), определенная как

$$\mathrm{vol}(A \Delta B),$$

где $\mathrm{vol}(A) = |A|$, т.е. число содержащихся в A пикселей, и $A \Delta B$ – *симметрическая разность* между множествами A и B.

Данная метрика – цифровой аналог **метрики Никодима**.

Шестиугольная хаусдорфова метрика

Шестиугольная хаусдорфова метрика есть метрика на множестве всех ограниченных подмножеств (*изображений* или *образов*) *шестиугольной гриды* на плоскости, определенная как

$$\inf\{p, q : A \subset B + qH,\ \ D \subset A + pH\}$$

для любых изображений A и B, где pH – *правильный шестиугольник размера* p (т.е. с $p + 1$ пикселем на каждом ребре) с центром в начале координат, содержащий свою внутренность, и $+$ является *сложением Минковского*: $A + B = \{y + y : x \in A,\ y \in B\}$ (см. **Метрика Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке,** гл. 9). Если A является пикселем x, то расстояние между x и B равно $\sup_{y \in B} d_6(x, y)$, где d_6 – **шестиугольная метрика**, т.е. **метрика пути** на шестиугольной гриде.

Глава 20

РАССТОЯНИЯ ДИАГРАММ ВОРОНОГО

Для конечного множества A объектов A_i в пространстве S построение *диаграммы Вороного* множества A означает разбиение пространства S на *области Вороного* $V(A_i)$ таким образом, чтобы $V(A_i)$ содержали все точки S, которые расположены "ближе" к A_i, чем к любому другому объекту A_j из A.

Для порождающего множества $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2$, различных точек (*порождающих элементов*), *или генераторов* из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *стандартный многоугольник Вороного* $V(p_i)$, связанный с порождающим элементом p_i, определяется как

$$V(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_E(x, p_i) \leq d_E(x, p_j) \quad \text{для любого } j \neq i\},$$

где d_E – обычное евклидово расстояние на $\mathbb{R}^n$. Множество

$$V(P, d_E, \mathbb{R}^n) = \{V(p_1), \ldots, V(p_k)\}$$

называется *n-мерной стандартной диаграммой Вороного, порождаемой* P. Границы (n-мерных) многоугольников Вороного называются ((n–1)-мерными) *гранями Вороного*, границы граней Вороного называются (n–2)-*мерными гранями Вороного*, …, границы двумерных граней Вороного называются *ребрами Вороного*, границы ребер – *вершинами Вороного.*

Обобщение стандартной диаграммы Вороного возможно в следующих трех направлениях:

1. Обобщение в смысле порождающего множества $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, которое может быть множеством прямых, множеством областей и т.п.

2. Обобщение в смысле пространства, которое может быть сферой (*сферическая диаграмма Вороного*), цилиндром (*цилиндрическая диаграмма Вороного*), конусом (*коническая диаграмма Вороного*), поверхностью многогранника (*диаграмма многогранника Вороного*) и т.п.

3. Обобщение в смысле функции d, где $d(x, A)$ является мерой "расстояния" от точки $x \in S$ до порождающего элемента $A_i \in A$.

Такая функция обобщенного расстояния d называется **порождающим расстоянием Вороного** (или *расстоянием Вороного, V-расстоянием*) и позволяет получить много других функций, кроме обычной метрики на S. Если F является строго возрастающей функцией V-расстояния d, т.е. $F(d(x, A_i)) \leq F(d(x, A_j))$ тогда и только тогда, когда $d(x, A_i) \leq d(x, A_j)$, то обобщенные диаграммы Вороного $V(A, F(d), S)$ и $V(A, d, S)$ совпадают и говорят, что V-расстояние $F(d)$ является *трансформируемым* в V-расстояние d, и что обобщенная диаграмма Вороного $V(A, F(d), S)$ является *тривиальным обобщением* обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d, S)$. В приложениях для тривиального обобщения стандартной диаграммы Вороного $V(P, d, \mathbb{R}^n)$ часто пользуются **экспоненциальным расстоянием, логарифмическим расстоянием** и **степенным расстоянием**. Существуют обобщенные диаграммы

Вороного $V(P, d, \mathbb{R}^n)$, определенные с помощью V-расстояний, которые не являются *трансформируемыми* к евклидову расстоянию d_E: **мультипликативно взвешенное расстояние Вороного, аддитивно взвешенное расстояние Вороного** и т.п.

Дополнительные сведения по этой тематике можно найти в [OBS92], [Klei89].

20.1. КЛАССИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ ВОРОНОГО

Экспоненциальное расстояние

Экспоненциальное расстояние – порождающее расстояние Вороного

$$D_{\exp}(x, p_i) = \mathrm{e}^{d_E(x, p_i)}$$

для тривиального обобщения $V(P, D_{\exp}, \mathbb{R}^n)$ стандартной диаграммы Вороного $V(P, d_E, \mathbb{R}^n)$, где d_E – евклидово расстояние.

Логарифмическое расстояние

Логарифмическое расстояние – порождающее расстояние Вороного

$$D_{\ln}(x, p_i) = \ln d_E(x, p_i)$$

для тривиального обобщения $V(P, D_{\ln}, \mathbb{R}^n)$ стандартной диаграммы Вороного $V(P, d_E, \mathbb{R}^n)$, где d_E – евклидово расстояние.

Степенное расстояние

Степенное расстояние – порождающее расстояние Вороного

$$D_{\alpha}(x, p_i) = d_E(x, p_i)^{\alpha}, \ \alpha > 0,$$

для тривиального обобщения $V(P, D_{\alpha}, \mathbb{R}^n)$ стандартной диаграммы Вороного $V(P, d_E, \mathbb{R}^n)$, где d_E – евклидово расстояние.

Мультипликативно взвешенное расстояние

Мультипликативно взвешенное расстояние d_{MW} – порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{MW}, \mathbb{R}^n)$ (*мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного*), определенное как

$$d_{MW}(x, p_i) = \frac{1}{w_i} d_E(x, p_i)$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2$, где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный положительный *мультипликативный вес* порождающего элемента p_i и d_E – обычное евклидово расстояние.

Для $\mathbb{R}^2$ мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного называется *круговой упаковской Дирихле*. Ребром этой диаграммы является дуга окружности или прямая.

В плоскости $\mathbb{R}^2$ существует обобщение мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного, *кристаллическая диаграмма Вороного*, с тем же определением расстояния (где w_i – скорость роста кристалла p_i), но отличающимся разбие-

нием плоскости, поскольку кристаллы могут расти только на свободном пространстве.

Аддитивно взвешенное расстояние

Аддитивно взвешенное расстояние d_{MW} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{AW}, \mathbb{R}^n)$ (*аддитивно взвешенная диаграмма Вороного*), определенное как

$$d_{AW}(x, p_i) = d_E(x, p_i) - w_i$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\},$, $k \geq 2,$ где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный *аддитивный вес* порождающего элемента p_i, и d_E – обычное евклидово расстояние.

Для $\mathbb{R}^2$ аддитивно взвешенная диаграмма Вороного называется *гиперболической упаковкой Дирихле*. Ребром этой диаграммы является дуга гиперболы или отрезок прямой.

Аддитивно взвешенное степенное расстояние

Аддитивно взвешенное степенное расстояние d_{PW} – порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{PW}, \mathbb{R}^n)$ (*аддитивно взвешенная степенная диаграмма Вороного*), определенное как

$$d_{PW}(x, p_i) = d_E^2(x, p_i) - w_i$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2,$ где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный *аддитивный вес* порождающего элемента, p_i, и d_E – обычное евклидово расстояние.

Эта диаграмма может рассматриваться как диаграмма кругов Вороного или диаграмма Вороного с *геометрией Лагерра*.

Мультипликативно взвешенное степенное расстояние $d_{MPW}(x, p_i) = \frac{1}{w_i} d_E^2(x, p_i),$ $w_i > 0,$ трансформируется в **мультипликативно взвешенное расстояние** и дает тривиальное расширение мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного.

Комбинировано взвешенное расстояние

Комбинированно взвешенным расстоянием d_{CW} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{CW}, \mathbb{R}^n)$ (*комбинированно взвешенной диаграммы Вороного*), определенное как

$$d_{CW}(x, p_i) = \frac{1}{w_i} d_E(x, p_i) - v_i$$

для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и любого порождающего элемента $p_i \in P = \{p_i, \ldots, p_k\}$, $k \geq 2,$ где $w_i \in w = \{w_i, \ldots, w_k\}$ – заданный положительный *мультипликативный вес* порождающего элемента p_i, $v_i \in v = \{v_i, \ldots, v_k\}$ – заданный *аддитивный вес* порождающего элемента p_i, и d_E – обычное евклидово расстояние.

Ребром двумерной комбинированно взвешенной диаграммы Вороного является часть кривой четвертого порядка, гиперболическая дуга, дуга окружности или прямая.

20.2. РАССТОЯНИЯ ВОРОНОГО НА ПЛОСКОСТИ

Расстояние кратчайшего пути с препятствиями

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся многоугольников на евклидовой плоскости, представляющая собой множество препятствий, которые являются непрозрачными и непреодолимыми.

Расстоянием кратчайшего пути с препятствиями d_{sp} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{sp}, \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\})$ (*диаграммы кратчайшего пути Вороного с препятствиями*), определенное для любых $x, y \in \mathbb{R}^2\setminus\{\mathbb{O}\}$ как длина кратчайшего из всех возможных непрерывных путей, соединяющих x и y и при этом обходящих препятствия $O_i\setminus\partial O_i$ (путь может проходить через точки на границе O_i препятствия O_i), $i = 1,\ldots,m$.

Кратчайший путь строится с помощью *многоугольника видимости* и *графа видимости диаграммы* $V(P, d_{sp}, \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\})$.

Расстояние видимого кратчайшего пути

Пусть $\mathbb{O} = \{O_1,\ldots,O_m\}$ – совокупность попарно непересекающихся отрезков $O_l = = [a_l, b_l]$ на евклидовой плоскости, $P = \{p_1,\ldots,p_k\}$, $k \geq 2$ – множество порождающих элементов,

$$VIS(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : [x, p_i] \cap]a_l, b_l[= \emptyset \quad \text{для всех } l = 1,\ldots,m\}$$

– *многоугольник видимости* образующего элемента p_i, а d_E – обычное евклидово расстояние.

Расстоянием видимого кратчайшего пути d_{vsp} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{vsp}, \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbb{O}\})$ (*диаграмма видимого кратчайшего пути Вороного с препятствиями*), определенное как

$$d_{vsp}(x, p_i) = \begin{cases} d_E(x, p_i), & \text{если } x \in VIS(p_i), \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расстояние сети

Сеть на $\mathbb{R}^2$ есть связный плоский геометрический граф $G = (V, E)$ с множеством V вершин и множеством E ребер.

Пусть порождающее множество $P = (p_i,\ldots, p_k)$ является подмножеством множества $V = (p_1,\ldots, p_l)$ вершин графа G и множество L задается как множество всех точек ребер графа G.

Расстояние сети d_{netv} на множестве V есть порождающее расстояние Вороного *диаграммы Вороного узлов сети* $V(P, d_{\text{netv}}, V)$, определенное как кратчайший путь вдоль ребер графа G от $p_i \in V$ до $p_j \in V$. Оно является **метрикой взвешенного пути** графа G, где w_e – евклидова длина ребра $e \in E$.

Расстояние сети d_{netv} на множестве L есть порождающее расстояние *диаграммы Вороного ребер сети* $V(P, d_{\text{netl}}, L)$,, определенное как кратчайший путь вдоль ребер от $x \in L$ до $y \in L$.

Расстояние доступа к сети d_{accnet} на $\mathbb{R}^2$ есть порождающее расстояние Вороного *диаграммы Вороного области сети* $V(P, d_{\text{accnet}}, \mathbb{R}^2)$, определенное как

$$d_{\text{accnet}}(x, y) = d_{\text{netl}}(l(x), l(y)) + d_{\text{acc}}(x) + d_{\text{acc}}(y),$$

где $d_{\text{acc}}(x) = \min_{l \in L} d(x,l) = d_E(x, l(x))$ – *расстояние доступа точки* x. Именно, $d_{\text{acc}}(x)$ есть евклидово расстояние от x до *точки доступа* $l(x) \in L$ для x, которая является ближайшей к x точкой на ребрах графа G.

Расстояние воздушных перевозок

Сеть аэропортов – произвольный плоский граф G на n вершинах (аэропортах) с положительными весами ребер (*время полета*). Вход и выход из графа допускаются только через аэропорты. Перемещение по сети внутри графа G осуществляется с заданной скоростью $v > 1$. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно обычной евклидовой метрики.

Расстояние воздушных перевозок d_{al} есть порождающее расстояние Вороного *диаграммы воздушных перевозок Вороного* $V(P, d_{\text{al}}, \mathbb{R}^2)$,, определенное как время, необходимое для *быстрейшего пути* между x и y при наличии сети аэропортов G, т.е. пути, минизирующего продолжительность путешествия между x и y.

Расстояние города

Сеть городского общественного транспорта, например метро или автобусные перевозки, представляет собой плоский граф G с горизонтальными или вертикальными ребрами. G может состоять из многих связных компонент и содержать циклы. Каждый может войти в G в любой точке, будь то вершина или ребро (возможно назначить также и строго фиксированные точки входа). Внутри G движение осуществляется с заданной скоростью $v > 1$ в одном из доступных направлений. Движение вне сети осуществляется с единичной скоростью относительно **метрики Манхэттена** (в нашем случае подразумевается крупный современный город с прямоугольной планировкой улиц по направлениям север–юг и восток–запад).

Расстоянием города d_{city} называется порождающее расстояние Вороного *диаграммы города Вороного* $V(P, d_{\text{city}}, \mathbb{R}^2)$, определенное как время, необходимое для *быстрейшего пути* между x и y в условиях сети G, т.е. пути. минилизирующего продолжительность путешествия между x и y.

Множество $P = (p_1, \ldots, p_k)$, $k \geq 2$ можно рассматривать как множество неких городских учреждений (например, почтовых отделений или больниц): для многих людей учреждения одного и того же предназначения одинаковы и предпочтительным является то, до которого быстрее добраться.

Расстояние на реке

Расстоянием на реке d_{riv} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{\text{riv}}, \mathbb{R}^2)$ (*диаграммы Вороного на реке*), определенное как

$$d_{\text{riv}}(x,y) = \frac{-\alpha(x_1 - y_1) + \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (1-\alpha^2)(x_2 - y_2)^2}}{v(1-\alpha^2)},$$

где v – скорость лодки в неподвижной воде, $w > 0$ – скорость постоянного потока в положительном направлении x_1-оси и $\alpha = \dfrac{w}{v} (0 < \alpha < 1)$ – *относительная скорость потока.*

Расстояние парусной лодки

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – область на плоскости (*водная поверхность*), пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ – непрерывное векторное поле на Ω, представляющее скорость потока воды (*полетока*); пусть $P = (p_1, \ldots, p_k) \subset \Omega,\ k \geq 2$ – множество k точек в Ω (*гавани*).

Расстоянием парусника ([NiSu03]) d_{bs} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{bs}, \Omega)$ (*диаграмма парусника Вороного*), определенное как

$$d_{bs}(x, y) = \inf_{\gamma} \delta(\gamma, x, y)$$

для всех $x, y \in \Omega$, где $\delta(\gamma, x, y) = \int_0^1 \left| F \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|} + f(\gamma(s)) \right|^{-1} ds$ – время, необходимое для того, чтобы парусник с максимальной скоростью F на неподвижной воде переместился из x в y вдоль кривой $\gamma : \{0,1\} \to \Omega,\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$, инфимум берется по всем возможным кривым γ.

Расстояние подсматривающего

Пусть $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ – полуплоскость в $\mathbb{R}^2$, пусть $P = (p_1, \ldots, p_k)$, $k \geq 2$, – множеством точек, содержащихся в полуплоскости $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 < 0\}$, и пусть *окно определяется как интервал* $]a, b[$ с $a = (0,1)$ и $b = (0, -1)$.

Расстояние подсматривающего d_{pee} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{\text{pee}}, S)$ (*диаграмма подсматривающего Вороного*), определенное как

$$d_{\text{pee}}(x, p_i) = \begin{cases} d_E(x, p_i) & \text{если } [x, p] \cap]a, b[\neq \emptyset, \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где d_E – обычное евклидово расстояние.

Расстояние снегохода

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – область на x_1x_2-плоскости пространства $\mathbb{R}^3$ (*двумерное отображение*) и $\Omega^* = \{(q, h(q)) : q = (x_1(q), x_2(q)) \in \Omega, h(q) \in \mathbb{R}\}$ – трехмерная *поверхность земли*, поставленная в соответствие изображению Ω. Пусть $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \Omega$, $k \geq 2$ – множество k точек в Ω (*стоянки снегоходов*).

Расстоянием снегохода d_{sm} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P, d_{sm}, \Omega)$ (*диаграммы снегохода Вороного*), определенное как

$$d_{sm}(q, r) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{1}{F\left(1 - \alpha \frac{dh(\gamma(s))}{ds}\right)} ds$$

для любых $q, r \in \Omega$ и позволяющее рассчитать минимально необходимое время для перемещения снегохода со скоростью F на ровной поверхности из $(q, h(q))$ в $(r, h(r))$ по *маршруту* $\gamma^* : \gamma^*(s) = (\gamma(s), h(\gamma(s)))$, *ассоциированному с путем по области*

$\gamma:[0,1]\to\Omega,\ \gamma(0)=q,\ \gamma(1)=r$ (инфимум берется по всем возможным путям γ, а α является положительной константой).

Снегоход движется вверх, в гору, медленнее, чем вниз, под гору. Для лесного пожара характерно обратное: фронт огня перемещается быстрее вверх и медленнее вниз. Данную ситуацию можно смоделировать с использованием отрицательного значения α. Полученное расстояние называется **расстоянием лесного пожара** и полученная диаграмма Вороного называется *диаграммой лесного пожара Вороного*.

Расстояние скольжения

Пусть T – наклонная плоскость в $\mathbb{R}^3$, полученная посредством вращения x_1x_2-плоскости вокруг x_1-оси на угол α, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, с координатной системой, которая получена посредством аналогичного вращения координатной системы x_1x_2-плоскости. Для точки $q\in T$, $q=(x_1(q),x_2(q))$ определим *высоту* $h(q)$ как ее x_3-координату в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, $h(q)=x_2(q)\cdot\sin\alpha$. Пусть $P=\{p_1,\ldots,p_k\}\subset T$, $k\ge 2$.

Расстоянием скольжения ([AACL98]) d_{skew} называется порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(P,d_{\text{skew}},T)$ (*диаграмма скольжения Вороного*), определенное как

$$d_{\text{skew}}(q,r)=d_E(q,r)+(h(r)-h(q))=d_E(q,r)+\sin\alpha(x_2(r)-x_2(q)),$$

или, в общем случае,

$$d_{\text{skew}}(q,r)=d_E(q,r)+k(x_2(r)-x_2(q))$$

для всех $q,r\in T$, где d_E – обычное евклидово расстояние, а $k\ge 0$ – константа.

20.3. ДРУГИЕ РАССТОЯНИЯ ВОРОНОГО

Расстояние Вороного для отрезков

Расстояние Вороного для (множества) **отрезков** d_{sl} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(A,d_{ls},\mathbb{R}^2)$ (*линейная диаграмма Вороного, порожденная отрезками*), определенное как

$$d_{sl}(x,A_i)=\inf_{y\in A_i} d_E(x,y),$$

где множество порождающих элементов $A=\{A_1,\ldots,A_k\}$, $k\ge 2$ есть множество попарно непересекающихся отрезков $A_i=[a_ib_i]$ и d_E есть обычное евклидово расстояние. Именно,

$$d_{ls}(x,A_i)=\begin{cases} d_E(x,a_i), & \text{если} \quad x\in R_{a_i},\\ d_E(x,b_i), & \text{если} \quad x\in R_{b_i},\\ d_E\left(x-a_i,\dfrac{(x-a_i)^T(b_i-a_i)}{d_E^2(a_i,b_i)}(b_i-a_i)\right), & \text{если} \quad x\in\mathbb{R}^2\setminus\{R_{a_i}\cup R_{b_i}\},\end{cases}$$

где $\mathbb{R}_{a_i}=\{x\in\mathbb{R}^2:(b_i-a_i)^T(x-a_i)<0\}$, $R_{b_i}=\{x\in\mathbb{R}^2:(a_i-b_i)^T(x-b_i)<0\}$.

Расстояние Вороного для дуг

Расстояние Вороного для (множества круговых) **дуг** d_{ca} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{ca}, \mathbb{R}^2)$ (*линейная диаграмма Вороного, порожденная дугами окружностей*), определенное как

$$d_{ca}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где порождающее множество $A = \{A_i, \ldots, A_k\}$, $k \geq 2$ есть множество попарно непересекающихся дуг окружностей A_i (меньших или равных полуокружностям) с радиусом r_i и центром в x_{c_i}, а d_E – обычное евклидово расстояние. Именно фактически,

$$d_{ca}(x, A_i) = \min\{d_E(x, a_i), d_E(x, b_i), | d_E(x, x_{c_i}) - r_i |\},$$

где a_i и b_i – концевые точки дуги A_i.

Расстояние Вороного для окружностей

Расстоянием Вороного для (множества) **окружностей** d_{cl} называется порождающее расстояние обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{cl}, \mathbb{R}^2)$ (*линейная диаграмма Вороного, порожденная окружностями*), определенное как

$$d_{cl}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где порождающее множество $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $k \geq 2$ есть множество попарно непересекающихся окружностей A_i с радиусом r_i и центром в x_{c_i}, а d_E – обычное евклидово расстояние. Именно, фактически

$$d_{ca}(x, A_i) = | d_E(x, x_{c_i}) - r_i |.$$

Для линейных диаграмм Вороного, порожденных окружностями, существует много различных порождающих расстояний. Например, $d^*_{cl}(x, A_i) = d_E(x, x_{c_i}) - r_i$ или $d^*_{cl}(x, A_i) = d^2_E(x, x_{c_i}) - r_i^2$ (*диаграмма Вороного по Лагерру*).

Расстояние Вороного для областей

Расстояние Вороного для областей d_{ar} есть порождающее расстояние Вороного обобщенной диаграммы Вороного $V(A, d_{ar}, \mathbb{R}^2)$ (*диаграмма областей Вороного*), определенное как

$$d_{ar}(x, A_i) = \inf_{y \in A_i} d_E(x, y),$$

где $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $k \geq 2$ есть совокупность попарно непересекающихся связных замкнутых множеств (*областей*), и d_E – обычное евклидово расстояние.

Следует обратить внимание на то, что для любого обобщенного порождающего множества $A = \{A_1, \ldots, A_k\}$, $k \geq 2$ можно использовать в качестве порождающего расстояния Вороного **хаусдорфово расстояние** от точки x до множества A_i: : $d_{\text{Haus}}(x, A_i) = \sup_{y \in A_i} d_E(x, y)$, где d_E – обычное евклидово расстояние.

Цилиндрическое расстояние

Цилиндрическое расстояние d_{cyl} есть **внутренняя метрика** на поверхности цилиндра S, которая используется в качестве порождающего расстояния Вороного для *цилиндрической диаграммы Вороного* $V(A, d_{\text{cyl}}, S)$ Если ось цилиндра единичного радиуса размещена на x_3-оси в $\mathbb{R}^3$, то цилиндрическое расстояние между любыми точками $x,y \in$ S с цилиндрическими координатами $(1, \theta_x, z_x)$ и $(1, \theta_y, z_y)$ задается как

$$d_{\text{cyl}}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(\theta_x - \theta_y)^2 + (z_x - z_y)^2}, & \text{если } \theta_y - \theta_x \le \pi, \\ \sqrt{(\theta_x + 2\pi - \theta_y)^2 + (z_x - z_y)^2}, & \text{если } \theta_y - \theta_x > \pi. \end{cases}$$

Коническое расстояние

Коническим расстоянием d_{con} называется **внутренняя метрика** на поверхности конуса S, которая используется в качестве порождающего расстояния для *конической диаграммы Вороного* $V(P, d_{\text{con}}, S)$. Если ось конуса S размещена на x_3-оси в $\mathbb{R}^3$ и радиус окружности очерчиваемой пересечением конуса S с x_1x_2-плоскостью равен единице, то расстояние конуса между любыми точками $x, y \in S$ задается как

$$d_{\text{con}}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta'_y - \theta'_x)}, & \text{если } \theta'_y \le \theta'_x + \pi\sin(\alpha/2), \\ \sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta'_x + 2\pi\sin(\alpha/2) - \theta'_y)}, & \text{если } \theta'_y > \theta'_x + \pi\sin(\alpha/2), \end{cases}$$

где (x_1, x_2, x_3) – прямоугольные декартовы координаты точки x на S, α – угол при вершине конуса, θ_x – угол против часовой стрелки от x_1-оси до луча из исходной точки до точки $(x_1, x_2, 0)$, $\theta'_x = \theta_x \sin(\alpha/2)$, $r_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \coth(\alpha/2))^2}$ – расстояние по прямой от вершины конуса до точки (x_1, x_2, x_3).

Расстояние Вороного порядка m

Рассмотрим конечное множество A объектов метрического пространства (S, d) и целое число $m \ge 1$. Рассмотрим множество всех *m-подмножеств* M_i из A (т.е. $M_i \subset A$ и $|M_i| = m$). *Диаграмма Вороного порядка m* множества A есть разбиение S на *области Вороного* $V(M_i)$ *m-подмножеств* множества A таким образом, чтобы $V(M_i)$ содержала все точки $s \in S$, которые "ближе" к M_i, чем к любому другому m-множеству $M_i : d(s, x) < d(s, y)$ для любых $x \in M_{ii}$ и $y \in S \setminus M_i$. Эта диаграмма указывает первого, второго, …, m-го ближайшего соседа окрестности точки из S.

Такие диаграммы могут быть определены в терминах некоторой "функции расстояния" $D(s, M_i)$, в частности, некоторое ***m*-хемиметрики** на S. Для $M_i = \{a_i, b_i\}$ рассматривались функции $|d(s,a_i) - d(s,b_i)|$, $d(s,a_i) + d(s,b_i)$, $d(s,a_i) \cdot d(s,b_i)$, а также **2-метрики** $d(s,a_i) + d(s,b_i) + d(a_i,b_i)$ и площадь треугольника (s, a_i, b_i).

Глава 21

Расстояния в анализе образов и звуков

21.1. РАССТОЯНИЯ В АНАЛИЗЕ ОБРАЗОВ

Обработка образов (изображений) имеет дело с такими как фотографии, видеоданные или томографические изображения. В частности, *компьютерная графика* представляет собой процесс синтезирования образов из абстрактных моделей, тогда как *машинное распознавание образов* – это извлечение некой абстрактной информации: скажем, 3*D* (т.е. трехмерного) описания той или иной сцены, используя ее видеосъемку. Начиная где-то с 2000 г. аналоговая обработка изображений (оптическими устройствами) уступает место цифровой обработке и, в частности, цифровому редактированию (например, обработке изображений, полученных с помощью обычных цифровых фотоаппаратов).

Компьютерная графика (и мозг человека) имеет дело с *образами векторной графики*, т.е. такими, которые представлены геометрически кривыми, многоугольниками и т.п. *Изображение растровой графики* (или *цифровое изображение, побитовое отображение*) в 2*D* есть представление 2*D* изображения как конечного множества дискретных величин, называемых *пикселями* (сокращенно от английского "picture element"), размещенных на квадратной гризе $\mathbb{Z}^2$ или шестиугольной гризе. Как правило, растр – это квадратная $2^k \times 2^k$ гриза с $k = 8,9$ или 10. Видеоизображения и *томографические* (т.е. полученные как серия поперечных сечений отдельными частями) изображения являются 3*D* изображениями (2*D* плюс время); их дискретные величины называются *вокселями* (элементами объема).

Дискретное двоичное изображение использует только два значения: 0 и 1; 1 интерпретируется как логическая "истина" и отображается черным цветом; таким образом, само изображение отождествляется с множеством черных пикселей. Элементы бинарного 2*D* изображения можно рассматривать как комплексные числа $x = iy$, где (x, y) – координата точки на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$. *Непрерывное бинарное изображение* является (обычно компактным) подмножеством **локально компактного** метрического пространства (обычно евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ с $n = 2,3$).

Полутоновые изображения могут рассматриваться как точечно-взвешенные бинарные изображения. В общем случае *нечеткое множество* является точечно-взвешенным множеством с весами (значениями принадлежности) (см. [Bloc99] для обзора нечетких расстояний). Для полутоновых изображений *xyi*-представление применяется в случае, когда плоскосные координаты (x, y) обозначают форму, в то время как вес i (сокращенно от интенсивности, т.е. яркости) – *текстуру* (распределение интенсивности). Иногда используется также матрица $((i_{xy}))$ полутонов. *Гистограмма яркости* полутонового изображения показывает частоту каждого имеющегося в данном изображении значения яркости. Если изображение имеет m

уровней яркости (столбиков гистограммы полутонов), то существуют 2^m различных возможных интенсивностей. Обычно $m = 8$ и числа 0,1,…,255 представляют диапазон интенсивности от белого до черного; другие типичные значения $m = 10$, 12, 14, 16. Глаз человека различает порядка 350 тыс. различных цветов, но только 30 различных полутонов; таким образом, цвет обладает гораздо более высокой разрешающей способностью.

Для цветных изображений наиболее известным является (*RGB*)-представление, где пространственные координаты *R, G, B* обозначают уровни красной, зеленой и синей цветовых составляющих; 3*D* гистограмма показывает яркость в каждой точке. Среди многих других 3*D* моделей (пространств) цветов различают: (*CMY*) куб (цвета голубой, малиновый, желтый), (*HSL*) конус (тип колорита *H*, заданный как угол, насыщенность *S*, заданная в %, освещенность *L*, заданная в %) и (*YUV*), (*YIQ*), используемые соответственно в телевизионных системах PAL и NTSC. Согласно утвержденной Международной комиссией по освещенности (МКО) методике пересчет (*RGB*) в меру яркости (освещенности) полутона осуществляется как $0{,}299R + 0{,}587G + 0{,}114B$. *Цветовая гистограмма* является *вектором признаков* длины n (обычно $n = 64$ или 256) с компонентами, представляющими либо общее количество пикселей, либо процент пикселей данного цвета в изображении.

Изображения чаще всего представлены *векторами признаков*, включая цветовые гистограммы, цветовую насыщенность текстуры, дескрипторы формы и т.п. Примерами пространств признаков являются: *исходная интенсивность* (значения пикселей), *края* (границы, контуры, поверхности), *отличительные характеристики* (угловые точки, пересечения линий, точки высокойкривизны) и *статистические признаки* (моментные инварианты, центроиды). К типовым видеопризнакам относятся перекрытие кадров, перемещения. *Восстановление изображения* (поиск подобностей) состоит (так же как и для других данных, таких как аудиозаписи, последовательности ДНК, текстовые документы, временные ряды и т.п.) в поиске изображений, признаки которых либо близки между собой, либо близки к конкретному запросу, либо находятся в заданном диапазоне.

Имеется два метода непосредственного сравнения изображений: по интенсивности (цвета и текстуры гистограммы) и по геометрии (описание формы с помощью *серединной оси, склелета* и т.п.). Нечеткий термин *форма* применяется для описания внешнего облика (силуэта) объекта, его локальной геометрии или общего геометрического рисунка (геометрических особенностей, точек, кривых и т.п.) или для такого рисунка с точностью до некторой группы преобразований подобия (переносов, вращений и масштабирования). Нечеткий термин *текстура* означает все, что остается после обработки данных о цвете и форме.

Подобность между векторными представлениями изображений измеряется с помощью обычных, расстояний: **l_p-метрик, метрик взвешенного редактирования, расстояния Танимото, расстояния косинуса, расстояния Махалонобиса** и его обобщений, **расстояния бульдозера**. Из вероятностных расстояний наиболее часто используются: **расстояние Бхаттачарья** 2, **расстояние Хеллинджера, расстояние Кулбака–Лейблера, расстояние Джеффри** и (особенно для гистограмм) **χ^2-расстояние, расстояние Колмогорова–Смирнова, расстояние Куипера.**

Основными расстояниями, применяемыми для компактных подмножеств X и Y множества $\mathbb{R}^n$ (обычно $n = 2{,}3$) или их дискретных вариантов, являются: **метрика Асплунда, метрика Шепарда, полуметрика симметрической разности** $\mathrm{Vol}(X \Delta Y)$ (см. **Метрика Никодима, отклонение площади, Метрика цифрового объема** и их нормализации, а также варианты **хаусдорфова расстояния** (см. ниже по тексту).

Для целей обработки изображений перечисленные ниже расстояния являются расстояниями между "истинным" и приближенным цифровыми изображениями с тем, чтобы оценить качество алгоритмов. Для целей восстановления изображений расстояния измеряются между векторами признаков запроса и ссылок.

Цветовые расстояния

Цветовое пространство – это 3-параметрическое описание цветности. Необходимость именно трех параметров обусловлена существованием в человеческом глазу трех видов рецепторов, воспринимающих коротковолновые, средневолновые и длинноволновые излучения, соответствующие синему, зеленому и красному цвету.

Международная комиссия по освещенности определила в 1931 г. параметры цветового пространства (XYZ) на основе (RGB)-модели и измерений человеческого зрения. Согласно стандарту комиссии в цветовом пространстве (XYZ) величины X, Y и Z приблизительно соответствуют красному, зеленому и синему цветам. Главным предположением колориметрического анализа, экспериментально обоснованным Индоу (1991), является то, что воспринимаемое цветовое пространство допускает существование метрики, истинного **цветового расстояния**. Предполагается, что данная метрика будет локально евклидовой, т.е. **римановой метрикой**. Другим допущением является существование непрерывного отображения из метрического пространства световых стимуов в это метрическое пространство (см. **гипотезу вероятности расстояния** в гл. 23 о том, что вероятность того, что субъект отличит один стимул от другого, является непрерывно возрастающей функцией некоторой субъективной квазиметрики между этими стимулами).

Такой *равноконтрастной цветовой шкалы*, где равные расстояния в цветовом пространстве соответствуют равным расстояниям в цветах, пока еще не получено и существующие **цветовые расстояния** являются различными ее аппроксимациями. Первым шагом в этом направлении являются *эллипсы МакАдама*, т.е области (x, y) на диаграмме *хроматичности,* все содержащиеся цвета которой выглядят неразличимыми для нормального человеческого глаза. Эти 25 эллипсов определяют метрику в цветовом пространстве. Здесь $x = \dfrac{X}{X+Y+Z}$ и $y = \dfrac{Y}{X+Y+Z}$ являются проективными координатами, и цвета диаграммы хроматичности занимают некую область вещественной проективной плоскости. Пространство CIE $(L^*a^*b^*)$является адаптацией цветового пространства комиссии МКО (от 1931 г.); оно обеспечивает частичную линеаризацию метрики, заложенной в эллипсах МакАдама. Параметры L^*, a^*, b^* наиболее полной модели – производные от L, a, b, которые являются характеристикой яркости L цвета от черного $L = 0$ до белого $L = 100$, при этом a находится между зеленым $a < 0$ и красным $a > 0$, b – между зеленым $a < 0$ и желтым $b > 0$.

Среднее цветовое расстояние

Для данного 3D цветового пространства и перечня n цветов пусть (c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}) – представление i-го цвета из перечня в данном пространстве. Для цветовой гистограммы $x = (x_1,\ldots,x_n)$ ее *средним цветом* является вектор $(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)})$, где $x_{(j)} = \sum_{i=1}^{n} x_i c_{ij}$ (например, средние значения красного, синего и зеленого в (RGB)).

Среднее цветовое расстояние между двумя цветовыми гистограммами ([HSEFN95]) является евклидовым расстоянием их средних цветов.

Расстояния цветовых компонентов

Пусть дано изображение (как подмножество множества $\mathbb{R}^2$); пусть p_i обозначает (в процентах) область данного изображения цветf c_i. *Цветовой составляющей* изображения является пара (c_i, p_i). **Расстояние Ма–Денга–Манжуната** между цветовыми составляющими (c_i, p_i) и ($c_j p_j$) определяется как

$$| p_i - p_j | \cdot d(c_i, c_j),$$

где $d(c_i, c_j)$ – расстояние между цветами c_i и c_j в данном цветовом пространстве. Мойсилович и др. ввели модификацию данного расстояния, подобную **расстоянию бульдозера**.

Квазирасстояние пересечений гистограмм

Возьмем две цветовые гистограммы $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (с x_i, y_i, представляющими количество пикселей в столбике i). **Квазирасстояние пересечений гистограмм Свейна–Балларда** между ними (см. **Расстояние пересечений**, гл. 17) определяется как

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} \min(x_i, y_i)}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Для нормализированных гистограмм (общая сумма равна 1) вышеприведенное квазирасстояние становится обычной $\boldsymbol{l_1}$**-метрикой** $\sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$. *Нормализированная взаимная корреляция* Розенфельда–Кака между x и y является подобностью, определенной как $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i, y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Квадратичное расстояние гистограммы

Для двух гистограмм $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ (обычно $n = 256$ или $n = 64$), представляющих цветность (в процентах) двух изображений, их **квадратичное расстояние гистограммы** (используемое в системе IBM запроса по содержанию изображения) является **расстоянием Махалонобиса**, определенным как

$$\sqrt{(x-y)^T A (x-y)},$$

где $A = ((a_{ij}))$ – симметричная положительно определенная матрица, и вес a_{ij} – некое подтвержденное непосредственным восприятием сходство между цветами i и j. Например (см. [HSEFN95]), $a_{ij} = 1 - \frac{d_{ij}}{\max_{1 \le p,q \le n} d_{pq}}$, где d_{ij} является евклидовым расстоянием между 3-векторами, представляющими i и j в некотором цветовом прост-

ранстве. Другое определение задается как $a_{ij} = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}((v_j - v_j)^2 + (s_i \cosh_i - s_j \cosh_j)^2 + (s_i \sinh_i - s_j \sinh_j)^2)^{1/2}$, где (h_i, s_i, v_i) и (h_j, s_j, v_j) – представления цветов i и j в цветовом пространстве (HSV).

Расстояние полутонового изображения

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – значения яркости двух цифровых полутоновых изображений f и g для пикселя $x \in X$, где X является растром пикселей. Любое расстояние между точно взвешенными множествами (X, f) и (X, g) (например, **расстояние бульдозера**) может быть применено для измерения расстояния между f и g. Однако основными используемыми расстояниями (они называются также *ошибками*) между изображениями f и g являются:

1) *среднеквадратическая ошибка* $RMS(f,g) = \left(\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} (f(x) - g(x))^2 \right)^{1/2}$ (как вариант допускается использование l_1-*нормы* $|f(x) - g(x)|$ вместо l_2-нормы);

2) *отношение сигнал-шум* $SNR(f,g) = \left(\frac{\sum_{x \in X} g(x)^2}{\sum_{x \in X} (f(x) - g(x))^2} \right)^{1/2}$;

3) *коэффициент ошибок неправильной классификации пикселей* $\frac{1}{|X|} |\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}|$ (нормализированное **хэммингово расстояние**);

4) среднеквадратическая частотная ошибка $\left(\frac{1}{|U|^2} \sum_{u \in U} (F(u) - G(u))^2 \right)^{1/2}$, где F и G – дискретные преобразования Фурье для f и g соответственно и U – частотная область;

5) ошибка порядка δ в номер Соболева $\left(\frac{1}{|U|^2} \sum_{u \in U} (1 + |\eta_u|^2)^{\delta} (F(u) - G(u))^2 \right)^{1/2}$, где $0 < \delta < 1$ фиксировано (обычно $\frac{1}{2}$) и η_u есть частотный вектор, ассоциированный с позицией u в частотной области U.

***L_p*-метрика сжатия изображения**

Возьмем число r, $0 \le r < 1$. ***L_p*-метрика сжатия изображения** является обычной L_p-метрикой на $\mathbb{R}^{n^2}_{\ge 0}$ (множестве полутоновых изображений, рассматриваемых как $n \times n$ матрицы), где p – решение уравнения $r = \frac{p-1}{2p-1} \cdot e^{\frac{p}{2p-1}}$. Так, $p = 1{,}2$ или ∞ для $r = 0$, $r = \frac{1}{3} e^{2/3} \approx 0{,}65$ или $r \ge \frac{\sqrt{e}}{2} \approx 0{,}82$. Здесь r оценивает *информативную* (т.е. наполненную ненулевыми значениями) часть изображения. Согласно [KKN02], эта метрика является наилучшей по качеству метрикой для выбора схемы сжатия с потерями.

Расстояния скругления

Расстояниями скругления называются расстояния, аппроксимирующие евклидово расстояние как взвешенное расстояние пути в графе $G = (\mathbb{Z}^2, E)$, где два пикселя считаются соседними, если один может быть получен из другого одношаговым ходом по $\mathbb{Z}^2$. При этом даются перечень разрешенных ходов и **простое расстояние**, т.е. положительный вес (см. гл. 19) поставлен в соответствие каждому типу такого хода.

Метрика (α, β)-скругления соответствует двум разрешенным ходам – с l_1-расстоянием и l_∞-расстоянием 1 (только диагональные перемещения) – взвешенных числами α и β соответственно. Основными случаями применения являются (α, β) = = (1, 0) (**метрика городского квартала** или **4-метрика**), (**метрика шахматной доски,** или **8-метрика**), $(1, \sqrt{2})$ (**метрика Монтанари**), ((**3,4)-метрика**), (**метрика Хилдича–Рутовица**), (5, 7) (**метрика Вервера**).

Метрика Боргефорс соответствует трем разрешенным ходам – с l_1-расстоянием 1, с l_∞-расстоянием 1 (только диагональные перемещения) и ходом коня – с весами 5,7 и 11 соответственно.

Метрика 3*D*-скругления (или *метрика* (α, β, γ)*-скругления*) является **метрикой взвешенного пути** бесконечного графа с множеством вершин $\mathbb{Z}^3$, в котором две вершины являются соседними, если их l_∞-расстояние равно единице, а веса α, β и γ связаны с 6 соседними гранями, 12 соседними ребрами и 8 соседними вершинами соответственно. Если $\alpha = \beta = \gamma = 1$, то мы имеем l_∞-метрику. Метрики (3, 4, 5)- и (1, 2, 3)-скругления являются наиболее часто применяемыми для работы с 3*D* изображениями.

Метрика Чаудхури–Мурти–Чаудхури между последовательностями $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ определяется как

$$\left|x_{i(x,y)} - y_{i(x,y)}\right| + \frac{1}{1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \sum_{1 \le i \le n, i \ne i(x,y)} |\, x_i - y_i \,|,$$

где максимальное значение $x_i – y_i$ получается для $i = i(x,y)$. Для $n = 2$ это метрика $\left(1, \frac{3}{2}\right)$- скругления.

Расстояние бульдозера

Расстояние бульдозера является дискретной формой расстояния **Монжа–Канторовича**. Грубо говоря, это минимальный объем работы, которая необходима для перемещения грунта или массы с одного места (соответствующим образом размещенного в пространстве) на другое (совокупность ям). Для любых двух конечных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ метрического пространства (*X, d*) рассмотрим *сигнатуры,* т.е. точечное взвешенные множества $P_1 = (p_1(x_1), \ldots, p_1(x_m))$ и $P_2 = (p_2(x_1), \ldots, p_2(x_n))$. Например (см. [RTG00]), сигнатуры могут представлять кластеры цветов или текстурного содержания изображений: элементы *X* являются центроидами кластеров, а $p_1(x_1)$, $p_2(y_j)$ – размерами соответствующих кластеров. Исходное расстояние *d* является некоторым цветовых расстоянием, скажем, евклидовым расстоянием в 3*D* CIE $(L^* a^* b^*)$ цветовом пространстве.

Пусть $W_1 = \sum_i p_1(x_i)$ и $W_2 = \sum_i p_2(y_j)$ являются *суммарными весами* P_1 и P_2 соответственно. Тогда **расстояние бульдозера** (или *расстояние транспортировки*) между сигнатурами P_1 и P_2 определяется как функция

$$\frac{\sum_{i,j} f_{ij}^* d(x_i, y_j)}{\sum_{i,j} f_{ij}^*},$$

где $m \times n$ матрица $S^* = ((f_{ij}^*))$ является *оптимальным,* т.е. минимизирующим $\sum_{i,j} f_{ij} d(x_i, y_j)$, *потоком. Поток* (веса грунта) – это $m \times n$ матрица $S = ((f_{ij}))$, удовлетворяющая следующим ограничениям:

1) все $f_{ij} \geq 0$;

2) $\sum_{ij} f_{ij} = \min\{W_1, W_2\}$;

3) $\sum_i f_{ij} \leq p_2(y_j)$ и $\sum_i f_{ij} \leq p_1(x_i)$.

Итак, данное расстояние является усреднением исходного расстояния d, на которое грузы перемещаются оптимальным потоком.

В случае $W_1 = W_2 = 1$ вышеприведенные два неравенства 3) становятся равенствами. Нормализация сигнатур до $W_1 = W_2 = 1$ (что не изменяет расстояния) позволяет рассматривать P_1 и P_2 как распределения вероятностей случайных величин, скажем, X и Y. Тогда $\sum_{i,j} f_{ij} d(x_i, y_j)$ является просто $\mathbb{E}_S[d(X,Y)]$, т.е. расстояние бульдозера совпадает в этом случае с **метрикой Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассермана**. А для случая, скажем, $W_1 < W_2$ оно в общем случае не является метрикой. Однако замена в вышеприведенном определении неравенства 3) равенствами

$3'$) $\sum_i f_{ij} = p_2(y_j)$ и $\sum_i f_{ij} = \frac{p_1(x_1) W_1}{W_2}$

дает **полуметрику пропорционального переноса** Жианнополоса–Вельткампа.

Расстояние параметризованных кривых

Форма может быть представлена параметризованными кривыми на плоскости. Обычно такая кривая является *простой*, т.е. не имеет самопересечений. Пусть $X = X(x(t))$ и $Y = Y(y(t))$ – две параметризованные кривые, у которых (непрерывные) функции параметризации $x(t)$ и $y(t)$ на [0, 1] удовлетворяют условиям $x(0) = y(0) = 0$ и $x(1) = y(1) = 1$.

Наиболее используемым **расстоянием параметризованных кривых** является минимум (который берется по всем монотонно возрастающим параметризациям $x(t)$ и $y(t)$) максимального евклидова расстояния $d_E(X(x(t)), Y(y(t)))$. Это – специальный евклидов случай **расстояния собаковода**, которое, в свою очередь, является

метрикой Фреше для случая кривых. Вариантами этого расстояния являются отбрасывание условия монотонности параметризации или нахождение части кривой, от которой другая ее часть отстоит на минимальном таком расстоянии ([VeHa01]).

Расстояния нелинейного гибкого согласования

Рассмотрим дискретное представление кривых. Пусть $r \geq 1$ – константа и $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ – конечные упорядоченные множества последовательных точек на двух замкнутых кривых. Для любого сохраняющего порядок соответствия f между всеми точками A и всеми точками B *участок* $s(a_i, b_j)$ для $(a_i, f(a_i) = b_j)$ равен r, если $f(a_{i-1}) = b_j$ или $f(a_i) = b_{j-1}$, и равен 0, иначе.

Ослабленное расстояние нелинейного гибкого согласования является минимумом по всем таким f величины $\sum(s(a_i, b_j) + d(a_i, b_j))$, где $d(a_i, b_j)$ – разность между касательными углами a_i и b_j. Оно является **почти метрикой** для некоторого r. Для $r = 1$ оно называется **расстоянием нелинейного гибкого согласования**.

Расстояние функции вращения

Для плоского многоугольника P его *функцией вращения* $Tp(s)$ называется угол (против часовой стрелки) между касательной и x-осью как функция длины дуги s. Эта функция возрастает при каждом повороте налево и убывает при повороте направо.

Для двух многоугольников с равными периметрами их **расстоянием функции вращения** является $\boldsymbol{L_p}$**-метрика** между их функциями вращения.

Расстояние функции размера

Для плоского графа $G = (V, E)$ и *измеряющей функции* f на его множестве вершин V (например, расстоянии от $v \in V$ до центра массы V) *функция размера* $S_G(x, y)$ определяется на точках $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ как число связных компонент сужения G на вершины $\{v \in V : f(vl) \leq y\}$, содержащих точку v' с $f(v') \leq x$.

Для двух плоских графов с множествами вершин, принадлежащими растру $R \subset \mathbb{Z}^2$, их **расстоянием функции размера** Ураза–Верри является нормализованное l_1-расстояние между их функциями расстояния над растрами пикселей.

Расстояние отражения

Для конечного объединения A плоских кривых и каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$ пусть V_A^x обозначает объединение интервалов $]x, a[$ $a \in A$, которые *видны из* x, т.е. $]x, a[\cap A = \emptyset$. Пусть p_A^x – площадь множества $\{x + v \in V_A^x : x - v \in V_A^x\}$.

Расстоянием отражения Хагедорна–Велькампа между конечными объединениями A и B кривых плоских является нормализованное l_1-расстояние между соответствующими функциями p_A^x и p_B^x, определенное как

$$\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left| p_A^x - p_B^x \right| dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^2} \max \left| p_A^x \cdot p_B^x \right| dx}.$$

Расстоянное преобразование

Возьмем метрическое пространство $(X = \mathbb{Z}^2, d)$ и двоичное цифровое изображение $M \subset X$. **Расстоянным преобразованием** называется функция $f_M : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, где $f_M(x) = \inf_{u \in M} d(x,u)$ является **расстоянием между точкой и множеством** $d(x, M)$. Следовательно, расстоянное преобразование можно рассматривать как полутоновое цифровое изображение, в котором каждому пикселю присваивается метка (уровень полутона), соответствующая расстоянию до ближайшего пикселя фона. Расстоянные преобразования в процессах обработки изображений также называются *расстоянными полями* и, главным образом, **расстоянными картами**; однако последний термин мы резервируем для обозначения этого понятия применительно к любому метрическому пространству. *Расстоянное преобразование формы* – расстоянное преобразование, в котором M – граница изображения. Для $X = \mathbb{R}^2$ граф $\{(x, f(x)) : x \in X\}$ для $d(x, M)$ называется *поверхностью Вороного* для M.

Срединная ось и скелетная

Пусть (X, d) – метрическое пространство и M – подмножество X. **Срединная ось** X – множество $MA(X) = \{x \in X : |\{m \in M : d(x,m) = d(x,M)\}| \geq 2\}$, т.е. все точки X, имеющие в M не менее двух **элементов наилучшего приближения.** $MA(X)$ состоит из всех точек границ *областей Вороного* для точек из M. **Скелет** $\mathrm{Skel}(X)$ множества X есть множество центров всех шаров (относительно расстояния d), которые вписаны в X и являются *максимальными,* т.е. не принадлежат никакому другому такому шару. **Геометрическое место разрезов множества** X – это замыкание $\overline{MA(X)}$ срединной оси. В общем случае $MA(X) \subset \mathrm{Skel}(X) \subset \overline{MA(X)}$. *Преобразования срединной оси, скелета* и *геометрического места разрезов* – это точечно-взвешенные множествами $\mathrm{MA}(X)$, $\mathrm{Skel}(X)$ и $\overline{MA(X)}$ (сужение **расстоянного преобразования** на эти множества) с $d(x, M)$, рассматриваемым как вес точки $x \in X$.

Обычно $X \subset \mathbb{E}^n$ и M – граница X. В случае когда M является непрерывной границей, срединная ось может считаться пределом *диаграммы Вороного* по мере того как число порождающих точек становится бесконечным. Для $2D$ бинарных изображений X скелет является кривой толщиной в один пиксель в цифровом случае. Экзоскелет множества X – скелет дополнения множества X, т.е. фона изображения, для которого X является передним планом.

Прокрустово расстояние

Очертание формы (конфигурация точек в $\mathbb{R}^2$), которое рассматривается как выражение инвариантных свойств формы относительно переноса, вращения и масштаба, можно представить как последовательность *ориентиров,* т.е. специфических точек на форме, выбранных по определенному правилу. Каждый ориентир a может рассматриваться как элемент $(a', a'') \in \mathbb{R}^2$ или элемент $a' + a''i \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим две формы x и y, представленные их ориентирными векторами $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(y_1,\ldots,y_n)$ из $\mathbb{C}^n$. Предположим, что x и y корректируются для переноса условием $\sum_t x_t = \sum_t y_t = 0$. Тогда их **прокрустово расстояние** определяется как

$$\sqrt{\sum_{t=1}^{n} |x_t - y_t|^2},$$

где две формы являются, оптимально (по критерию наименьших квадратов) расположенными по одной линии для корректировки масштаба и их **расстояние очертания Кендалла** определяется как

$$\arccos \sqrt{\frac{\left(\sum_t x_t \bar{y}_t\right)\left(\sum_t y_t \bar{x}_t\right)}{\left(\sum_t x_t \bar{x}_t\right)\left(\sum_t y_t \bar{y}_t\right)}},$$

где $\overline{\alpha} = a' - a''i$ является *комплексно сопряженным числа* $\alpha = a' - a''i$.

Касательное расстояние

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и семейства *преобразований* $t(x, \alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}^k$ – вектор k параметров (например, коэффициент масштабирования и угол вращения), множество $M_x = \{t(x, \sigma) : \alpha \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{R}^n$ является многообразием размерности не больше чем k. Это кривая, если $k = 1$. Минимальное евклидово расстояние между многообразиями M_x и M_y является полезным расстоянием, поскольку оно инвариантно относительно преобразований $t(x, \alpha)$. Однако рассчитать такое расстояние в общем случае очень трудно; поэтому M_x аппроксимируют как его *касательное подпространство в точке* x: $\{x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_k x^i : \alpha \in \mathbb{R}^k\} \subset \mathbb{R}^n$, где порождающие его касательные векторы x^i, $1 \le i \le k$, являются частными производными $t(x, \alpha)$ относительно α. **Одностороннее** (или *ориентированное*) **касательное расстояние** между элементами x и y из $\mathbb{R}^n$ есть квазирасстояние d, определенное как

$$\sqrt{\min_{\alpha} \left\| x + \sum_{i=1}^{k} \alpha_k x^i - y \right\|^2}.$$

Касательное расстояние Симара–Ле Кана–Денкера определяется как $\min\{d(x, y),\ d(y, x)\}$.

В общем случае *касательное множество метрического пространства* X *в точке* x определяется (по Громову) как любая предельная точка семейства его растяжений с коэффициентом растяжения, стремящимся к бесконечности, которая берется в точечной топологии Громова–Хаусдорфа (см. **Метрика Громова–Хаусдорфа,** гл. 1).

Расстояние пикселя

Возьмем два цифровых образа, рассматриваемых как бинарные $m \times n$ матрицы $x = ((x_{ij}))$ и $y = ((y_{ij}))$, где пиксель x_{ij} является черным или белым, если он равен 1 или 0 соответственно. Для каждого пикселя x_{ij} *окаймленное расстоянное отображение до ближайшего пикселя противоположного цвета* $D_{BW}(x_{ij})$ есть число *окаймлений* (где каждое окаймление состоит из пикселей, равноудаленных (i, j)), протянувшихся от (i, j) до встречи с первым окаймлением, содержащим пиксель противоположного цвета.

Расстояние пикселей (введенное Уайтом и др., 1994) задается как

$$\sum_{1 \le i \le m} \sum_{1 \le i \le n} |\, x_{ij} - y_{ij} \,| \left(D_{BW}(x_{ij}) + D_{BW}(y_{ij}) \right).$$

Квазирасстояние коэффициента качества

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A и B конечного метрического пространства (X, d). Для них **квазирасстояние коэффициента качества** Пратта определяется как

$$\left(\max\{|A|,|B|\}\sum_{x\in B}\frac{1}{1+\alpha d(x,A)^2}\right)^{-1},$$

где α – константа масштабирования (обычно $\frac{1}{9}$) и $d(x,A)=\min_{y\in A} d(x,y)$ – **расстояние между точкой и множеством**.

Примерами подобных квазирасстояний являются *расстояние средней погрешности* Пели-Малаха $\frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} d(x,A)$ и *расстояние среднеквадратической погрешности* $\frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} d(x,A)^2$.

Среднее хаусдорфово расстояние p-го порядка

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A и B конечного метрического пространства (скажем, растра пикселей) (X, d). **Их среднее хаусдорфово расстояние p-го порядка есть** ([Badd92]) нормализованное $\boldsymbol{L_p}$**-расстояние Хаусдорфа,** определенное как

$$\left(\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $d(x,A)=\min_{y\in A} d(x,y)$ – **расстояние между точкой и множеством**. Обычная хаусдорфова метрика пропорциональна среднему хаусдорфову расстоянию ∞-го порядка.

Σ-**хаусдорфово расстояние** Венкатасубраминиана $d_{d\,\mathrm{Haus}}(A,B)+d_{d\,\mathrm{Haus}}(B,A)$ равно $\sum_{x\in A\cup B}|d(x,A)-d(x,B)|$, т.е. является вариантом L_1-расстояния Хаусдорфа.

Другим вариантом среднего хаусдорфова расстояния 1-го порядка является *средняя геометрическая погрешность* Линдстрёма-Турка между двумя изображениями, рассматриваемыми как поверхности A и B. Она определяется как

$$\frac{1}{\mathrm{Area}(A)+\mathrm{Area}(B)}\left(\int_{x\in A} d(x,B)dS+\int_{x\in B} d(x,A)dS\right),$$

где $\mathrm{Area}(A)$ – площадь поверхности A. Если рассматривать изображения как конечные множества A и B, то их *средняя геометрическая погрешность* определяется как

$$\frac{1}{|A|+|B|}\left(\sum_{x\in A} d(x,B)+\sum_{x\in B} d(x,A)\right).$$

Модифицированное хаусдорфово расстояние

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A и B конечного метрического пространства (X, d). Их **модифицированное хаусдорфово расстояние** по Дюбюссону–Джейну определяется как максимум расстояний между точкой и множеством, усредненных по A и B:

$$\max\left\{\frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} d(x,B),\ \frac{1}{|B|}\sum_{x\in B} d(x,A)\right\}.$$

Частичное хаусдорфово квазирасстояние

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A, B конечного метрического пространства (X, d), и целые числа k, l, такие что $1 \le k \le |A|$, $1 \le l \le |B|$. **Их частичное (k, l)-хаусдорфово квазирасстояние** по Хаттенлокеру–Руклиджу определяется как

$$\max\left\{k^{th}_{k\in A} d(x,B),\ l^{th}_{x\in B} d(x,A)\right\},$$

где $k^{th}_{k\in A} d(x,B)$ означает k-е (вместо, наибольшого A-го, расположенного первым) среди $|A|$ расстояний $d(x, B)$, расположенных в возрастающем порядке. Случай $k = \left\lfloor \frac{|A|}{2} \right\rfloor$, $l = \left\lfloor \frac{B}{2} \right\rfloor$ соответствует *среднему модифицированному хаусдорфову квазирасстоянию*.

Расстояние бутылочного горлышка

Возьмем два бинарных изображения, рассматриваемых как непустые конечные подмножества A, B с $|A| = |B| = m$ конечного метрического пространства (X, d). Их **расстояние бутылочного горлышка** определяется как

$$\min_f \max_{x\in A} d(x, f(x)),$$

где f – любое биективное отображение между A и B.

Вариантами вышеприведенного расстояния являются:

1) соответствие минимального веса: $\min_f \sum_{x\in A} d(x, f(x))$;

2) **равномерное соответствие**: $\left\{\max_{x\in A} d(x, f(x)) - \min_{x\in A} d(x, f(x))\right\}$;

3) **соответствие наименьшего отклонения**:

$$\min_f\left\{\max_{x\in A} d(x, f(x)) - \frac{1}{|A|}\sum_{x\in A} d(x, f(x))\right\}.$$

Для целого числа t, $1 \le t \le |A|$, **расстояние t-бутылочного горлышка** между A и B ([InVe00]) равно вышеупомянутому минимуму, если f – любое отображение из A в B, такое что $|\{x \in A : f(x) = e\}| \le t$. Случаи $t = 1$ и $t = |A|$ аналогичны соответственно расстоянию бутылочного горлышка и **ориентированному хаусдорфову расстоянию** $d_{d\,\mathrm{Haus}}(A, B) = \max_{x\in A} \min_{y\in B} d(x, y)$.

Хаусдорфово расстояние с точностью до G

Для группы $(G, \cdot, id)$, действующей на евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$, **хаусдорфово расстояние с точностью до G** между двумя компактными подмножествами A и B (используемое при обработке изображений) есть **обобщенное G-хаусдорфово расстояние между ними**, т.е. минимум $d_{\text{Haus}}(A, g(B))$ по всем $g \in G$. Обычно G – множество всех изометрий или всех переносов пространства $\mathbb{E}^n$.

Гиперболическое хаусдорфово расстояние

Для любого компактного одмножества A множества $\mathbb{R}^n$ обозначим через $MAT(A)$ его *преобразование срединной оси по Блюму*, т.е. подмножество $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, все элементы которого являются парами $x = (x', r_x)$ центров x' и радиусов r_x максимальных вписанных в A шаров применительно к евклидовому расстоянию d_E в $\mathbb{R}^n$ (см. **Срединная ось и скелет**).

Гиперболическое хаусдорфово расстояние ([ChSe00]) – **хаусдорфова метрика** на непустых компактных подмножествах $MAT(A)$ метрического пространства (X, d), где *гиперболическое расстояние* d на X определяется для его элементов $x = (x', r_x)$ и $y = (y', r_y)$ как

$$\max\{0, d_E(x', y') - (r_y - r_x)\}.$$

Нелинейная хаусдорфова метрика

Для двух компактных подмножеств A и B метрического пространства (X, d) их **нелинейной хаусдорфовой метрикой** (или *волновым расстоянием Затмари–Рекечки–Роска*) называется **хаусдорфово расстояние** $d_{\text{Haus}}(A \cap B, (A \cup B)^*)$, где $(A \cup B)^*$ есть подмножество $A \cap B$, образующее замкнутую непрерывную область с $A \cap B$ и расстояния между точками могут измеряться только вдоль путей, полностью принадлежащих $A \cup B$.

Метрики качества видеоизображения

Данные метрики являются расстояниями между входной и прототипной последовательностями цветных видеокадров, которые обычно предназначены для оптимизации алгоритмов кодирования, сжатия и декодирования. Каждая из них основана на некой модели восприятия в системе человеческого зрения, простейшими из которых являются RMSE (среднеквадратическая ошибка) и PSNR (пиковое соотношение сигнал-шум) меры погрешностей. Среди прочих можно назвать *пороговые метрики*, с помощью которых оценивается вероятность выделения видео *артефактов* (т.е. визуальных искажений изображения, накладывающихся на видеосигнал в процессе цифрового кодирования). В качестве примеров можно привести метрику JND (едва уловимые различия) Сарноффа, PDM метрику (метрика искажения восприятия Винклера) и метрику DVQ (качество цифрового изображения). DVQ – **l_p-метрика** между векторами признаков, представляющих две видеопоследовательности. Некоторые метрики используются для измерения специальных артефактов видеосигнала: появления блоковых структур, размытости изображений, сигналов помех (неопределенность ориентации кромки), искажение текстуры и т.п.

Расстояния временныз рядов видео

Расстояния временных рядов видео – объективные свойствах, пространственно-временные **метрики качества видео,** базирующиеся на вейвлетах. В ходе обработки видеопоток x преобразуется во временной ряд $x(t)$ в виде кривой на коорди-

натной плоскости, который затем (кусочно-линейно) аппроксимируется как множество последовательных отрезков, которые можно задать с помощью $n + 1$ конечной точки (x_i, x_i'), $0 \le i \le n$ на координатной плоскости. В работе [WoPi99] представлены следующие (см. **Расстояние Мила**) расстояния между видеопотоками x и y:

1) *очертание* $(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| (x'_{i+1} - x'_i) - (y'_{i+1} - y'_i) \right|$;

2) смещение $(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{x'_{i+1} + x'_i}{2} - \frac{y'_{i+1} + y'_i}{2} \right|$.

21.2. РАССТОЯНИЯ В АНАЛИЗЕ ЗВУКОВ

Обработка звуковых (речь, музыка и т.п.) *сигналов* является обработкой аналоговых (непрерывных) или, главным образом, цифровых (дискретных) представлений колебаний давления воздуха от звуковых воздействий. *Звуковая спектрограмма* (или *сонограмма*) является визуальным трехмерным представлением акустического сигнала. Оно формируется либо в результате прохождения через серию полосовых фильтров (аналоговая обработка), либо посредством применения *быстрого преобразования Фурье* к электронному аналогу акустической волны. Три оси представляют время, частоту и *интенсивность* (акустическую энергию). Зачастую эта трехмерная кривая сокращается до двух характеристик посредством представления интенсивности более жирными линиями или более подчеркнутым серым или введением цветовых значений.

Звук называется *тоном,* если он периодический (самая низкая частота *основной гармоники* плюс ей кратные, *гармоники* или *обертоны*), и *шумом,* иначе. Частота измеряется в циклах в секунду (количество полных циклов в секунду) или в герцах. Диапазон слышимых человеческим ухом звуковых частот обычно лежит в пределах 20 Гц–20 кГц.

Мощность сигнала $P(f)$ – энергия на единицу времени; она пропорциональна квадрату амплитуды сигнала $A(f)$. *Децибел* (*дБ*) – единица измерения, показывающая отношение величин двух сигналов. Одна десятая часть 1 дБ называется *белом* (первичная устаревшая единица). Амплитуда звукового сигнала в дБ равна $20 \log_{10} \frac{A(f)}{A(f')} = 10 \log_{10} \frac{P(f)}{P(f')}$, где f' – опорный сигнал, выбранный обозначать 0 дБ (обычно это предел восприятия человеческого слуха). Порогом болевого ощущения является сила звука в 120–140 дБ.

Высота тона и *громкость* являются субъективными параметрами восприятия частоты и амплитуды сигнала.

Мел-шкала представляет собой перцепционную шкалу частот в соответствии с воспринимаемой на слух высотой тона и основывается на внесистемной единице высоты звука *мел* как единице восприятия частоты (высоты тона). Она соотносится со шкалой акустических частот f (в Гц) как $\mathrm{Mel}(f) = 1127 \ln\left(1 + \frac{f}{700}\right)$ или просто как $\mathrm{Mel}(f) = 1000 \log 2\left(1 + \frac{f}{700}\right)$, таким образом, 1000 Гц соответствует 1000 мел.

Шкала Барка (названная так в честь Баркгаузена) является психоакустической шкалой восприятия интенсивности (громкости) звука: ее диапазон составляет от 1 до 24, охватывая первые 24 критические полосы слышимых частот (0, 100, 200, …, 1270, 1480, 1720, …, 950, 12000, 15500Гц). Эти полосы соответствуют пространственным областям базилярной мембраны (внутреннего уха), где колебания, вызываемые звуками определенных частот, активизируют волосковые сенсорные клетки и нейроны. Шкала Барка соотносится со шкалой акустических частот f (в кГц) как $\mathrm{Bark}(f) = 13\,\mathrm{arctg}(0,76f) + 3,5\,\mathrm{arctg}\left(\frac{f}{0,75}\right)^2$.

Основным способом управления человеком своим голосом (речь, пение, смех) является регулирование формы *речевого тракта* (горло и рот). Данную форму, т.е. профиль поперечного сечения трубки от складки в голосовой щели (пространства между голосовыми связками) до апертуры (губы), можно представить как функцию площади поперечного сечения $\mathrm{Area}(x)$, где x – расстояние до голосовой щели. Речевой тракт выступает своего рода резонатором при произнесении гласных звуков, так как находится в относительно открытом состоянии. Эти резонансные колебания усиливают исходный звук (от выходящего из легких потока воздуха) на особых резонансных частотах (*формантах*) речевого тракта с пиковыми выбросами в *диапазоне* звуковых частот. Каждый гласный звук имеет две характерные форманты в зависимости от вертикального и горизонтального положения языка. Функция исходного звука модулируется функцией амплитудно-частотной характеристики для заданной функции, площади. Если мы аппроксимируем речевой тракт как последовательность соединенных трубок с постоянной площадью сечения, то *коэффициенты отношения площадей* равны частным $\frac{\mathrm{Area}(x_{i+1})}{\mathrm{Area}(x_i)}$ для последовательных трубок; расчет таких коэффициентов можно осуществить по методу кодирования с линейным предсказанием (см. ниже).

Спектр звука – распределение интенсивности (дБ) (а иногда и фаз в частотах (кГц)) компонентов волны. *Огибающая спектра* – гладкая кривая, соединяющая пики спектра. Оценка огибающих спектра производится на основе кодирования с линейным предсказанием (LPC) или быстрого преобразования Фурье (FFT) с использованием действительного кепстра, т.е. логарифма амплитудного спектра звука.

Преобразование Фурье (*FT*) отображает функции временного интервала на представления частотных интервалов. *Кепстр* сигнала $f(t)$ представляет собой $FT(\ln(FT(f(t) + 2\pi mi)))$, где m – целое число, необходимое для развертывания угла или мнимой части комплексной логарифмической функции. Комплексный и действительный кепстр используют, соответственно комплексную и действительную логарифмическую функцию. Действительный кепстр использует только величину исходного сигнала $f(t)$, в то время как комплексный кепстр – также фазовые параметры $f(t)$. Алгоритм быстрого преобразования Фурье (*FFT*) основывается на линейном спектральном анализе. С помощью *FFT* осуществляется преобразование Фурье на сигнале и делается выборка результатов преобразования по искомым частотам обычно по шкале *мел*.

Расстояния основанные на параметрах, применяемых для распознавания и обработки речевых данных, обычно получаются алгоритмом LPC (процесса кодирования с линейным предсказанием), который моделирует речевой спектр как линейную комбинацию предыдущих выборок (подобно авторегрессионному процессу).

Грубо говоря, алгоритм LPC обрабатывает каждое слово речевого сигнала, осуществляя последовательно шесть операций: фильтрование, нормализации энергии, разбиение на кадры, *кадрирование* (для минимизации неоднородностей на границах кадров), получение параметров LPC с линейным методом автокорреляции и преобразование к *кепстральным коэффициентом, полученным алгоритмом* LPC. LPC предполагает, что речевой сигнал формируется из прерывистого звука (зуммера), издаваемого голосовой щелью, с эпизодическим добавлением шипящих, свистящих и взрывных звуков, при этом форманты удаляются в результате фильтрования.

Большинство мер искажений между сонограммами являются разновидностями **квадрата евклидова расстояния** (в том числе ковариационно-взвешенного, т.е. **расстояния Махалонобиса**) и вероятностных расстояний, принадлежащих следующим общим типам: **метрике** обобщенной **полной вариации**, ***f*-расхождению Чизара** и **расстоянию Чернова**.

Приведенные ниже расстояния для обработки звуков есть расстояния между векторами x и y, представляющими два сигнала сравниваемых. Для целей распознавания они являются эталонным и входным сигналами, а для шумоподавления – исходным (опорным) и искаженным сигналами (см., например, [OASM03]). Зачастую расстояния рассчитываются для небольших отрезков между векторами, представляющими кратковременные спектры, а затем осредняются.

Сегментированное соотношение сигнал/шум

Сегментированное отношение сигнал/шум $SNR_{\text{seg}}(x, y)$ между сигналами $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ определяется как

$$\frac{10}{m}\sum_{m=0}^{M-1}\left(\log_{10}\sum_{i-nm+1}^{nm+n}\frac{x_i^2}{(x_i-y_i)^2}\right),$$

где n – количество кадров и M – количество сегментов.

Обычное *отношение сигнал/шум* $SNR(x, y)$ между x и y задается как

$$10\log_{10}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\sum_{i-1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

Другой мерой для сравнения двух форм колебаний сигнала x и y во временной области является их **расстояние Чекановского–Дайса,** определенное как

$$\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\left(1-\frac{2\min\{x_i-y_i\}}{x_i+y_i}\right).$$

Спектральное искажение интенсивность фаза

Спектральне искажение интенсвность фаза между сигналами $x = (w)$ и $y = (w)$ определяется как

$$\frac{1}{n}\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}\left(|x(w)|-|y(w)|\right)^2+(1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\left(\angle x(w)-\angle y(w)\right)^2\right),$$

где $|x(w)|$, $|y(w)|$ – спектры интенсивность $\angle x(w)$, и $\angle y(w)$ – фазовые спектры x и y соответственно, при этом параметр λ, $0 \le \lambda \le 1$, выбран с целью придания соразмерных весов к составляющим интенсивности и фазы. Случай $\lambda = 0$ соответствует **расстоянию спектральной фазы**.

Для сигнала $f(t) = a\,e^{-bt}\,U(t),\ a, b > 0$ с преобразованием Фурье $x(w) = \dfrac{a}{b + iw}$ его *спектр интенсивности* (или *амплитуды*) равен $|x| = \dfrac{a}{\sqrt{b^2 + w^2}}$, и его *фазовый* спектр (в радианах) равен $\alpha(x) = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{w}{b}$, т.е. $x(w) = |x|\,e^{i\alpha} = |x|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Среднеквадратическое логарифмическое спектральное расстояние

Среднеквадратическое логарифмическое спектральное расстояние (или *среднеквадратическое расстояние*) $LSD(x, y)$ между дискретными спектрами $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ представляет собой следующее евклидово расстояние:

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i - \ln y_i)^2}.$$

Квадрат этого расстояния, используя представление кепстра $\ln x(w) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j\,e^{-ijw}$ (где $x(w)$ – спектр мощности, т.е. преобразование Фурье квадрата интенсивности), становится в комплексном пространстве кепстра, **расстоянием кепстра**.

Расстояние логарифма отношения площадей $LAR(x, y)$ между x и y определяется как

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}10(\log_{10}\mathrm{Area}(x_i) - \log_{10}\mathrm{Area}(y_i))^2},$$

где $\mathrm{Area}(z_i)$ – площадь сечения сегмента трубки речевого тракта, соответствующего z_i.

Спектральное расстояние Барка

Спектральное расстояние Барка – перцепционное расстояние, определенное как

$$BSD(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2,$$

т.е. **квадрат евклидова расстояния** между *спектрами Барка* (x_i) и (y_i) спектров x и y, где i-й компонент соответствует i-й критической полосе слуха по шкале Барка.

Существует модификация спектрального расстояния Барка, которая исключает критические полосы i, на которых искажения громкости $|x_i - y_i|$ меньше, чем порог маскировки шума.

Квазирасстояние Итакуры–Саито

Квазирасстояние Итакуры–Саито (или *расстояние наибольшего правдоподобия*) $IS(x, y)$ между огибающими спектра $x = x(w)$ и $y = y(w)$ (полученными алго-

ритмом LPC) определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln\frac{x(w)}{y(w)}+\frac{y(w)}{x(w)}-1\right)dw.$$

Расстояние гиперболического косинуса определяется как $IS(x,y)+IS(y,x)$, т.е. равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x(w)}{y(w)}+\frac{y(w)}{x(w)}-2\right)dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2\cosh\left(\ln\frac{x(w)}{y(w)}-1\right)dw.$$

где $\cosh(t)=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ – гиперболический косинус.

Квазирасстояние логарифма отношения правдоподобия

Квазирасстояние коэффициента логарифма отношения правдоподобия (или **расстояние Куллбака–Лейблера**) $KL(x, y)$ между огибающими спектра $x = x(w)$ и $y = y(w)$ (полученными алгоритмом LPC) определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(w)\ln\frac{x(w)}{y(w)}dw.$$

Применяется также и **расхождение Джефри** $KL(x,y)+KL(y,x)$.

Расстояние взвешенного отношения правдоподобия между огибающими спектра $x = x(w)$ и $y = y(w)$ определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{x(w))}{y(w)}\right)+\frac{y(w)}{x(w)}-1\right)x(w)}{p_x}+\frac{\left(\ln\left(\frac{y(w))}{x(w)}\right)+\frac{x(w)}{y(w)}-1\right)y(w)}{p_y}\right)dw,$$

где $P(x)$ и $P(y)$ обозначают соответственно мощность спектров $x(w)$ и $y(w)$.

Кепстральное расстояние

Кепстральное расстояние (или *квадрат евклидовой кепстральной метрики*) $CEP(x, y)$ между огибающими спектра $x = x(w)$ и $y = y(w)$ (полученными алгоритмом LPC) определяется как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln\frac{x(w)}{y(2)}\right)^{2}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln x(w)-\ln y(w)\right)^{2}dw=\sum_{j=-\infty}^{\infty}(c_j(x)-c_j(y)),$$

где $c_j(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iwj}\ln|z(w)|\,dw$ есть j-й кепстральный (действительный) коэффициент z, полученный с помощью преобразования Фурье или LPC).

Расстояние частота-взвешенного кепстра

Расстояние чатоста-взвешенного кепстра (или *расстояние взвешенного наклона*) между x и y определяется как

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} i^2 (c_i(x) - c_i(y))^2.$$

"Чатоста" (Quefrency) и "кепстр" являются анаграммами терминов "частота" и "спектр" соответственно.

Расстояние кепстра Мартина между AR (авторегрессионными) моделями определяется применительно к их кепстрам как

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} i(c_i(x) - c_i(y))^2}$$

(см. общее **Расстояние Мартина** (гл. 12) определенное как **угловое расстояние между подпространствами**, и **Метрика Мартина** (гл. 11) между строками, которая является его l_∞-аналогом).

Метрика наклона Клэтта между дискретными спектрами $x = (x_i)$ и $y = (y_i)$ с n канальными фильтрами определяется как

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((x_{i+1} - x_i) - (y_{i+1} - y_i))^2}.$$

Фоновые расстояния

Фон – это звуковой сегмент, который обладает своими особыми акустическими свойствами и является базовой звуковой единицей (см. *фонема*, т.е. семейство фонов, которые обычно воспринимаются на слух как один звук; количество фонем весьма обширно с учетом имеющихся на земле 6000 различных языков, от 11 в языке ротокас до 112 в !Xó/õ (языки, на которых говорят около 4000 человек, проживающих в Папуа-Новой Гвинее, и в Ботсване соответственно).

Двумя основными классами **фоновых расстояний** (расстояния между двумя фонами x и y) являются:

1) *расстояния на основе спектрограмм*, которые являются мерой физико-акустических расхождений между звуковыми спектрограммами x и y;

2) *фоновые расстояния, основанные на признаках*, которые обычно являются **расстоянием Манхэттена** $\sum_i |x_i - y_i|$ между векторами (x_i) и (y_i), представляющими фоны x и y относительно заданного набора фонетических признаков (как, например, носовой характер звука, стриктура, палатализация, округление).

Фонетическое словарное расстояние

Фонетическое словарное расстояние между двумя словами x и y – **взвешенная метрика редактирования**, т.е. минимальная цена преобразования x в y посредством замены, удаления и вставки фонов). Слово рассматривается как строка фонов. Для данного **фонового расстояния** $r(u, v)$ в международном фонетическом алфавите с добавлением фона 0 (тишина) цена замены фона u на v равна $r(u, v)$, тогда как $r(u, 0)$ – цена вставки или удаления u (см. расстояния для протеиновых данных на основе **расстояния Дейхофа** (гл. 23) на множестве из 20 аминокислот).

Лингвистическое расстояние

В вычислительной лингвистике **лингвистическим расстоянием** (или **расстоянием диалектологии**) между диалектами X и Y является среднее для данной выборки S понятий **фонетическо словарное расстояние** между *родственными* (т.е. имеющими одинаковое значение) словами s_X и s_Y, представляющими одно и то же понятие $s \in X$ в X и Y соответственно.

Расстояние Стоувера (см. http://sakla.net/concordances/index.html) между фразами с одинаковыми ключевыми словами является суммой $\sum_{-n \le i \le +n} a_i x_i$, где $0 < a_i < 1$ и x_i – относительное число несовпадающих слов между фразами в движущемся окне. Фразы сначала выравниваются по общему ключевому слову на основе сравнения его контекстного использования; кроме того, наиболее редко употребляемые слова заменяются общим псевдознаком.

Расстояние тона

Тон – субъективный коррелят фундаментальной частоты (см. выше *шкалу Барка*) громкости (воспринимаемой интенсивности) и *мел-шкалы* (воспринимаемой высоты тона). *Музыкальная шкала* обычно представляет собой линейно упорядоченную совокупность звуков (нот). **Расстояние тона** (или **интервал, музыкальное расстояние**) – размер участка линейно-воспринимаемого непрерывного тона, ограниченного двумя тонами, как показано на данной шкале. Расстояние тона между двумя последовательными нотами на шкале называется *ступенью звукоряда*.

Сегодня в западной музыке чаще всего применяется *хроматическая шкала* (октава из 12 нот) с равномерной темперацией, т.е. разделенная на 12 одинаковых ступеней с соотношением между любыми двумя соседними частотами, равным $\sqrt[12]{2}$. Ступенью звукоряда в этом случае является *полутон*, т.е. расстояние между двумя соседними клавишами (черной и белой) пианино. **Расстояние между нотами**, имеющими частоты f_1 и f_2, составляет $12 \log_2\left(\frac{f1}{f2}\right)$ полутонов.

Число MIDI (цифровой интерфейс для музыкальных инструментов) для фундаментальной частоты f определяется как $p(f) = 69 + 12 \log_2 \frac{f}{440}$. Расстояние между нотами, выраженное в числах MIDI, становится **натуральной метрикой** $|m(f_1) - m(f_2)|$ на $\mathbb{R}$. Это удобное расстояние тона, поскольку оно соответствует физическому расстоянию на клавишных инструментах и психологическому расстоянию, как это измерено экспериментально и понимается музыкантами.

Расстояния между ритмами

Временная шкала ритма (музыкальная структура), помимо стандартной нотной записи, представляется следующими способами, применяемыми в вычислительном анализе музыки.

1. Как бинарный вектор $x = (x_1, ..., x_m)$, состоящий из m временных интервалов (одинаковых на временной шкале), где $x_i = 1$ обозначает продолжительность звучания ноты, а $x_i = 0$ – паузу. Так, например, пять 12/8 метрических временных шкал музыки фламенко представлены как пять бинарных последовательностей длины 12.

2. Как *вектор тона* $q = (q_1, ..., q_n)$ абсолютной высоты тона q_i и вектор разности тона $p = (p_1, ..., p_{n+1})$, где $p_i = q_{i+1} - q_i$ представляет количество полутонов (положительных или отрицательных) от q_i до q_{i+1}.

3. Как *интервальный* вектор *между вступлениями* $t = (t_1, ..., t_n)$, состоящий из n интервалов между последовательными вступлениями.

4. Как *хронотомическое представление*, которое в виде гистограммы отображает t как последовательность квадратов со сторонами $t_1, ..., t_n$; такое отображение можно рассматривать как кусочно-линейную функцию.

5. Как *вектор различия ритмов* $r = (r_1, ..., r_{n-1})$, где $r_i = \dfrac{t_{i+1}}{t_i}$.

Примерами общих **расстояний между ритмами** является хэммингово расстояние, **метрика свопа** (см. гл. 11), **расстояние бульдозера** между их заданными векторными представлениями.

Евклидово расстояние интервальных векторов есть евклидово расстояние для двух интервальных векторов между вступлениями. **Хронотонное расстояние** Густафсона является разновидностью l_1-расстояния между этими векторами с использованием хронотонного представления.

Расстояние отношения интервалов Койла–Шмулевича определяется как

$$1 - n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\max\{r_i, r_i'\}}{\min\{r_i, r_i'\}}.$$

где r и r' – векторы разности ритмов двух ритмов (см. обратная **Подобность Ружички**, гл. 17).

Акустические расстояния

Длина волны – расстояние, которое звуковая волна проходит до завершения полного цикла. Это расстояние измеряется по перпендикуляру к фронту волны в направлении ее распространения между пиком синусоидальной волны и следующим соответствующим пиком. Длину волны любой частоты можно определить путем деления скорости звука (331,4 м/с на уровне моря) в среде на фундаментальную частоту.

Поле в дальней зоне – часть поля акустической волны, в которой звуковые волны могут рассматриваться как плоские и звуковое давление уменьшается обратно пропорционально расстоянию от источника звука. Оно соответствует уменьшению силы звука примерно на 6 дБ на каждое удвоение расстояния.

Поле в ближней зоне – часть поля акустической волны (обычно на удалении двух длин волн от источника), где отсутствует простое отношение между уровнем звука и расстоянием.

Близостный эффект – аномалия низких частот, характеризующаяся их усилением при поднесении направленного микрофона слишком близко к источнику звука.

Критическое расстояние – расстояние от источника звука, на котором прямой звук (непосредственно от источника) и реверберирующий звук (прямой звук, отраженный от стен, потолка, пола и др.) одинаковы по уровню интенсивности.

Расстояние нечувствительности – минимальное расстояние чувствительности ультразвукового **датчика близости**.

Акустическая метрика – термин, используемый иногда для обозначения некоторых расстояний между гласными звуками; например, евклидова расстояния между векторами формантных частот произнесенного и заданного гласного звука (не смешивать с понятием акустических метрик в общей теории относительности и квантовой гравитации, гл. 24).

Глава 22

Расстояния в Интернете и родственных сетях

22.1. СЕТИ, НЕ ЗАВИСИМЫЕ ОТ ШКАЛ

Сеть – это граф, ориентированный или неориентированный, с положительным числом (весом), поставленным в соответствие каждой из его дуг или ребер. Реальные сложные сети обычно обладают огромным количеством вершин N и являются разреженными, т.е. с относительно малым количеством ребер.

Интерактивные сети (Интернет, Web, социальные сети и т.п.) имеют тенденцию быть сетями "тесного мира" [Watt99], т.е. находятся между обычными геометрическими решетками и случайными графами в следующем смысле: обладают большим *коэффициентом кластеризации* (т.е. вероятностью того, что два различных соседа данной вершины являются соседними) как решетки, тогда как среднее расстояние пути между двумя вершинами будет малым, около $\ln N$, как в случайном графе.

Основным частным случаем сети тесного мира является **сеть, независимая от шкалы** [Bara01], в которой распределение вероятностей, скажем, для вершины иметь степень k равно $k^{-\gamma}$ для некоей положительной константы γ, которая обычно принадлежит отрезку [2, 3]. Эта *степенная зависимость* влечет за собой то, что очень немногие вершины, называемые хабами (коннекторами, супер-распределителями), являются более связанными, чем другие вершины. Распределения со степенной зависимостью (или **зависимостью большой дальности**, *тяжелым* "*хвостом*") в пространстве или времени наблюдались у многих явлений природы (как физических, так и социальных).

Расстояние соавторства

Расстояние соавторства – это **метрика пути** (http://www.ams.org/msnmain/cgd/) *графа коллективного соавторства*, имеющего порядка 0,4 млн вершин (авторов, содержащихся в базе данных Mathematical Reviews), где xy является ребром, если авторы x и y – соавторы публикации из общего количества 2 млн, занесенных в эту базу данных. Вершина наибольшей степени, 1486 соответствует математику Полю Эрдешу; *индекс Эрдеша* того или иного математика – это его расстояние соавторства до Поля Эрдеша.

Метрика соавторства Бара (http://www.okland.edu/enp/barr.pdf) является **расстоянием сопротивления** (из гл. 15) в следующем расширении графа сотрудничества. Сначала ставится сопротивление 1 Ом между любыми двумя авторами для каждой публикации двух соавторов. Затем для каждой совместной публикации n авторов, $n > 2$, добавляется новая вершина и соединяется через $\frac{n}{4}$-омное сопротивление с каждым из соавторов.

Расстояние со-звездность

Расстояние со-звездности – это **метрика пути** *голливудского графа*, который имеет 250 тыс. вершин (актеров по перечню базы данных фильмов в Интернете), где xy является ребром, если актеры x и y снимались вместе в одном художественном кинофильме. Вершинами наибольшего порядка являются Кристофер Ли и Кевин Бэкон; например, в игре "Эффект Кевина Бэкона" (*Six degrees of Kevin Bacon*) используется *индекс Бэкона*, т.е. расстояние со-звездности до этого актера.

В качестве аналогичных популярных примеров таких социальных не зависимых от шкал сетей можно привести графы музыкантов (которые играли в составе одного ансамбля), бейсболистов (игравших в одной команде), научных публикаций (которые цитируют друг друга), шахматистов (игравших друг с другом), графы обмена письмами, знакомств между студентами в колледже, членства в совете директоров коммерческой организации, сексуальных отношений между членами данной группы. Метрика пути последней сети называется **сексуальным расстоянием**. Другими исследуемыми сетями, не зависимыми от шкал, являются сети авиасообщений, сети сочетаний слов в языке, сеть энергетической системы Запада США, сети датчиков, сеть нейронов червя, сети генной коэкспрессии, сети реакций между протеинами и метаболические сети (между двумя веществами ставится ребро, если между ними происходит реакция посредством энзимов).

Опережающее квазирасстояние

В ориентированной сети, в которой реберные веса соответствуют некоторой точке во времени, **опережающим квазирасстоянием** (**запаздывающим квазирасстоянием**) называется длина кратчайшего ориентированного пути, но только среди таких, на которых реберные веса последовательно увеличиваются (уменьшаются соответственно). Опережающее квазирасстояние применяется при построении эпидемиологических сетей (распространение болезни контактным способом или, скажем, распространение ереси в религиозном движении), тогда как обратное квазирасстояние свойственно файлообменным сетям P2P (peer-to-peer).

Центральность промежуточности

Для **геодезического** метрического пространства (X, d) (в частности, для **метрики пути** графа) **центральность промежуточности** точки $x \in X$ определена как

$$g(x) = \sum_{y,z \in X} \frac{\text{число наикратчайших } (y - z) \text{ путей через } x}{\text{число наикратчайших } (y - z) \text{ путей}}$$

и **функция расстояния-массы** есть функция $M\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{Q}$, определенная как

$$M(a) = \frac{|\{y \in X : d(x,y) + d(y,z) = a \text{ для некоторых } x, y \in X\}|}{|\{(x,z) \in X \times X : d(x,z) = a\}|}.$$

Как предполагается в [GOJKK02] многие независимые от шкал сети удовлетворяют степенному закону $g^{-\gamma}$ (для вероятности, что вершина имеет центральность промежуточности g), где γ равно 2 или $\approx$2,2 с функцией расстояния-массы $M(a)$, которая линейна или нелинейна соответственно. В случае линейности, например, $\frac{M(a)}{a} \approx 4,5$ для **метрики AS Интернета** и $\approx$1 для **квазиметрики Web гиперссылок**.

Расстояние дрейфа

Расстояние дрейфа – абсолютное значение разности между наблюдаемыми и фактическими координатами узла в NVE (виртуальном пространстве сети).

В моделях такого большого виртуального однорангового (peer-to-peer) пространства сети (например, в сетевых играх с большим количеством участников) пользователи представлены как координатные точки на плоскости (узлы), которые могут перемещаться дискретно *по времени* и каждая из которых обладает зоной видимости, называемой *областью интереса*. В NVE создается синтетический 3*D* мир, в котором каждому пользователю присваивается *аватара* (видеообраз абонента) для взаимодействия с другими пользователями или компьютером.

Термин **расстояние дрейфа** используется также применительно к потоку, проходящему сквозь материал в процессе производства автопокрышек.

Семантическая близость

Для слов в документе имеются синтаксические отношения ближнего действия и семантические корреляции дальнего действия. Основными сетями для работы с документами являются Web и библиографические базы данных (цифровые библиотеки, Web базы научных данных и т.п.); документы в них взаимосвязаны соответственно через гиперссылки, цитирование или соавторство.

Кроме того, некоторые семантические дескрипторы (ключевые слова) могут придаваться к документам для их индексации (классификации): по выбранной автором терминологии, титульным надписям, заголовкам журналов и т.п.

Семантическая близость между двумя ключевыми словами x и y есть их **подобность Танимото** $\frac{|X \cap Y|}{|X \cup Y|}$, где X и Y – множества документов с присвоенными индексами x и y соответственно. Их **расстояние ключевого слова** определяется как $\frac{|X \Delta Y|}{|X \cap Y|}$ и не является метрикой.

22.2. СЕМАНТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ В СЕТЕВЫХ СТРУКТУРАХ

Среди основных лексикографических сетей (таких, например, как WordNet, поисковая система Medical Search Headings, Тезаурус Рожта, Словарь современного английского языка Лонгмана) сеть WordNet является наиболее популярным лексическим ресурсом, используемым в процессах обработки естественного языка и компьютерной лингвистике. Сеть WordNet (см. http://wordnet.princeton.edu) – интерактивная словарная база данных, в которой существительные, глаголы, прилагательные и наречия английского языка организованы в *синонимические множества*, каждое из которых представляет одно базовое лексическое понятие. Два таких множества могут быть связаны семантически одной из следующих связок: связка снизу вверх x (*гипоним*) *ЕСТЬ* y (*гипероним*), связка сверху вниз x (мероним) *СОДЕРЖИТ* y (*холоним*), горизонтальная связка, выражающая большую часть совместного употребления x и y (*антонимия*), и т.д. связки ЕСТЬ (*IS-A*) индуцируют частичный порядок, называемый *IS-A* таксономией. Версия 2.0 WordNet содержит 80 000 понятий существительного и 13 500 понятий глагола, организованных в 9 и 554 отдельных *IS-A* иерархических структуры соответственно. В полученном ориентированном ациклическом графе понятий для любых двух синонимических множеств (или понятий) x и y пусть $l(x, y)$ – длина кратчайшего пути между ними с использованием только связок *IS-A* и пусть $LPS(x, y)$ – их наименьший общий предшествующий элемент (предок) в *IS-A* таксономии. Пусть $d(x)$ – глубина x (т.е. его расстояние от корня в *IS-A* таксономии) и пусть $D = \max_x d(x)$. Ниже приводится перечень основных семантических подобностей и расстояний.

Подобность пути

Подобность пути между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{path}(x, y) = (l(x, y))^{-1}.$$

Подобность Ликока–Чодороу

Подобность **Ликока–Чодороу** между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{lch}(x, y) = -\ln \frac{l(x, y)}{2D},$$

и **расстояние понятий** между ними определяется как $\dfrac{l(x, y)}{D}$.

Подобность Ву–Палмера

Подобность Ву–Палмера между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{wup}(x, y) = \frac{2d(LPS(x, y))}{d(x) + d(y)}.$$

Подобность Резника

Подобность Резника между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{res}(x, y) = -\ln p(LPS(x, y)),$$

где $p(z)$ – вероятность встретить понятие z в большом объеме, а $-\ln p(z)$ – *информационное содержание z.*

Подобность Лина

Подобность Лина между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{lin}(x, y) = \frac{2 \ln p(LPS(x, y))}{\ln p(x) + \ln p(y)}.$$

Расстояние Цзяня–Конрата

Расстояние Цзяня–Конрата между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\text{jcn}(x, y) = 2\ln p(LPS(x, y)) - (\ln p(x) + \ln p(y)).$$

Подобности Леска

Глоссарием синонимичного множества z является элемент этого множества, который определяет или поясняет основное понятие. **Подобности Леска** – такие подобности, которые определяются как функция наложения глоссариев соответствующих понятий; так, например, **наложением глоссариев** называется величина

$$\frac{2t(x, y)}{t(x) + t(y)},$$

где $t(z)$ – количество слов синонимического множества z, а $t(x, y)$ – количество общих слов в x и y.

Подобность Херста–Сент–Онджа

Подобность Херста–Сент–Онджа между синонимичными множествами x и y определяется как

$$\mathrm{hso}(x, y) = C - L(x, y) - ck,$$

где $L(x, y)$ – длина кратчайшего пути между x и y при использовании всех связок, k – количество изменений направления этого пути и C, c – константы.

Расстояние Херста–Сент–Онджа определяется как $\dfrac{L(x,y)}{k}$.

22.3. РАССТОЯНИЯ В ИНТЕРНЕТЕ И WEB

Рассмотрим подробно графы веб-сети и Web Интернета, которые обладают свойством "тесного мира" и независимости от шкал.

Интернет – общедоступная глобальная компьютерная сеть, которая сформировалась на базе Арпанет (сети коммутации пакетов, созданной в 1969 г. для нужд Министерства обороны США), NSFNet, Usenet, Bitnet и ряда других сетей. В 1995 г. Национальный научный фонд США отказался от обладания сетью Интернет.

Ее узлами являются маршрутизаторы, т.е. устройства, которые пересылают пакеты данных по сетевым каналам от одного компьютера к другому с использованием протоколов IP (Интернет-протокол межсетевого взаимодействия), TCP и UDP (протоколы передачи данных) и построенных над ними протоколов HTTP, Telnet, FTP и многих других *протоколов* (т.е. технических спецификаций передачи данных). Маршрутизаторы размещаются в местах *межсетевых шлюзов*, т.е. в таких местах, где соединяются не менее двух сетей. Связи, соединяющие узлы – различные физические соединители, такие как телефонные провода, оптоволоконные кабели и спутниковые каналы. В Интернете используется *пакетная коммутация*, т.е. данные (фрагментированные, если требуется) пересылаются не по предварительно установленному пути, а с учетом оптимального использования имеющейся *полосы частот* (со скоростью передачи информации в млн бит/с) и минимизации *времени запаздывания* (времени в миллисекундах, необходимого для получения запроса).

Каждому подключенному к Интернету компьютеру обычно присваивается индивидуальный "адрес", называемый *IP адресом*. Количество возможных IP адресов ограничено величиной $2^{32} \approx 4{,}3$ млрд. Наиболее популярными приложениями, поддерживаемыми Интернетом, являются электронная почта, передача файлов, Web и некоторые мультимедиа.

Множеством вершин *графа IP адресов Интернета* являются IP адреса всех подключенных к Интернету компьютеров; две вершины являются смежными, если они подключены напрямую через маршрутизатор, т.е. дейтаграмма передачи проходит только через один *прыжок* (*сетевой сегмент*).

Сеть Интернет может быть разбита на административно автономные системы (AS) или домены. В каждой AS внутридоменная маршрутизация осуществляется по протоколу IGP (внутренний протокол маршрутизации), тогда как междоменная маршрутизация обеспечивается по протоколу BGP (пограничный протокол маршрутизации), который присваивает ASN (16-битовый) номер) каждой AS. AS *граф Интернета* имеет в качестве вершин AS (приблизительно 25 тыс. в 2007 г.), а его ребра представляют наличие одноранговых BGP связи между соответствующими AS.

Web ("Всемирная паутина", *WWW* или веб-сеть) является крупной частью содержания Интернета, состоящей из взаимосвязанных документов (ресурсов). Она соответствует протоколу HTTP (протокол передачи гипертекста) между браузером и сервером, протоколу HTML (язык гипертекстовой маркировки) кодирования информации для дисплея и URL (унифицированные указатели ресурсов), дающим единственный "адрес" Web страниц. Web начала свое существование в Европейском центре по ядерным исследованиям в 1989 г. и была передана в общественное пользование в 1993 г.

Web орграф – виртуальная сеть, узлы которой являются *документами* (т.е. статичными HTML страницами или их URL), которые соединены входящими или исходящими HTML гиперссылками.

Количество узлов Web орграфа составляло, по разным оценкам, между 15 и 30 млрд в 2007 г. Более того, рядом находится так называемая *глубокая* или *невидимая* Web, т.е. доступные для поиска базы данных (~300 тыс.) с количеством страниц (даже без учета содержания), предположительно в 500 раз превышающим количество статических Web страниц. Эти страницы не индексированы серверами поиска, их URL динамичные, и поэтому они могут быть вызваны только прямым запросом в реальном масштабе времени.

30 июня 2007 г. 1 143 109 925 пользователей (17,8% мировой популяции, включая 69,5% в Северной Америке и 39,8% в Европе) воспользовались Интернетом.

Существует несколько сотен тысяч *кибер-сообществ*, т.е. кластеров вершин Web орграфа, где плотность связей между членами сообщества гораздо выше аналогичного показателя для связей членов сообщества с остальным миром. Кибер-сообщества (группы клиентов, участники социальной сети, понятия в технической статье и т.п.) обычно концентрируются вокруг определенной тематики и содержат двудольный подграф *хабов-авторитетных источников*, в котором все хабы (меню и перечни ресурсов) указывают на все авторитетные источники (полезные страницы по данной тематике). Примерами новых медиа, созданных Web, являются: *блоги* (опубликованные в сети дневники), Википедия (открытая энциклопедия) и проектируемая консорциумом Web связь с метаданными.

В среднем вершины Web орграфа имеют размер 10 Кбит, степень выхода 7,2 и вероятность k^{-2} того, что степень выхода или степень входа равна k. Проведенное исследование [BKMR00] более 200 млн Web сраниц позволило приблизительно выделить наибольшую связную компоненту – "ядро" из 56 млн страниц и еще 44 млн связанных C ядром страниц (новичков?). Для случайно выбранных узлов x и y вероятность существования ориентированной цепи от x к y была равна 0,25 и средняя длина такой кратчайшей цепи (если таковая существует) была равна 16, тогда как максимальная длина кратчайшей цепи равнялась 28 в ядре и более 500 во всем графе.

Приведенные ниже расстояния являются примерами маршрутных метрик между *хвостами*, т.е. величинами, использующимися в алгоритмах маршрутизации в Интернете для сравнения возможных маршрутов. Примерами других таких мер являются задействование полосы частот, стоимость связи, надежность (вероятность потери пакетных данных). Упоминаются также основные **метрики качества**, связанные с компьютерами.

IP метрика Интернета

IP метрика Интернета (или *счет прыжков, метрика протокола RIP, длина IP пути*) – это **метрика пути** в *IP графе Интернета*, т.е. минимальное число прыжков

(или, эквивалентно, маршрутизаторов, представленных их IP адресами), необходимых для передачи пакета данных. Протоколом *RIP* предписывается максимальное расстояние в сети – 15, и недостижимость обозначается как путь длины 16.

AS метрика Интернета

AS метрика Интернета (или *BGP-метрика*) – это **метрика пути** в *AS графе Интернета*, т.е. минимальное число ISP независимых (поставщиков услуг в сети Интернет), представленных своими AS, необходимыми для пересылки пакета данных.

Географическое расстояние

Географическим расстоянием называется **расстояние по дуге большого круга** на поверхности Земли от клиента x (получатель) до сервера y (источник). Однако в силу экономических соображений передача данных не всегда осуществляется по такой геодезической линии; например, большая часть данных из Японии в Европу поступает через США.

Расстояние RTT

Расстояние RTT является временем полной передачи между x и y в миллисекундах, измеренным за предыдущий день; (см. [HFPMC02] о разновидностях данного расстояния и связи с вышеприведенными тремя метриками).

Расстояние административных расходов

Расстоянием административных расходов называется номинальное число (оценивающее надежность информации о маршруте), присваиваемое сетью маршруту между x и y. Например, компания Cisco присваивает значения 0, 1, …, 200, 225 для подключенного интерфейса, статического маршрута, …, внутреннего протокола BGP, Неизвестного соответственно.

Метрики DRP

В структуре системного администрирования (DD) компании Cisco используется (с приоритетами и весами) **расстояние административных расходов, метрика случайности** (выбор случайного номера для каждого IP адреса) и метрики **DRP** (протокол прямого отклика). Метрики DRP запрашивают у всех маршрутизаторов с протоколом DRP одно из следующих расстояний:

1) **внешнюю метрику DRP**, т.е. количество прыжков (хопов) по протоколу BGP (пограничный протокол маршрутизации) между запрашивающим услугу пользователем и агентом сервера DRP;

2) **внутреннюю метрику DRP**, т.е. количество прыжков по протоколу IGP (внутренний протокол маршрутизации) между агентом сервера DRP и ближайшим пограничным маршрутизатором на ребре автономной системы;

3) **метрику сервера DRP**, т.е. количество прыжков по протоколу IGP между агентом сервера DRP и ассоциированным сервером.

Метрики томографии сети

Рассмотрим сеть с фиксированным протоколом маршрутизации, т.е. *сильно связный орграф* $D = (V, E)$ с единственным ориентированным путем $T(u, v)$, выбранным для любой пары (u, v) вершин. Протокол маршрутизации описывается бинарной *матрицей маршрутизации* $A = ((a_{ij}))$, где $a_{ij} = 1$, если дуга $e \in E$ с индексом i принадлежит ориентированному пути $T(u, v)$ с индексом j. Хэммингово

расстояние между двумя строками (столбцами) матрицы A называется **расстоянием между соответствующими дугами** (ориентированными путями) сети.

Возьмем две сети с одинаковыми орграфами, но различными протоколами маршрутизации с матрицами маршрутизации A и A' соответственно. Тогда **полуметрика протокола маршрутизации** [Var04] есть наименьшее хэммингов расстояние между матрицей A и матрицей B, полученной из путем A' перестановок строк и столбцов (обе матрицы рассматриваются как строки).

Квазиметрика Web гиперссылки

Квазиметрикой Web гиперссылки (или *счетчиком кликов*) называется длина кратчайшего ориентированного пути (если таковое существует) между двумя Web страницами (вершинами Web орграфа), т.е. минимально необходимое число кликов мышки в данном графе.

Web квазирасстояние среднего числа кликов

Web квазирасстояние среднего числа кликов между двумя Web страницами x и y в Web орграфе [YOI03] есть минимум $\sum_{i=1}^{m} \ln p \frac{z_i^+}{\alpha}$ по всем ориентированным путям $x = z_0, z_1, ..., z_m = y$, соединяющим x и y, где z_i^+ – степень выхода страницы z_i. Параметр α равен 1 или 0,85, тогда как p (средняя степень выхода) равна 7 или 6.

WebX квазирасстояние Доджа–Шиоде

WebX квазирасстояние Доджа–Шиоде между двумя Web страницами x и y в Web орграфе есть число $\frac{1}{h(x, y)}$, где $h(x, y)$ – число кратчайших ориентированных путей, соединяющих x и y.

Метрики Web подобности

Метрики Web подобности образуют семейство индикаторов, применяемых для измерения степени взаимосвязи (содержания, в связях ссылок или/и использовании) между двумя Web страницами x и y. Например, тематическое сходство частично совпадающих терминов, *совместные ссылки* (количество страниц, где обе даются как гиперссылки), *спаренность библиографичеких данных* (количество общих гиперссылок) и *частотность совместного появления* $\min\{P(x \mid y), P(y \mid x)\}$, где $P(x \mid y)$ есть вероятность того, что посетивший страницу y посетит также страницу x.

В частности, **метрики поисково-центрического изменения** – метрики, используемые поисковыми серверами в Web сети для измерения степени различия между двумя версиями x и y Web страницы. Если X и Y являются множествами всех слов (исключая маркировку HTML) в x и y соответственно, то **словарное расстояние между страницами** есть **расстояние Дайса**, т.е. равно

$$\frac{|X \Delta Y|}{|X| + |Y|} = 1 - \frac{2|X \cup Y|}{|X| + |Y|}.$$

Если v_x и v_y являются взвешенными **TF-IDF** (частотность – обратная частотность документа) векторными представлениями x и y, то их **расстояние косинуса между страницами** дается как

$$1 - \frac{\langle v_x, v_y \rangle}{\| v_x \|_2 \cdot \| v_y \|_2}.$$

Метрика потерянности

Пользователи, "путешествующие" по гипертекстовым системам, нередко испытывают *дезориентацию* (тенденцию к потере чувства местоположения и направления в нелинейном документе) и *когнитивную перегрузку* (требуются дополнительные усилия и концентрация внимания для одновременной работы по нескольким задачам / направлениям). Пользователь теряет общее представление о структуре документа и своем рабочем пространстве.

Метрика потерянности Смита измеряет это как

$$\left(\frac{n}{s}-1\right)^2+\left(\frac{r}{n}-1\right)^2,$$

где s – общее число узлов, посещенных в ходе поиска, n – количество различных узлов среди них и r – количество узлов, которые необходимо посетить для выполнения задачи.

Метрики доверия

В компьютерной безопасности **метрика доверия** – мера для оценки сертификатов множества одноранговых узлов сети, а в социологии – мера определения степени доверия членов группы к одному из них. Так, например, метрика доступа в системе UNIX представляет собой комбинацию только трех видов доступа к ресурсу: *чтение, запись* и *выполнение*. Более детальная метрика доверия *Advogato* (используемая для ранжирования в среде разработчиков программного обеспечения с открытыми исходными кодами) основывается на силе доверия, обеспечиваемой тем, что одно лицо выдает сертификат о другом. Другими примерами служат метрики доверия Technorati, TrustFlow, Richardson и др., Mui и др., eBay.

Метрики программного обеспечения

Метрика программного обеспечения – мера качества программного обеспечения, характеризующая уровень сложности, понятности, проверяемости и доступности кода.

Метрика архитектуры – мера оценки качества архитектуры программного обеспечения (разработки сложных систем программного обеспечения), которая указывает на связность (стыкуемость составных объектов), сцепление (внутреннее взаимодействие), абстрактность, нестабильность и т.п.

Метрики локальности

Метрикой локальности называется физическая метрика, измеряющая в глобальном масштабе местоположение программных компонентов, их вызовы и глубину вложенных вызовов как

$$\frac{\sum_{i,j} f_{ij} d_{ij}}{\sum_{i,j} f_{ij}},$$

где d_{ij} – расстояние между вызывающими компонентами i и j, f_{ij} – частота вызовов от i до j. Если компоненты программы примерно одинаковы по размерам, то берется $d_{ij} = | i - j |$. В общем случае, как предложили Чзан и Горла, надо различать *опережающие* вызовы по отношению к запрашиваемой компоненту и *запаздывающие* (другие) вызовы. Пусть $d_{ij} = d'_i + d'_{ij}$, где d'_i – количество линий

кода между вызовом и окончанием i, если вызов опережающий, и между началом i и вызовом, иначе, при этом $d''_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j-1} L_k$, если вызов опрежающий, и $d''_{ij} = \sum_{k=i+1}^{i-1} L_k$, иначе. Здесь L_k – количество линий компоненты k.

Дистанционное действие (в вычислительных процессах)

В вычислительных процессах **дистанционное действие** является классом проблем программирования, в котором состояние одной части программной структуры данных варьируется из-за труднораспознаваемых операций в другой части программы (см. **закон Деметра**, гл. 28).

Часть VI

РАССТОЯНИЯ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Глава 23

Расстояния в биологии

Расстояния в *биологии* используются главным образом для целей фундаментальной классификации, например, для реконструкции эволюционного развития организмов, в виде филогенетических деревьев. При классическом подходе эти расстояния базировались на сравнительной морфологии и физиологии. Прогресс современной молекулярной биологии позволил использовать нуклеатидные и/или аминокислотные последовательности для оценки расстояний между генами, белками, геномами, организмами, видами и т.д.

ДНК представляет собой последовательность *нуклеотидов* (или кислот ядра) A, T, G и C и может рассматриваться как слово над алфавитом из четырех букв. Нуклеотиды A, G (сокращенно от слов *аденин* и *гуанин*) называются *пуринами*, тогда как T, G (сокращенно от тимин и цитозин) называются *пирамидинами* (в РНК это урацил U вместо T). Две нити ДНК удерживаются вместе (в виде двойной спирали) слабыми водородными связями между соответствующими нуклеотидами (непременно *пурином* и *пиримидином*) в структуре нитей. Эти пары называются *парами оснований*.

Транзиция – замещение пары оснований таким образом, что одна пара пурин/пирfмидин заменяется на другую; например, GC заменяется на AT. *Трансверсия* – замещение пары оснований таким образом, что одна пара пурин/пирамидин заменяется парой пирамидин/пирин или наоборот; например, GC заменяется на TA.

Молекулы ДНК встречаются (в ядре клеток эукариота) в виде длинных нитей, которые называются *хромосомами*. Большинство клеток человеческого организма содержат 23 пары хромосом, по одному набору из 23 хромосом от каждого родителя; *гамета* человека (мужская половая клетка или яйцо) есть *гаплоид*, т.е. содержит только один набор из 23 хромосом. У (нормальных) мужчины и женщины различается только 23-я пара хромосом: *XY* у мужчин и *XX* у женщин.

Ген – отрезок ДНК, который кодирует (посредством транскрипции на РНК и последующего переноса) белок или молекулу РНК. Местоположение гена на его специальной хромосоме называется *локусом*. Различные разновидности (состояния) гена называются *аллелями*. Гены занимают не более 2% человеческой ДНК; функциональность, если таковая имеется, остальной части неизвестна.

Белок – большая молекула, являющаяся цепочкой *аминокислот*; среди них присутствуют гормоны, катализаторы (энзимы), антитела и т.д. Всего имеется 20 аминокислот; трехмерная конфигурация белка определяется (линейной) последовательностью аминокислот, т.е. словом алфавита из 20 букв.

Генетический код есть универсальное для (почти) всех организмов соответствие между некоторыми *кодонами* (т.е. упорядоченными тройками нуклеотидов) и 20 аминокислотами. Он выражает *генотип* (информацию, содержащуюся в генах, т.е. в ДНК) как *фенотип* (белки). Три терминирующих кодона (UAA, UAG и UGA) означают окончание белка; любые два из остальных 61 кодона называются *синонимичными*, если соответствуют одним и тем же аминокислотам.

В *геноме* заложена вся генетическая структура вида или живого организма. Например, геном человека представляет собой набор из 23 хромосом, включающих около 3 млрд пар оснований ДНК и организованных в 20–25 тыс. генов.

Модель эволюции, опирающаяся на бесконечные аллели (*IAM*) предполагает, что аллель может изменяться из любого конкретного состояния в любое другое состояние. Это соответствует первичной роли генетического дрейфа (т.е. случайных вариаций частоты генов от поколения к поколению), особенно характерного для небольших популяций в ходе естественного отбора (поэтапных мутаций). Модель *IAM* удобна для получения данных по аллозимам (*аллозим* – форма белка, который кодирован одним аллелем в конкретном локусе гена). Модель эволюции, основанная на поэтапных мутациях (*SMM*) более удобна для работы с данными микросателлитов (наиболее популярными в последнее время). *Микросателлиты* – сильно различающиеся повторяющиеся короткие последовательности ДНК. Частота их мутаций равна 1 на 1000–10 000 репликаций, а для аллозимов этот показатель составляет 1/1 000 000. Оказывается, что микросателлиты сами по себе содержат достаточно информации для построения генеалогического дерева организма. Данные микросателлитов (например, по отпечаткам ДНК) состоят из ряда повторяющихся микросателлитов для каждого аллеля. Другим распространенным молекулярным маркером является малая субъединица рибосомной РНК (SSU рРНК), поскольку гены рРНК играют существенную роль для выживания любого организма и их последовательности почти не изменяются.

Эволюционное расстояние между двумя популяциями (или таксонами) является мерой генетического разнообразия на основе оценки *времени расхождения*, т.е. времени, прошедшего с тех пор, когда данные популяции существовали как одно целое.

Филогенетическое расстояние (или **генеалогическое расстояние**) между двумя таксонами – *длина ветви*, т.е. минимальное число ребер, разделяющих их на филогенетическом дереве.

Иммунологическое расстояние между двумя популяциями – мера эффективности реакций антиген – антитело, показывающая эволюционное расстояние между ними.

23.1. ГЕНЕТИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ О ЧАСТОТЕ ГЕНОВ

В этом разделе **генетическое расстояние** между популяциями используется как способ измерения степени эволюционного различия путем подсчета количества аллельных замещений по локусам.

Популяция представлена вектором двойной индексации $x = (x_{ij})$ с $\sum_{j=1}^{n} m_j$ компонентами, где x_{ij} – частота i-го *аллеля* (индекс состояния гена) при j-м локусе гена (положения гена на хромосоме), m_j – количество аллелей j-го локуса, а n – количество рассматриваемых локусов.

Обозначим через $\sum$ сумму по всем i и j. Поскольку x_{ij} есть частота, то выполняются условия $x \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m_j} x_{ij} = 1$.

Расстояние общих аллелей Стефенса и др.

Расстояние общих аллелей Стефенса и др. между популяциями определяется как

$$1-\frac{\overline{SA(x,y)}}{\overline{SA(x)}+\overline{SA(y)}},$$

где для двух отдельных индивидов a и b SA(a, b) обозначает число общих аллелей, суммированные по всем n локусам и поделенное на $2n$, тогда как $\overline{SA(x)}$, $\overline{SA(y)}$ и $\overline{SA(x,y)}$ есть $SA(a, b)$, усредненное по всем парам (a, b) с индивидами a и b в популяциях, представленных как x и y и соответственно между ними.

Расстояние Dps

Расстояние Dps между популяциями определяется как

$$-\ln\frac{\sum\min\{x_{ij},y_{ij}\}}{\sum_{j-1}^{n}m_j}.$$

Расстояние Превости–Оканы–Алонсо

Расстояние Превости–Оканы–Алонсо между популяциями определяется (см. L_1-метрика, гл. 1) как

$$\frac{\sum|x_{ij}-y_{ij}|}{2n}.$$

Расстояние Роджера

Расстояние Роджера – метрика между популяциями, определенная как

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{m_j}(x_{ij}-y_{ij})^2}.$$

Расстояние хорды Кавальи–Сфорза–Эдвардса

Расстояние хорды Кавальи–Сфорза–Эдвардса между популяциями определяется как

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-\sum_{i=1}^{m_j}\sqrt{x_{ij}y_{ij}}}.$$

Это расстояние является метрикой (см. **расстояние Хеллинджера**, гл. 17).

Расстояние дуги Кавальи–Сфорза

Расстояние дуги Кавальи–Сфорза между популяциями определяется как

$$\frac{2}{\pi}\arccos\left(\sum\sqrt{x_{ij}y_{ij}}\right)$$

(см. **расстояние Фишера**, гл. 14).

Расстояние Нея–Таджимы–Татено

Расстояние Нея–Таджимы–Татено между популяциями определяется как

$$1-\frac{1}{n}\sum\sqrt{x_{ij}y_{ij}}\,.$$

Минимальное генетическое расстояние Нея

Минимальное генетическое расстояние Нея между популяциями определяется как

$$\frac{1}{2n}\sum(x_{ij}-y_{ij})^2.$$

Стандартное генетическое расстояние Нея

Стандартное генетическое расстояние Нея между популяциями определяется как

$$-\ln I,$$

где I – *нормализованная идентификация гена* по Нею, определенная как $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}$ (см. **расстояния Бхаттачарья** (гл. 14) и **угловая полуметрика** (гл. 17).

χ^2 расстояние Сангви

χ^2 расстояние Сангви между популяциями определяется как

$$\frac{2}{n}\sum\frac{(x_{ij}-y_{ij})^2}{x_{ij}+x_{ij}}.$$

Расстояние *F*-статистики

Расстояние *F*-статистики между популяциями определяется как

$$\frac{\sum(x_{ij}-y_{ij})^2}{2\left(n-\sum x_{ij}y_{ij}\right)}.$$

Расстояние нечеткого множества

Расстояние нечеткого множества Дюбуа–Прейда между популяциями определяется как

$$\frac{\sum 1_{x_{ij}\neq y_{ij}}}{\sum_{j=1}^{n} m_j}.$$

Расстояние родства

Расстояние родства между популяциями определяется как

$$-\ln\langle x,y\rangle,$$

где скалярное произведение $\langle x,y\rangle$ называется *коэффициентом родства*.

Расстояние Рейнольдса–Вейра–Кокерхэма

Расстояние Рейнольдса–Вейра–Кокерхэма (или *расстояние родословной*) между популяциями определяется как

$$-\ln(1-\theta),$$

где **коэффициент родословной** θ двух индивидов (или двух популяций) является вероятностью того, что случайно выбранный аллель одного индивида (или генетического фонда одной популяции) будет *идентичен по наследованию* (т.е. соответствующие гены являются физическими копиями одного и того же анцестрального гена) случайно выбранному аллелю другого. Два гена могут быть идентичными по состоянию (т.е. аллелями с одинаковым индексом), но не идентичными по наследованию. Коэффициент родословной θ двух индивидов является **коэффициентом инбридинга** (родственного спаривания) их последующих поколений.

Расстояние Гольдштейна и др.

Расстояние Гольдштейна и др. между популяциями определяется как

$$\frac{1}{n}\sum (ix_{ij} - iy_{ij})^2.$$

Расстояние среднего квадрата

Расстояние среднего квадрата между популяциями определяется как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1\le i<j\le m_j}(i-j)^2 x_{ik}y_{jk}\right).$$

Пошаговое пространство Шрайвера–Бурвинкля

Пошаговое пространство Шрайвера–Бурвинкля между популяциями определяется как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i,j\le m_k}|i-j|(2x_{ik}y_{jk} - x_{ik}x_{jk} - y_{ik}y_{jk}).$$

23.2. РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ О ДНК

Расстояния между ДНК или белковыми последовательностями обычно измеряются в виде замещений, т.е. мутаций между ними. ДНК-*последовательность* рассматривается как последовательность $x = (x_1, ..., x_n)$ над алфавитом из четырех букв – нуклеотидов A, T, C, G; $\sum$ обозначает $\sum_{i=1}^{n}$.

Число различий

Число различий ДНК – просто метрика Хэмминга между последовательностями ДНК:

$$\sum 1_{x_i \ne y_i}.$$

***p*-Расстояние**

***p*-Расстояние** d_p между ДНК-последовательностями определяется как

$$\frac{\sum 1_{x_i \ne y_i}}{n}.$$

Нуклеотидное расстояние Джукеса–Кантора

Нуклеотидное расстояние Джукеса–Кантора между ДНК-последовательностями определяется как

$$-\frac{3}{4}\ln\left(1-\frac{4}{3}d_p(x,y)\right),$$

где d_p – ***p*-расстояние**. Если скорость замещения изменяется в соответствии с гамма-распределением и a является параметром, описывающим форму распределения, то **гамма-расстояние для модели Джукеса–Кантора** определяется как

$$\frac{3a}{4}\left(\left(1-\frac{4}{3}d_p(x,y)\right)^{-1/a}-1\right).$$

Расстояние Таджимы–Нея

Расстояние Таджимы–Нея между ДНК-последовательностями определяется как

$$-b\ln\left(1-\frac{d_p(x,y)}{b}\right),$$

где

$$b=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=A,T,C,G}\left(\frac{1_{x_i=y_i=j}}{n}\right)^2+\frac{1}{c}\sum\left(\frac{1_{x_i\neq y_i}}{n}\right)^2\right)$$

и

$$c=\frac{1}{2}\sum_{i,k\in\{A,T,G,C\}j\neq k}\frac{\left(\sum 1_{(x_i,y_i)-(j,k)}\right)^2}{\left(\sum 1_{x_i=y_i=j}\right)\left(\sum 1_{x_i=y_i=k}\right)}.$$

Пусть $P=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:\{x_i,y_i\}=\{A,G\}$ или $\{T,\ C\}\}|$, и $Q=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:\{x_i,y_i\}=\{A,T\}$ или $\{G,\ C\}\}|$, т.е. P и Q являются частотами соответственно транзиции и трансверсии оснований между x и y. Приводимые ниже четыре расстояния даются в терминах величин P и Q.

Гамма-расстояние Джина–Нея

Гамма-расстояние Джина-Нея между последовательностями ДНК определяется как

$$\frac{a}{2}\left(1-2P-Q)^{1/a}+\frac{1}{2}(1-2Q)^{-1/a}-\frac{3}{2}\right),$$

где скорость замещения варьируется вместе с гамма-распределением и a является параметром, описывающим форму распределения.

2-параметрическое расстояние Кимуры

2-параметрическое расстояние Кимуры между последовательностями ДНК определяется как

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2P-Q)-\frac{1}{2}\ln\sqrt{1-2Q}.$$

3-параметрическое расстояние Тамуры

3-параметрическое расстояние Тамуры между последовательностями ДНК определяется как

$$-b\ln\left(1-\frac{P}{b}-Q\right)-\frac{1}{2}(1-b)\ln(1-2Q),$$

где $f_x=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n: x_i=G \text{ или } C\}|$, $f_y=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n: y_i=G \text{ или } C\}|$ и $b=f_x+f_y-2f_xf_y$.

В случае $f_x=f_y=\frac{1}{2}$ (следовательно, для $b=\frac{1}{2}$) это является **2-параметрическим расстоянием Кимуры**.

Расстояние Тамуры–Нея

Расстояние Тамуры–Нея между последовательностями ДНК определяется как

$$-\frac{2f_Af_G}{f_R}\ln\left(1-\frac{f_R}{2f_Af_G}P_{AG}-\frac{1}{2f_R}P_{RY}\right)-\frac{2f_Tf_C}{f_Y}\ln\left(1-\frac{f_Y}{2f_Tf_C}P_{TC}-\frac{1}{2f_Y}P_{RY}\right)-$$

$$-2\left(f_Rf_Y-\frac{f_Af_Gf_Y}{f_R}-\frac{f_Tf_Cf_R}{f_Y}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2f_Rf_Y}P_{RY}\right),$$

где $f_j=\frac{1}{2n}\sum(1_{x_i=j}+1_{y_i=j})$ для $j = A,\ G,\ T,\ C$ и $f_R = f_A + f_G, f_T + f_C$, тогда как $P_{RY}=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:|\{x_i,y_i\}\cap\{A,G\}=|\{x_i,y_i\}\cap\{T,C\}|=1\}|$ (относительное число различий в трансверсиях). $P_{AG}=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:|\{x_i,y_i\}=\{A,G\}\}|$ (относительное число траназиций в пуринах) и $P_{TC}=\frac{1}{n}|\{1\le i\le n:|\{x_i,y_i\}=\{T,C\}\}|$ (относительное число транзиций в пирамидинах).

Метрика гибридизации Гарсона и др.

H-мера между двумя *n*-последовательностями ДНК *x* и *y* определяется как

$$H(x,y)=\min_{-n\le k\le n}\sum 1_{x_i\ne y^*_{i=k}},$$

где индексы $i + k$ взяты по модулю n, а y^* – реверсия y с последующей *комплементацией Ватсона–Крика*, т.е. обменом местами всех *A, T, G, C* и *T, A, C, G* соответственно.

ДНК-*куб* – любое максимальное множество n-последовательностей ДНК, в котором выполняется условие $H(x, y) = 0$ для любых двух последовательностей. **Метрика гибридизации Гарсона и др.** между ДНК-кубами *A* и *B* определяется как

$$\min_{x\in A,\,y\in B}H(x,y).$$

23.3. РАССТОЯНИЯ ДЛЯ ДАННЫХ О БЕЛКАХ

Белковая последовательность (или первичная белковая структура) рассматривается как последовательность $x = (x_1, ..., x_n)$ над 20-буквенным алфавитом из 20 видов аминокислот; Σ обозначает $\sum_{i=1}^{n}$.

Существует несколько понятий подобности/расстояния на множестве 20 видов аминокислот, которые основываются, например, на характеристиках гидрофильности, полярности, заряде, форме и т.п. Наиболее важной является 20×20 матрица *PAM250 Дейхофф*, которая выражает относительную мутабельность 20 видов аминокислот.

Расстояние PAM

Расстояние PAM (или **расстояние Дейхофф–Экка**, *величина PAM*) между белковыми последовательностями определяется как минимальное число принятых (т.е. уставшихся) точечных мутаций на 100 видов аминокислот, необходимых для преобразования одного белка в другой. 1 PAM – единица эволюции; она соответствует одной точечной мутации на 100 аминокислот. PAM значения 80, 100, 200, 250 соответствуют расстоянию (в процентах) 50, 60, 75, 92 между белками.

Число белковых различий

Число белковых различий – просто **метрика Хэмминга** между белковыми последовательностями:

$$\sum 1_{x_i \neq y_i}.$$

Амино *p*-расстояние

Амино *p*-расстояние (или *нескорректированное расстояние*) d_p между белковыми последовательностями определяется как

$$\frac{\sum 1_{x_i \neq y_i}}{n}.$$

Амино расстояние коррекции Пуассона

Амино расстояние коррекции Пуассона между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$-\ln(1 - d_p(x, y)).$$

Амино γ-расстояние

Амино γ-расстояние (или *коррекция γ-расстояния Пуассона*) между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$a((1 - d_p(x, y))^{-1/a} - 1),$$

где скорость замещения варьируется с $i = 1, ..., n$ в соответствии с γ-распределением и a является параметром, описывающих форму распределения. Для $a = 2{,}25$ и $a = 0{,}65$ получаем соответственно **расстояния Дейхофф** и **Гришина**. В некоторых приложениях это расстояние с $a = 2{,}25$ называется просто **расстоянием Дейхофф**.

Белковое расстояние Джукеса–Кантора

Белковое расстояние Джукеса–Кантора между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$-\frac{19}{20}\ln\left(1-\frac{20}{19}d_p(x,y)\right).$$

Белковое расстояние Кимуры

Белковое расстояние Кимуры между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p как

$$-\ln\left(1-d_p(x,y)-\frac{d_p^2(x,y)}{5}\right).$$

Расстояние Гришина

Расстояние Гришина d между белковыми последовательностями определяется с помощью **амино *p*-расстояния** d_p по формуле

$$\frac{\ln(1+2d(x,y))}{2d(x,y)}=1-d_p(x,y).$$

Расстояние *k*-мера Эдгара

Расстояние *k*-мера Эдгара между последовательностями $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ над сжатым аминокислотным алфавитом определяется как

$$\ln\left(\frac{1}{10}+\frac{\sum_a \min\{x(a),y(a)\}}{\min\{m,n\}-k+1}\right),$$

где a – любой *k-мер* (слово длины k над вышеуказанным алфавитом), при этом $x(a)$ и $y(a)$ являются количеством появлений a в x и y соответственно в виде блоков (непрерывных подпоследовательностей) (см. ***q*-грам подобность**, гл. 11).

23.4. ДРУГИЕ БИОЛОГИЧЕСКИЕ РАССТОЯНИЯ

Расстояние структуры РНК

Последовательность РНК – нить нуклеотидов (оснований), т.е. последовательность над алфавитом {*A, C, G, U*}. Внутри клетки такая нить сворачивается в 3*D* пространстве из-за конъюгации нуклеотидных оснований (обычно это связи типа *A–U*, *G–C* и *G–U*). *Вторичная структура* РНК является, грубо говоря, множеством спиралей (или перечнем спаренных оснований), из которых состоит РНК. Эту структуру можно представить в виде плоского графа и даже корневого дерева. *Третичная структура* – это геометрическая форма РНК в пространстве.

Расстоянием между двумя РНК-последовательностями называется расстояние между их вторичными структурами. Примерами таких расстояний РНК служат: **расстояние редактирования дерева** (и другие расстояния на корневых деревьях, см. гл. 15) и **расстояние пары оснований**, т.е. **метрика симметрической разности** между вторичными структурами, рассматриваемыми как множества спаренных оснований.

При компьютерном (*in silico*) моделировании эволюции РНК **приспособленность** РНК-последовательности x есть **метрическое преобразование** $f(d(x, x_T))$, где f: $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ есть функция масштаба и $d(x, x_T)$ – структурное расстояние РНК между последовательностью x и фиксированной контрольной РНК-последовательностью x_T.

Метрика нечетко определенного полинуклеотида

Метрикой нечетко определенного полинуклеотида (или **NTV-метрикой**) называется метрика, предложенная Ньето, Торресом и Валькез Трасанде (2003) на 12-мерном единичном кубе I^{12}. Четыре нуклеотида U, C, A и G алфавита РНК были кодированы как (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) и (0,0,0,1) соответственно. Все 64 возможные кодонные тройки генетического кода можно считать вершинами куба I^{12}. Следовательно, любую точку $(x_1, ..., x_{12}) \in I^{12}$ можно рассматривать как *нечетко определенный кодон*, каждая компонента x_i которого выражает степень принадлежности элемента i, $1 \leq i \leq 12$, нечетко определенному множеству x. Вершины куба называются *четкими множествами*.

NTV-метрика между различными точками $x, y \in I^{12}$ определяется как

$$\frac{\sum\limits_{1 \leq i \leq 12} |x_i - y_i|}{\sum\limits_{1 \leq i \leq 12} \max\{x_i, y_i\}}.$$

Дресс и Локот доказали, что $\dfrac{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|}{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} \max\{|x_i|, |y_i|\}}$ является метрикой на всем $\mathbb{R}^n$.

На $\mathbb{R}^n_{\geq 0}$ данная метрика равна $1 - s(x, y)$, где $s(x,y) = \dfrac{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} \min\{x_i, y_i\}}{\sum\limits_{1 \leq i \leq n} \max\{x_i, y_i\}}$ является **подобностью Ружички** (см. гл. 17).

Расстояния перестройки генома

Геномы родственных однохромосомных видов или однохромосомных органелл (таких как мелкие вирусы и митохондрии) представлены порядком генов вдоль хромосом, т.е. как *перестановки* (или *ранжирования*) данного множества n гомологичных генов. Если принять во внимание ориентированность генов, то хромосому можно описать как *перестановку со знаком*, т.е. как вектор $x = (x_1, ..., x_n)$, где $|x_i|$ – различные числа $1, \ldots, n$ и любой элемент x_i может быть положительным или отрицательным. Кольцевые геномы представлены кольцевыми (со знаком) перестановками $x = (x_1, ..., x_n)$, где $x_{n+1} = x_1$ и т.д.

Для множества рассматриваемых движений мутации соответствующее *геномное расстояние* между двумя такими геномами есть **метрика редактирования** (см. гл. 11), где операциями редактирования выступают эти движения мутации, т.е. минимальное количество движений (ходов) необходимых для преобразования одной перестановки (со знаком) в другую.

В дополнение (а обычно и вместо) событий локальной мутации, таких как вставка/удаление букв или замещения символов в ДНК-последовательности, рассматриваются *большие* (т.е. затрагивающие значительную часть хромосомы)

мутации и соответствующие метрики геномного редактирования называются **расстояниями перестройки геномов**. Из-за редкости таких перестроечных мутаций эти расстояния точнее оцениваются истинные расстояния геномной эволюции. Основная реорганизация геномов (хромосом) осуществляется посредством *инверсий* (обращений блоков), *транспозиций* (обмена местами двух соседних блоков) в перестановке, а также *инвертированной транспозиции* (инверсии в сочетании с транспозицией) и реверсий со знаком, но только для перестановок со знаком (реверсия со знаком в сочетании с инверсией).

Основными расстояниями перестройки геномов между двумя однохромосомными геномами являются:

– **метрика реверсии и метрика реверсии со знаком** (см. гл. 11);

– **расстояние транспозиции**: минимальное число транспозиций, необходимых для преобразования (представляющей перестановки) одного из них в другой;

– **ITT-расстояние**: минимальное количество инверсий, транспозиций и инвертированных транспозиций, необходимых для преобразования одного из них в другой.

Для двух кольцевых перестановок со знаком $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ (следовательно, $x_{n+1} = x_1$ и т.д.) *точечный разрыв* – такое число i, $1 \le i \le n$, что $y_{n+1} \ne x_{j(i)+1}$, где число $j(i)$, $1 \le j(i) \le n$, определяется из равенства $y_i = x_{j(i)}$. **Расстояние точечного разрыва** (Уотерсон–Ивенс–Холл–Морган, 1982) между геномами, представленными как x и y, равно числу точечных разрывов. Это расстояние и **метрика редактирования перестановок** (**метрика Улама**, гл. 11: минимально необходимое количество перемещений букв, т.е. однобуквенных транспозиций) применяются для аппроксимации расстояний перестройки геномов.

Синтеничное расстояние

Это *геномное расстояние* между многохромосомными геномами, которые рассматриваются как неупорядоченные наборы *синтеничных* групп генов, в которых два гена *синтеничны*, если присутствуют в одной и той же хромосоме. **Синтеничное расстояние** (Ферретти–Надью–Санкофф, 1996) между двумя такими геномами является минимальным числом мутационных ходов – *транслокаций* (обмен генами между двумя хромосомами), *объединений* (слияния двух хромосом в одну) и *фрагментаций* (расщепление одной хромосомы на две) – необходимых для преобразования одного генома в другой. Все (входящие и выходящие) хромосомы этих мутаций должны быть непустыми и не дуплицированными. Вышеприведенные три мутационных хода соответствуют межхромосомным перестройкам генома, которые встречаются гораздо реже, чем внутрихромосомные; следовательно, они дают нам более глубокую информацию об истории эволюционного развития.

Расстояние генома

Расстояние генома между двумя локусами на хромосоме является числом пар оснований, разделяющих их на хромосоме.

Расстояние на генетической карте

Расстояние на генетической карте между двумя локусами на генетической карте – частота рекомбинаций, выраженная в процентах; оно измеряется в сантиморганах сМ (или *единицах генетической карты*), где 1 сМ соответствует их статистически откорректированной частоте рекомбинации 1%.

Обычно расстояние на генетической карте в 1 сМ (по *генетической шкале*) соответствует **расстоянию генома** (по *физической шкале*) порядка одной *мегабазы* (миллион парных оснований).

Метаболическое расстояние

Метаболическим расстоянием (или *расстоянием перехода*) между энзимами называется минимальное число метаболических стадий, разделяющих два энзима в метаболических переходах.

Расстояние Гендрона и др.

Расстояние Гендрона и др. между двумя взаимодействующими основаниями, представленными 4×4 *матрицами однородного преобразования* X и Y, определяется как

$$\frac{S(XY^{-1}) + S(X^{-1}Y)}{2},$$

где $S(M) = \sqrt{l^2 + (\theta / \alpha)^2}$, l – длина трансляции, θ – угол вращения и α – коэффициент масштабирования между трансляцией и вращением.

Расстояние биотопа

Биотопы здесь представлены как бинарные последовательности $x = (x_1, ..., x_n)$, где $x_i = 1$ означает присутствие вида i. **Расстояние биотопа** (или **расстояние Танимото**) между биотопами x и y определяется как

$$\frac{|\{1 \le i \le n : x_i \ne y_i\}|}{|\{1 \le i \le n : x_i + y_i > 0\}|}.$$

Расстояние Виктора–Пурпура

Последовательность всплесков x представляет собой временную последовательность $(x_1, ..., x_n)$ n событий (например, нейронных всплесков или биений сердца). Временная последовательность отражает либо абсолютные временные данные всплесков либо временные интервалы между ними. Мозг человека имеет около 100 млрд *нейронов* (нервных клеток). Нейрон реагирует на воздействие тем, что генерирует последовательность всплесков, являющуюся последовательностью коротких электрических импульсов.

Расстояние Виктора–Пурпура между двумя последовательностями всплесков x и y – **метрика редактирования** с ценой (т.е. минимальная цена преобразования x в y), с применением следующих операций (и сопутствующих им цен): вставить всплеск (цена 1), удалить всплеск (цена 1), сместить всплеск на величину времени t (цена qt, где $q > 0$ – параметр).

Виктор и Пурпура предложили это расстояние в 1996 г.; **нечеткое хэммингово расстояние** (см. гл. 11), введенное в 2001 г., использует ценовую функцию перемещений, сохраняющую неравенство треугольника.

Для сравнения реакции популяции нейронов на два различных стимула применяется **расстояние Чернова** между соответствующими распределениями всплесков.

Расстояние восприятия Оливы и др.

Пусть $\{s_1, ..., s_n\}$ – множество стимулов и пусть q_{ij} – условная вероятность того, что объект воспримет стимул s_j, когда будет продемонстрирован стимул s_i; следовательно, $q_{ij} \ge 0$ и $\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 1$. Пусть q_i – вероятность появления стимула s_i.

Расстояние восприятия Оливы и др. [OSLM04] между стимулами s_i и s_j определяется как

$$\frac{1}{q_i + q_j} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{q_{ik}}{q_i} - \frac{q_{jk}}{q_j} \right|.$$

Гипотеза вероятности расстояния

В психофизике **гипотеза вероятностни расстояния** представляет собой гипотезу о том, что вероятность различения двух стимулов есть (непрерывно возрастающая) функция некоторой субъективной квазиметрики между этими стимулами [Dzha01]. Согласно этой гипотезе такая субъективная метрика является **финслеровой метрикой** тогда и только тогда, когда она совпадает в малом с **внутренней метрикой** (т.е. инфимумом длин всех путей, соединяющих два стимула).

Супружеское расстояние

Супружеским расстоянием называется расстояние между местами рождения супругов (или их зигот).

Изоляция расстоянием

Изоляция расстоянием есть биологическая модель, предсказывающая, что генетическое расстояние между популяциями увеличивается экспоненциально по отношению к географическому расстоянию. Таким образом, появление региональных различий (рас) и новых видов объясняется ограниченным потоком генов и адаптивным варьированием. Вопрос изоляции расстоянием исследовался, в частности, на структуре существующих фамилий (см. **расстояние Ласкера**).

Дистанционная модель Малекота

Дистанционной моделью Малекота называется миграционная модель изоляции расстоянием, выражаемая следующим *уравнением Малекота* зависимости аллелей в двух локусах (*аллельной ассоциации* или *нарушенного баланса связей*) ρ_d:

$$\rho_d = (1 - L) M \, \mathrm{e}^{\varepsilon d} + L.$$

где d – расстояние между двумя локусами (либо **расстояние генома** в парах оснований, либо **расстояние на генетической карте** в сантиморганидах), ε – константа для данного региона, $L = \lim\limits_{d \to 0} \rho_d$ и $M \leq 1$ – параметр, характеризующий частоту мутаций.

Расстояние Ласкера

Расстоянием Ласкера (Родригес–Ларральде и др., 1989) между двумя человеческими популяциями x и y, характеризующимися векторами частоты фамилий (x_i) и (y_i), является число $-\ln 2R_{x,y}$, где $R_{x,y} = \frac{1}{2} \sum\limits_i x_i y_i$ есть *коэффициент изонимии* Ласкера. Фамильная структура связана с инбридингом и (в определяемых по мужской линии обществах) со случайным генетическим дрейфом, мутациями и миграциями. Фамилии можно рассматривать как аллели одного локуса, и их распределение может быть проанализировано по теории нейтральных мутаций; изонимия указывает на возможность общего происхождения.

Модель фамильного расстояния

Модель фамильного расстояния была применена в [COR05] для оценки передаваемости предпочтения от родителей к детям на основе данных по 47 провинциям материковой Испании путем сравнения 47×47 матриц расстояний **фамильного расстояния** с матрицами **потребительского** и **культурного расстояний**. Эти расстояния определялись как l_1-расстояния $\sum_i |x_i - y_i|$ между векторами частоты (x_i), (y_i) провинций x и y, где z_i для провинции z являлось либо частотой i-й фамилии (**фамильное расстояние**), либо долей в бюджете i-го продукта (**потребительское расстояние**) либо (для **культурного расстояния**) рейтингом среди населения i-го культурного фактора (коэффициент свадеб, читательская аудитория и т.п.).

Исследовались также и другие расстояния (матрицы расстояний), в том числе:

– *географическое расстояние* (в километрах между столицами двух провинций);

– *расстояние доходов* $|m(x) - m(y)|$, где $m(z)$ – средний доход населения в провинции z;

– *климатическое расстояние* $\sum_{1 \le i \le 12} |x_i - y_i|$, где z_i – средняя температура в провинции z в i-м месяце;

– *миграционное расстояние* $\sum_{1 \le i \le 12} |x_i - y_i|$, где z_i – процент людей (проживающих в провинции z), родившихся в провинции i.

Строгая *вертикальная передача предпочтений*, т.е. взаимосвязь между фамилиями и потребительскими расстояниями, была выявлена только в отношении продуктов питания.

Дистанционная модель альтруизма

В эволюционной экологии альтруизм толкуется как семейный отбор или групповой отбор и считается основной движущей силой перехода от одноклеточных организмов к многоклеточным. **Дистанционная модель альтруизма** [Koel00] предполагает, что альтруисты распространяются локально, т.е. с небольшими расстояниями взаимодействия и расстояниями дисперсии потомства, тогда как для эволюционной реакции эгоистов свойственно стремление увеличить эти расстояния. Промежуточные типы поведения являются неустойчивыми, и эволюция ведет к стабильной бимодальной пространственной модели.

Дистанционная модель бега

Дистанционной моделью бега называется модель антропогенеза, предложенная в [BrLi04]. Бипедализм (хождение на двух ногах) является ключевой поведенческой адаптацией гоминидов, появившейся 4,5–6 млн лет назад. Однако австралопитеки все еще оставались животными. Род *Homo*, появившийся около 2 млн лет назад, уже умел изготавливать примитивные орудия. Модель Брамбле–Либермана объясняет этот переход с рядом адаптаций, характерных для бега на большие расстояния по саванне. Они показывают, как приобретенная способность *Homo* к длительному бегу предопределила форму человеческого тела, обеспечив сбалансированное положение головы, низкие и широкие плечи, узкую грудную клетку, короткие предплечья, длинные бедра и т.д.

Глава 24

Расстояния в физике и химии

24.1. РАССТОЯНИЯ В ФИЗИКЕ

Физика изучает поведение и свойства материи в самом широком диапазоне, от субмикроскопических частиц, из которых построена вся обычная материя (*физика элементарных частиц*), до поведения материальной вселенной в целом (космология). Физическими силами, действие которых проявляется на расстоянии (т.е. отталкивание или притягивание без непосредственного "физического контакта"), являются силы ядерного и молекулярного притяжения, а за атомным уровнем – сила тяготения (дополняемая, возможно, силой антигравитации), статическое электричество и магнетизм. Последние две силы могут одновременно отталкивать и притягивать. В данной главе речь идет о сравнительно малых расстояниях, а расстояния большой протяженности (в астрономии и космологии) будут рассматриваться в главах 25 и 26. Вообще говоря, расстояния, имеющие физический смысл, лежат в пределах от $1{,}6 \times 10^{-35}$ м (длина Планка) до $7{,}4 \times 10^{26}$ м (предполагаемые размеры наблюдаемой вселенной). В настоящее время теория относительности, квантовая теория и законы Ньютона позволяют описывать и предсказывать поведение физических систем, измеряемых в пределах 10^{-15}–10^{25} м. Гигантские ускорители позволяют регистрировать частицы размером 10^{-18} м.

Механическое расстояние

Механическим расстоянием называется положение частицы как функция времени t. Для частицы с начальной координатой x_0, начальной скоростью v_0, и постоянным ускорением a оно задается как

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Расстояние в результате падения с равномерным ускорением a для достижения скорости v определяется как $x = \frac{v^2}{2a}$.

Свободно падающее тело – тело, на которое в падении воздействует только сила тяготения g. Расстояние падения тела за время t равно $\frac{1}{2} g t^2$; оно называется **расстоянием свободного падения**.

Остановочное расстояние

Остановочное расстояние – расстояние, на которое объект перемещается в среде с сопротивлением от исходной точки до остановки.

Для объекта с массой m, движущегося в среде с сопротивлением (где сила торможения на единицу массы пропорциональна скорости с константой пропорциональности β, и каких-либо других воздействий на данный объект нет),

положение $x(t)$ тела с начальной координатой x_0 и начальной скоростью v_0 задается как $x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$. Скорость тела $v(t) = x'(t) = v_0\, e^{-\beta t}$ уменьшается постепенно до нуля и тело достигает **максимального остановочного расстояния**

$$x_{\text{terminal}} = \lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\beta}.$$

Для снаряда, вылетевшего из начальной точки $(x_0,\ y_0)$ с начальной скоростью (v_{x_0}, v_{y_0}), положение $(x(t),\ y(t))$ задается как $x(t) = x_0 + \frac{v_{x_0}}{\beta}(1 - e^{\beta t})$, $y(t) = \left(y_0 + \frac{v_{y_0}}{\beta} - \frac{g}{\beta^2}\right) + \frac{v_{y_0}^{\beta - g}}{\beta^2} e^{-\beta t}$. Горизонтальное перемещение прекращается после достижения телом максимального остановочного расстояния

$$x_{\text{terminal}} = x_0 + \frac{v_{x_0}}{\beta}.$$

Баллистические расстояния

Баллистика занимается изучением движения *снарядов*, т.е. тел, которые приведены в движение (или брошены) с некоей начальной скоростью, и которые затем испытывают воздействие сил тяготения и торможения.

Горизонтальное расстояние полета называется **дальностью**, максимальная высота полета – **высотой**, а пройденный путь – **траекторией**.

Для снаряда, пущенного со скоростью v_0 под углом θ, дальность определяется как

$$x(t) = v_0 t \cos\theta,$$

где t – время движения. Полная дальность на плоскости при условии падения снаряда на высоте, одинаковой с высотой места выстрела, составляет

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g},$$

которая будет максимальной при $\theta = \pi/4$. Если высота точки падения на Δh выше точки запуска, то

$$x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}\left(1 + \left(1 - \frac{2\Delta h g}{v_0^2 \sin^2\theta}\right)^{1/2}\right).$$

Высота задается как

$$\frac{v_0 \sin^2\theta}{2g}$$

и будет максимальной, если $\theta = \pi/2$.

Длина дуги **траектории** определяется как

$$\frac{v_0^2}{g}(\sin\theta + \cos^2\theta g d^{-1}(\theta)),$$

где $gd(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t}$ – *функция Гудермана*. Длина дуги будет максимальной, если $gd^{-1}(\theta)\sin\theta = \left(\int_0^\theta \frac{dt}{\cos t}\right)\sin\theta = 1$ и приближенное решение имеет вид $\theta \approx 0{,}9855$.

Расстояние взаимодействия

Расстояние взаимодействия между двумя частицами – наибольшее расстояние между ними в ходе сближения, когда становится очевидно, что они продолжат движение в том же направлении и с той же скоростью.

Гирорадиус

Гирорадиус (или *радиус циклотронных колебаний, радиус Лармора*) – радиус круговой орбиты заряженной частицы (например, испускаемых Солнцем быстрых электронов), которая вращается вокруг своего скользящего центра.

Законы обратной пропорциональности квадрата расстояния

Расстоянный закон обратных квдаратов – любой закон, утверждающий, что некая физическая величина обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника этой величины.

Закон всемирного тяготения (Ньютона–Буллиальдуса): гравитационное притяжение между двумя точечными объектами с массами m_1, m_2 на расстоянии d определяется как

$$G\frac{m_1 m_2}{d^2},$$

где G – универсальная *гравитационная постоянная* Ньютона. Существование дополнительных измерений пространств, предлагаемое М-теорией, будет экспериментально проверено в 2007 г. на открывающемся в ЦЕРНе близ Женевы Большом адронном коллайдере (LHC). В основе эксперимента лежит обратная пропорциональность гравитационного притяжения в n-мерном пространстве и $(n - 1)$-й степени расстояния между объектами; если во вселенной существует четвертое измерение, коллайдера LHC покажет обратную пропорциональность кубу малого расстояния между частицами.

Закон Кулона: сила притяжения или отталкивания между двумя точечными объектами с зарядами e_1, e_2 на расстоянии d определяется как

$$k\frac{e_1 e_2}{d^2},$$

где k – *постоянная Кулона*, зависящая от среды, в которую погружены заряженные объекты. Гравитационные и электростатические силы двух тел, обладающих *массами Планка* $m_P \approx 2{,}176 \times 10^{-8}$ кг и единичным электрическим зарядом, одинаковы по величине.

Интенсивность (мощность на единицу площади в направлении распространения) фронта сферической волны (света, звука и т.п.), исходящей из точечного источника, убывает (если не принимать во внимание потери от поглощения и рассеяния) обратно пропорционально квадрату d^2 расстояния d до этого источника. Однако для радиоволн это уменьшение соответствует $\frac{1}{d}$.

Дальность действия фундаментальных сил

Фундаментальными силами (или взаимодействиями) являются сила тяготения, электромагнитная сила, слабые и сильные ядерные силы. **Дальность** действия силы считается *короткой*, если она слабеет (приближается к 0) экспоненциально, по мере увеличения d. Как электромагнитная, так и гравитационная силы являются силами бесконечной дальности действия, подчиняющимися законам **обратной пропорциональности квадрата расстояния**. Чем меньше расстояние, тем больше энергия. Как слабая, так и сильная ядерные силы действуют на очень близких расстояниях (около 10^{-18} и 10^{-15} м), ограниченных принципом неопределенности.

На субатомных расстояниях в теории квантового поля сильные и слабые взаимодействия описываются одной и той же совокупностью формул, но с разными константами; при очень больших энергиях они почти совпадают.

Дальний порядок

Физическая система обладает свойством **дальнего порядка**, если удаленные друг от друга части одного и того же образца демонстрируют коррелированное поведение. Например, в кристаллах и некоторых жидкостях положение одного и соседних с ним атомов определяет положение всех других атомов. Примерами дального порядка являются сверхтекучесть и намагниченность в твердых телах, волны плотности заряда, сверхпроводимость. **Ближний порядок** – это первый или второй ближайшие соседи данного атома. Точнее говоря, система обладает свойством дальнего порядка, *квазидальнего порядка* или является разупорядоченной, если соответствующая функция корреляции убывает на больших расстояниях, до константы, до нуля полиномиально или до нуля экспоненциально (см. **Зависимость от большой дальности**, гл. 28).

Дистанционное действие (в физике)

Дистанционное действие – взаимодействие между двумя объектами в пространстве без участия известного посредника. Эйнштейн использовал термин *дистанционное "призрачное действие"* для квантового механического взаимодействия (как, например, *зацепления* и *квантумной нелокальности*), которое является мгновенным, независимо от расстояния (см. **Принцип локальности**, гл. 28). В 2004 г. Зеллингер и др. провели эксперимент по телепортации (на расстояние 600 м) некоторой квантовой информации – свойства поляризации фотона – его парному объекту во взаимодействующей паре фотонов. При этом, однако, *сильной нелокальности*, т.е. измеримого дистанционного действия (сверхсветового распространения реальной физической информации) не наблюдалось, да, собственно, и не ожидалось.

Спорное само по себе (в силу того что скорость света есть максимум) неквантовое взаимодействие на большой дальности приобретает статус маргинального по отношению к проблеме "дистанционного ментального действия" (телепатия, предвидение, психокинез и т.п.). Однако, если интуитивное предчувствие Пенроуза, что мозг человека использует квантумные механические процессы, верно, то такая "нелокальная телепатическая" передача представляется возможной.

Термин *взаимодействие на малой дальности* также используется для обозначения передачи дистанционного действия какой-либо материальной средой из одной точки в другую с определенной скоростью, зависящей от свойств среды. Кроме того, в области хранения информации термином *взаимодействие в ближнем поле* обозначается взаимодействие на очень малых расстояниях с использованием технологии сканирующей головки.

Расстояние прыжка

Прыжок – динамическое воздействие на большой, по атомной шкале, дальности, регулирующее диффузию и электропроводность. Так, например, окисление ДНК (потеря одного электрона) порождает радикальный катион, который может мигрировать на большое расстояние (более 20 нм), которое называется **расстоянием прыжка** между сайтами ("прыгать" от одной комбинации к другой), прежде чем он будет пойман реакцией с водой.

Глубина проникновения

Глубиной проникновения вещества называется расстояние, на которое проникает случайная электромагнитная радиация. Глубина скин-слоя записывается как

$$\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}},$$

где c – скорость света, σ – удельная электропроводность, μ – проницаемость и ω – угловая частота.

Длина пространственной когерентности

Длина пространственной когерентности – расстояние распространения от когерентного источника до наиболее удаленной точки, где электромагнитная волна еще сохраняет специфическую степень когерентности. Данное понятие используется в технике дальней связи (обычно в системах оптической связи) и синхротронных устройствах с рентгеновской оптикой (современные синхротронные источники обеспечивают весьма высокую когерентность рентгеновских лучей). Длина пространственной когерентности составляет около 20 см, 100 м и 100 км для гелий-неоновых, полупроводниковых и волоконных лазеров соответственно (см. *длина временной когерентности*, которая описывает соотношение между сигналами, наблюдаемыми в разные моменты времени).

Длина смыкания

Для сверхтекучей жидкости **длиной смыкания** является длина, на протяжении которой волновая функция может изменяться, продолжая предельно уменьшать энергию.

Для *конденсатов Бозе–Эйнштейна* длина смыкания – пограничная область с шириной, на протяжении которой плотность вероятности конденсата сводится к нулю.

Оптическое расстояние

В оптических и телекоммуникационных системах связи **оптическим расстоянием** (или *оптической длиной пути*) называется пройденное светом расстояние: произведение физической длины пути в среде на показатель преломления этой среды. По *принципу Ферма* свет всегда распространяется по наикратчайшему оптическому пути.

Для последовательности непрерывных слоев с показателем преломления $n(s)$ как функции расстояния s оптическое расстояние записывается как

$$\int_C n(s)\,ds.$$

Для последовательности дискретных слоев с показателями преломления n_i и толщины s_i оптическое расстояние равно

$$\sum_{i=1}^{N} n_i s_i = \frac{\delta}{k_0},$$

где δ – сдвиг по фазе и k_0 – длина волны в вакууме.

Акустическая метрика

В акустике **акустическая** (или **звуковая**) **метрика** характеризует свойства распространения звука в конкретных средах: воздухе, воде и т.п.

В общей теории относительности и квантовой гравитации она характеризует свойства распространения сигнала в данной *аналоговой модели* (относительно физики сжатой материи), где, например, распространение скалярного поля в искривленном *пространстве-времени* моделируется (см. для примера исследования [BLV05] распространением звука в движущейся жидкости или замедлением света в движущейся диэлектрической жидкости или в *сверхтекучей жидкости* (квазичастицы в квантовой жидкости) и т.п. Прохождение сигнала через акустическую метрику изменяет саму метрику; например, распространение звука в воздушной среде вызывает перемещение воздуха и приводит к локальному изменению скорости звука. Такая эффективная (т.е. идентифицируемая по ее эффекту) **метрика Лоренца** (см. гл. 7) регулирует вместо фоновой метрики распространение колебаний: вовлеченные в пертурбации частицы перемещаются по геодезическим этой метрики.

Именно, если жидкость является баротропной и невязкой, а поток безвихревым, то распространение звука описывается **акустической метрикой**, которая зависит от плотности ρ потока, вектора скорости $\mathbf{v}$ потока и локальной скорости s звука в жидкости. Она может быть выражена как *акустический тензор*

$$g = g(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho}{s} \begin{pmatrix} -(s^2 - v^2) & \vdots & -\mathbf{v}^T \\ \cdots & & \cdots \\ -\mathbf{v} & \vdots & 1_3 \end{pmatrix},$$

где 1_3 – единичная 3×3 матрица и $v = \| \mathbf{v} \|$. *Акустический линейный элемент* можно записать как

$$ds^2 = \frac{\rho}{s}(-(s^2 - v^2)\, dt^2 - 2\mathbf{v}\, d\mathbf{x}\, dt + (d\mathbf{x})^2) = \frac{\rho}{s}(-s^2 dt^2 + (d\mathbf{x} - \mathbf{v}\, dt)^2).$$

Сигнатура этой метрики равна (3, 1), т.е. она является **метрикой Лоренца**. Если скорость жидкости становится сверхзвуковой, то звуковые волны уже не могут возвратиться назад, т.е. существует некая *немая дыра*, акустический аналог *черной дыры*.

Оптические метрики также используются в аналоговом представлении гравитации и техниках эффективных метрик; они соответствуют представлению гравитационного поля как эквивалентной оптической среды, где магнитная проницаемость равна электрической.

Метрическая теория гравитации

Метрическая теория гравитации предполагает существование симметричной метрики (рассматриваемой как свойство самого пространства), которой соответствуют материя и негравитационные поля. Эти теории различаются по типу

дополнительных гравитационных полей, скажем, в зависимости или независимости от местоположения и/или скорости локальных систем. Одной из таких и является общая теория относительности; она рассматривает только одно гравитационное поле, саму пространственно-временную метрику, и подчиняется эйнштейновскому дифференциальному уравнению с частными производными. Эмпирическим путем было определено, что, помимо *конформно плоской скалярной теории* Нордстрема (1913), любая другая метрическая теория гравитации привносит дополнительные гравитационные поля.

Квантовые метрики

Квантовая метрика – общий термин, используемый для метрики, с помощью которой предполагается описать пространство-время по квантовой шкале (т.е. порядка длины Планка l_P). Экстраполируя расчеты как квантовой механики, так и общей теории относительности, метрическая структура пространства-времени определяется как колебания вакуума с весьма высокой энергией (10^{19} ГэВ, соответствующей массе Планка m_P), что создает черные дыры с радиусами порядка l_P. Пространство-время становится "квантовой пеной" с мощными деформациями и турбулентностью. Оно теряет гладкую непрерывную структуру (наблюдаемую на макроскопическом уровне), *риманова многообразия*, и становится дискретным, фрактальным, недифференцируемым: на уровне величины l_P происходит разрыв функционального интеграла в классических уравнениях поля.

Примеры квантового метрического пространства представлены **компактным квантовым метрическим пространством** Риффеля, **метрикой Фубини–Штуди** на квантовых состояниях, статистической геометрией нечетко определенных масс [ReRo01] и квантованием **метрического конуса** (гл. 1) [IsKuPe90].

Квантальные расстояния

Квантальным расстоянием называется расстояние между квантовыми состояниями, представленными в виде *операторов плотности* (т.е. положительных операторов с единичным следом) в комплексном проективном пространстве над бесконечномерным гильбертовым пространством. Его m-мерный вариант соответствует *m-кубитовым квантумным состояниям*, представленным $2^m \times 2^m$ матрицами плотности.

Пусть X обозначает множество всех операторов плотности в данном гильбертовом пространстве. Для двух данных квантумных состояний, представленных операторами плотности $x, y \in X$, упомянем следующие расстояния на X.

Метрика нормы Гильберта–Шмидта (см. гл. 13) равна $\sqrt{\mathrm{Tr}((x-y)^2)}$, где $\| A \|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t A)}$ есть *норма Гильберта–Шмидта* оператора A.

Метрика следовой нормы (см. гл. 12) равна $\| x - y \|$, где $\| A \|_{tr} = \mathrm{Tr}\sqrt{(A^T A)}$ есть следовая норма оператора A. Максимальная вероятность того, что с помощью квантового измерения можно будет отличить x от y, равна $\frac{1}{2} \| x - y \|_{tr}$.

Расстояние Буреса равно $\sqrt{2(1 - Tr((\sqrt{xy}\sqrt{x})^2))}$ (см. **Метрика Буреса**, гл. 7).

Достоверная подобность равна $Tr((\sqrt{xy}\sqrt{x})^2))$.

Расстояние Гаддера равно $\inf\{\lambda \in [0, 1]: (1 - \lambda) x + \lambda x' = (1 - \lambda) x + \lambda x'; x'y' \in X\}$. В действительности, X является выпуклым, т.е. $\lambda x + (1 - \lambda) y \in X$ всякий раз, когда $x, y \in X$ и $\lambda \in (0, 1)$.

Примерами других расстояний, применяемых в этой области, являются **метрика нормы Фробениуса** (см. гл. 12), **метрика Соболева** (см. гл. 13), **метрика Монжа–Канторовича** (см. гл. 21).

24.2. РАССТОЯНИЯ В ХИМИИ

Основные химические вещества являются ионными (т.е. скреплены ионными связями), металлическими (большими структурами с плотной упаковкой кристаллической решетки, скрепленными металлическими связями), гигантскими ковалентными (как, например, алмазы и графиты) или молекулярными (малыми ковалентными). Молекулы состоят из определенного количества атомов, скрепленных между собой ковалентными связями; их размеры колеблются от малых (одноатомных молекул редких газов) до гигантских молекул (типа полимеров или ДНК). **Межатомное расстояние** между двумя атомами – расстояние (в ангстремах или пикометрах) между их ядрами.

Атомный радиус

Квантовая механика предполагает, что атом не является шаром с четко обозначенными границами. Соответственно **атомный радиус** определяется как расстояние от ядра атома до наиболее стабильного электрона, обращающегося на орбите вокруг атома, находящегося в уравновешенном состоянии. Атомные радиусы представляют собой размеры отдельных, электрически нейтральных атомов, на которые не воздействуют никакие связи.

Атомные радиусы рассчитываются по **расстояниям химической связи**, если атомы элемента образуют связи; в иных случаях (например, для редких газов) используются только **радиусы Ван-дер-Ваальса**.

Атомные радиусы увеличиваются для тех элементов, которые расположены ниже по столбцу (или левее по строке) Периодической таблицы Менделеева.

Расстояние химической связи

Расстояние химической связи (или *длина связи*) – расстояние между ядрами двух связанных атомов. Так, например, типовыми расстояниями связи для углерод-углеродистых связей в органической молекуле являются 1,53, 1,34 и 1,20 Å для одиночной, двойной и тройной связей соответственно.

В зависимости от типа связи элемента его атомный радиус называется *ковалентным* или *металлическим*. *Металлический радиус* равен половине **металлического расстояния**, т.е. наименьшего ядерного расстояния в *металлическом кристалле* (плотно упакованной кристаллической решетке металлического элемента).

Ковалентные радиусы атомов (элементов, образующих ковалентные связи) рассчитываются по расстоянием химической связи между парами атомов, связанных ковалентно: эти расстояния связи равны сумме ковалентных радиусов двух атомов. Если два атома являются однотипными, то их ковалентный радиус равен половине их расстояния химической связи. Ковалентные радиусы для элементов, атомы которых не могут связываться друг с другом, вычисляются посредством комбинирования в различных молекулах, радиусов тех атомов, которые связываются, с расстоянием химической связи между парами атомов различных типов.

Контактное расстояние Ван-дер-Ваальса

При изучении межмолекулярных расстояний атомы рассматриваются как твердые сферы. Предполагается, что сферы двух соседних несвязанных атомов (в соприкасающихся молекулах или атомах), лишь касаются друг друга. Следовательно, их межатомное расстояние, называемое **контактным расстоянием Ван-дер-Ваальса**, является суммой радиусов, называемых **радиусами Ван-дер-Ваальса**, их твердых сфер. Радиус Ван-дер-Ваальса для углерода составляет 1,7 Å, тогда как его ковалентный радиус – 0,76 Å. Контактное расстояние Ван-дер-Ваальса соответствует "слабой связи", когда силы отталкивания электронных оболочек превышают силы Лондона (электростатического притягивания).

Межионное расстояние

Ион – это атом, обладающий положительным или отрицательным зарядом. **Межионное расстояние** есть расстояние между центрами двух соседних (связанных) ионов. **Ионный радиус** рассчитывается по расстоянию ионной связи в реальных молекулах и кристаллах.

Ионный радиус *катионов* (положительных ионов, например, натрия Na^+) меньше атомного радиуса атомов, из которых они вышли, тогда как анионы (отрицательные ионы, например, хлора Cl^-) по размеру больше соответствующих атомов.

Гидродинамический радиус

Гидродинамический радиус молекулы в момент диффузии в растворе является гипотетическим радиусом твердой сферы, которая растворяется с той же скоростью.

Дальность действия молекулярных сил

Молекулярные силы (или силы межмолекулярного взаимодействия) включают в себя следующие электромагнитные силы: ионная связь (заряд), водородная связь (биполярная), двухдипольное взаимодействие, силы Лондона (притягивающая составляющая сил Ван-дер-Ваальса) и стерического отталкивания (отталкивающая составляющая сил Ван-дер-Ваальса). Если расстояние (между двумя молекулами или атомами) равно d, то (определено экспериментально) функция потенциальной энергии P обратно пропорциональна d^n с n = 1, 3, 3, 6, 12 для пяти вышеприведенных сил соответственно. **Дальность** (или *радиус*) взаимодействия считается *короткой*, если P быстро приближается к 0 по мере увеличения d. Она также называется *короткой*, если равна не превосходит 3 Å; следовательно, короткой является только дальность стерического отталкивания (см. **дальность действия фундаментальных сил**).

Например: для полиэлектролитических растворов дальнодействующая ионная сила вода-растворитель соперничает с меньшей по дальности связующей силой вода-вода (водородная связь).

Химическое расстояние

Различные химические системы (единичные молекулы, их фрагменты, кристаллы, полимеры, кластеры) хорошо представляются в виде графов, у которых вершины (скажем, атомы, молекулы, действующие как мономеры, фрагменты молекул) связаны ребрами – химическими связями, межмолекулярными взаимодействиями Ван-дер-Ваальса, водородной связью, путями реакций и т.п.

В органической химии *молекулярный граф* $G(x) = (V(x), E(x))$ – граф, представляющий молекулу x таким образом, что вершины $v \in V(x)$ являются атомами,

а ребра $e \in E(x)$ соответствуют связям электронных пар. **Число Винера** молекулы равно половине суммы всех попарных расстояний между вершинами их молекулярного графа.

BE-матрица (связей и электронов) молекулы x есть $|V(x)| \times |V(x)|$-матрица $((e_{ij}(x)))$, где $e_{if}(x)$ – число свободных необобщенных валентностью электронов атома A_i и для $i \neq j$, $e_{ij}(x) = e_{ji}(x) = 1$, если существует связь между атомами A_i и A_j, и $e_{ij}(x) = e_{ji}(x) = 0$, иначе.

Для двух молекул x и y *стехиометрического состава* (т.е. с одинаковым количеством атомов) **химическим расстоянием Дагунджи–Уги** между ними является хеммингова метрика

$$\sum_{1 \le i,j \le |V|} |e_{ij}(x) - e_{ij}(y)|,$$

и **химическое расстояние Поспишала–Квашнички** между ними выражается как

$$\min_{P} \sum_{1 \le i,j \le |V|} |e_{ij}(x) - e_{P(i)P(j)}(y)|,$$

где P – любая перестановка атомов.

Вышеприведенное расстояние равно $|E(x)| + |E(y)| - 2|E(x,y)|$, где $E(x, y)$ – множество ребер максимального общего подграфа (в общем случае не индуцированного) молекулярных графов $G(x)$ и $G(y)$ (см. **Расстояние Зелинки**, гл. 15 и **Расстояние Махалонобиса**, гл. 17).

Расстояние реакции Поспишала–Квашнички, поставленное в соответствие молекулярному преобразованию $x \to y$, есть минимальное число *элементарных преобразований*, необходимых для превращения $G(x)$ в $G(y)$.

RMS Молекулярный радиус

RMS Молекулярный радиус (или *радиус вращения*) – среднеквадратичное расстояние атомов в молекуле от их общего центра тяжести; этот радиус определяется как

$$\sqrt{\frac{\sum_{1 \le i \le n} d_{0i}^2}{n+1}} = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j d_{ij}^2}{(n+1)^2}},$$

где n – количество атомов, d_{0i} – евклидово расстояние i-го атома от центра тяжести молекулы (в конкретной конфигурации), а d_{ij} – евклидово расстояние между i-м и j-м атомами.

Средний молекулярный радиус

Средний молекулярный радиус – число $\frac{r_i}{n}$, где n – количество атомов в молекуле, а r_i – евклидово расстояние -го атома от геометрического центра $\frac{\sum_j x_{ij}}{n}$ молекулы (здесь x_{ij} является i-й декартовой координатой j-го атома).

Глава 25

Расстояния в географии, геофизике и астрономии

25.1. РАССТОЯНИЯ В ГЕОГРАФИИ И ГЕОФИЗИКЕ

Расстояние большого круга

Расстояние большого круга (или **сферическое расстояние, ортодромическое расстояние**) является наикратчайшим расстоянием между точками x и y на земной поверхности, измеренное вдоль пути на поверхности Земли. Это длина дуги большого круга, проходящей через точки x и y на сферической модели планеты.

Пусть δ_1 и ϕ_1 являются соответственно широтой и долготой x, а δ_2 и ϕ_2 – аналогичными параметрами y; пусть r – радиус Земли. Тогда расстояние большого круга равно

$$r \arccos(\sin\delta_1 \sin\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)).$$

Для сферических координат (θ, ϕ), где ϕ – азимутальный угол и θ – колатитьюда (дополненная широта) расстояние большого круга между $x = (\theta_1, \phi_1)$ и $y = (\theta_2, \phi_2)$ равно

$$r \arccos(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)).$$

Для $\phi_1 = \phi_2$ вышеприведенная формула сокращается до $r \mid \theta_1 - \theta_2 \mid$.

Сфероидальным расстоянием называется расстояние между двумя точками земной поверхности в сфероидальной модели планеты. Земля по своей форме больше похожа на сплюснутый сфероид с максимальными значениями радиусов кривизны 6336 км на экваторе и 6399 км на полюсах.

Локсодромическое расстояние

Локсодрома (румб) – кривая по поверхности Земли, пересекающая каждый меридиан под одинаковым углом. Это путь, при котором сохраняется постоянное направление по компасу.

Локсодромическое расстояние – расстояние между двумя точками на поверхности Земли по локсодроме, соединяющей их. Оно никогда не бывает короче пути по дуге большого круга.

Морским расстоянием называется длина *локсодромы* соединяющей любые два места на поверхности Земли, выраженная в морских милях. Одна морская миля равна 1852 м.

Расстояние континентального шельфа

Статья 76 Конвенции ООН по морскому праву (1999) определяет *континентальный шельф прибрежного государства* (его суверенное владение) как морское дно и недра подводных районов, простирающихся за пределы его территориального моря на всем протяжении естественного продолжения его сухопутной территории до внешней границы подводной окраины материка. Конвенцией установлено, что **расстояние континентального шельфа**, т.е. **дальность** от исход-

ных линий, от которых отмеряется ширина территориального моря, до вышеуказанной границы, должно находиться в пределах 200–350 морских миль, а также предписаны правила (почти) точного его определения.

Статьей 47 этой же Конвенции обусловлено, что для государств-архипелагов отношение площади водной поверхности (суверенное владение) к площади их суши, включая атоллы, составляет от 1 : 1 до 9 : 1 и выработаны правила применительно к конкретным случаям.

Расстояния радиосвязи

Расстояние горизонта – расстояние на поверхности Земли, на которое распространяется прямая волна; в результате отражения волн от атмосферы это расстояние может превышать дальность прямой видимости. В телевидении **расстоянием горизонта** называется расстояние до наиболее удаленной точки на поверхности Земли, находящейся в пределах видимости передающей антенны.

Зона молчания – наименьшее расстояние, на котором обеспечивается прием радиосигнала (определенной частоты) от передатчика после его отражения (прыжка) от ионосферы.

Расстояние прямой видимости – расстояние, которое проходит радиосигнал от одной антенны к другой при условии, что антенны находятся в прямой видимости и на пути радиосигнала нет никаких препятствий. Именно, радиоволны могут распространяться и за горизонт, поскольку они взаимодействуют с земной поверхностью и/или ионосферой.

При использовании двух радиочастот (например, 12,5 и 25 кГц в морской связи) **расстояние функциональной совместимости** и **расстояние разнесения соседних каналов (частот)** определяют дальность, на которой все приемники будут принимать сигналы передатчиков и соответственно минимальное расстояние между узкополосным передатчиком и широкополосным приемником, с тем чтобы избежать помех.

DX обозначает на слэнге радиолюбителей (и в морзянке) дальний прием; работать в режиме **DX** – это вести радиообмен на большой дальности (для чего необходимы соответствующие усилители мощности).

Допускаемое расстояние

В компьютерной геоинформационной системе (GIS) **допустимым расстоянием** является максимальное расстояние между двумя точками, которое устанавливается таким образом, чтобы обеспечивалась коррекция мертвых зон и промахов (зафиксированные вместе линии) по мере того как они оказываются в рамках допускаемого расстояния.

Расстояние на карте

Расстояние на карте – расстояние между двумя точками на карте (не путать с расстоянием отображения между двумя локусами на генетической карте.

Горизонтальное расстояние определяется умножением расстояния на карте на ее масштаб.

Горизонтальное расстояние

Горизонтальное расстояние (расстояние на местности) – расстояние на плоскости между двумя точками, как изображено на карте (без учета особенностей рельефа местности между этими точками). Различают два типа горизонтального расстояния: **прямолинейное расстояние** (длина отрезка прямой, соединяющей

данные точки, измеренная в масштабе карты) и **расстояние путешествия** (длина кратчайшего маршрута между двумя точками, измеренная в масштабе карты с учетом существующих дорог, рек и т.п.).

Наклонное расстояние

Наклонным расстоянием (или н**аклонной дальностью**) называется (в отличие от истинно горизонтального или вертикального) расстояние между двумя точками, измеренное с учетом наклона.

Расстояние движения по дороге

Расстоянием движения по дороге (или **фактическим расстоянием, колесным расстоянием,** *дорожным расстоянием*) между двумя точками (например, городами) некоторого региона называется длина кратчайшей дороги, соединяющей эти точки. Поскольку чаще всего измерить фактическое расстояние не представляется возможным, обычно используются *оценочные расстояния.* Эмпирические данные показывают, что расстояние движения по дороге зачастую является линейной функцией **расстояния большого круга**; в городах Швеции можно считать, что дорожное расстояние приблизительно равно $1{,}25 \cdot d$, где d – расстояние большого круга. В США такой множитель равен примерно 1,15 в направлении с востока на запад и примерно 1,21 в направлении с севера на юг.

Ниже приведены некоторые родственные понятия.

Время движения между объектами; городская дорожная сеть 20 крупнейших городов Германии является *безмасштабной* именно для этой меры (возможно, наиболее близкой для водителей).

Официальное расстояние – признанное расстояние езды на автомобиле между двумя пунктами, которое используется для расчета пути и оплаты за перевозку (не путать с **расстоянием стоимости системного администрирования** в Интернете).

Расстояние между почтовыми индексами (в общем случае это почтовые и телефонные коды городов) – расчетное расстояние езды на автомобиле (или время езды на автомобиле) между двумя соответствующими пунктами.

Расстояние Мохо

Расстояние Мохо – расстояние от точки на поверхности Земли до *границы раздела двух сред по Мохоровичичу* (или *сейсмической границы Мохоровичича*) под этой точкой. *Границей раздела двух сред по Мохоровичичу* называется граница между хрупкой верхней частью земной коры и более горячей и мягкой мантией. Расстояние Мохо составляет порядка 5–10 км под дном океана и 35–65 км в глубь материков (глубочайшая в мире пещера Крубера-Воронья на Кавказе – 2,14 км, глубочайшая шахта на золотых приисках "Western Deep Levels", ЮАР – около 4 км и сверхглубокая буровая шахта на Кольском полуострове – 12,3 км). Температура обычно поднимается на один градус на каждые 33 м глубины. Японское исследовательское буровое судно "Тикю" ("Chikyu") в период с сентября 2007 г. начало осуществлять бурение в 200 км от побережья г. Нагоя на глубину до сейсмической границы Мохоровичича.

Мантия Земли простирается от сейсмической границы Мохоровичича до границы между мантией и ядром на глубине около 2890 км. Мантия Земли разделяется на верхнюю и нижнюю мантии, граница между которыми проходит на глубине около 660 км. Другие сейсмические границы отмечаются на глубинах 60–90 км (граница Хэле), 50–150 км (граница Гуттенберга), 220 км (граница Лемана), 410 км, 520 км и 710 км.

Расстояния в сейсмологии

Земная кора состоит из тектонических плит, которые перемещаются (на несколько сантиметров в год) под воздействием тепловой конвекции от глубинной мантии и сил тяготения. Края этих плит обычно давят друг на друга, и иногда резко смещаются относительно друг друга. *Землетрясение*, т.е. внезапное (в течение нескольких секунд) движение или дрожание Земли, вызванное резким высвобождением постепенно накопленного напряжения, начиная с 1906 г. рассматривалось как образование разлома (внезапное появление, образование активных центров и распространение новых трещин и сдвигов) по причине упругого восстановления после деформации. Однако с 1996 г. землетрясение рассматривается в контексте скольжения тектонических плит вдоль уже существующих разломов или стыков между ними как результат прерывистого сдвига пород в условиях фрикционной нестабильности. Соответственно землетрясение происходит, когда динамическое трение становится меньше статического трения. Движущаяся граница области скольжения называется *фронтом разрыва*. Обычно предполагается, что сдвиг – это определенная поверхность направленного по касательной скачка смещений, заключенных в прослойке упругой коры.

90% землетрясений имеют тектоническую природу, однако они могут также быть результатом вулканического извержения, ядерного взрыва, строительства крупных плотин или горных работ. Сила землетрясения может измеряться **глубиной очага** землетрясения, скоростью смещения, интенсивностью (по модифицированной шкале Меркалли эффектов землетрясений, величиной, ускорением (основной фактор разрушения) и т.п. Сила землетрясения по логарифмической шкале Рихтера рассчитывается с учетом амплитуды и частоты ударных волн, которые регистрируются сейсмографом, настроенным на **эпицентральное расстояние.** Увеличение силы землетрясения на 0,1 балла по шкале Рихтера соответствует 10-кратному увеличению амплитуды волн; наибольшей зарегистрированной величиной является 9,5 баллов (землетрясение в Чили в 1960 г.).

Модели затухания колебаний в зависимости от расстояния, используемые при проектировании сейсмостойких сооружений (зданий и мостов), обычно основываются на параметрах затухания ускорения при увеличении **расстояния между источником и объектом**, т.е. расстояния между сейсмологической станцией и критической (для конкретной модели) "центральной" точкой землетрясения.

Простейшей моделью является *гипоцентр* (или очаг), т.е. точка внутри Земли, откуда исходит землетрясение (сначала возникают колебания, затем происходит сейсмический разрыв или начинается подвижка). *Эпицентром* называется точка на поверхности Земли непосредственно над гипоцентром. Приведенная ниже терминология также используется для обозначения других катастроф, таких как падение или взрыв ядерной боеголовки, метеорита или кометы, однако для воздушных взрывов термин *гипоцентр* относится к точке на земной поверхности непосредственно под взрывом. Далее приводится перечень основных сейсмологических расстояний.

Глубина очага землетрясения – расстояние между гипоцентром и эпицентром; средняя глубина очага землетрясения составляет 100–300 км.

Гипоцентральное расстояние: расстояние от сейсмостанции до гипоцентра.

Эпицентральное расстояние (или **расстояние землетрясения**) – расстояние **большого круга** от сейсмостанции до эпицентра.

Расстояние Джойнера-Бура – расстояние от сейсмостанции до ближайшей точки на земной поверхности, расположенной над *поверхностью разрыва*, т.е. вспоротой частью плоскости тектонического нарушения.

Расстояние разлома – расстояние от сейсмостанции до ближайшей точки на поверхности разлома.

Расстояние сейсмогенной глубины – расстояние от сейсмостанции до ближайшей точки поверхности разрыва в пределах сейсмогенной зоны, т.е. глубины возможных очагов землетрясений; обычно это 8–12 км.

Кроме того, используются расстояния от сейсмостанции до:

– центра выброса статической энергии и центра статической деформации плоскости тектонического сдвига;

– точки на поверхности с максимальной макросейсмической интенсивностью, т.е. максимальным ускорением грунта (может не совпадать с эпицентром);

– эпицентра, такое, на котором объемные волны, отражающиеся от сейсмической границы Мохо (раздел между корой и мантией), вызывают более значительные колебания грунта, чем вторичные волны (называется *критическим расстоянием Мохо*);

– источников шума и помех: океанов, озер, рек, железных дорог, зданий.

Расстояние пространственно-временной связи между двумя землетрясениями x и y определяется как

$$\sqrt{d^2(x,y) + C\,|\,t_x - t_y\,|^2},$$

где $d(x,\ y)$ – расстояние между их эпицентрами или гипоцентрами, $|\,t_x - t_y\,|$ – различие по времени и C – масштабная константа, необходимая для корреляции расстояния $d(x, y)$ и времени.

Другой пространственно-временной мерой для катастрофических событий является **расстояние** Ландренау **между ураганами** (для ураганов, накрывающих конкретный американский штат). Оно равно протяженности береговой линии данного штата, поделенной на количество ураганов, ударам которых штат подвергся с 1899 г.

25.2. РАССТОЯНИЯ В АСТРОНОМИИ

Термином *небесный объект* (или *небесное тело*) обозначаются такие астрономические объекты, как звезды и планеты. *Небесная сфера* – проекция небесных объектов на их кажущееся положение на небосводе при наблюдении с Земли. *Небесный экватор* – проекция земного экватора на небесной сфере. *Полюсами мира* называются проекции Северного и Южного полюсов Земли на небесной сфере. *Небесным меридианом (часовым кругом)* небесного объекта является большой круг небесной сферы, проходящий через данный объект и полюсы мира. *Эклиптика* – пересечение плоскости, содержащей орбиту Земли, с небесной сферой: для наблюдателя с Земли она видится как путь, по которому Солнце перемещается по небосводу в течение года. *Точкой весеннего равноденствия* называется одна из двух точек небесной сферы, в которой небесный экватор пересекается с плоскостью эклиптики: это положение Солнца на небесной сфере в момент весеннего равноденствия.

Горизонт – линия, "отделяющая" небо от Земли. Она делит небо на верхнюю полусферу, которую мы видим, и нижнюю полусферу, которую мы наблюдать не можем. Полюс верхней полусферы (точка небосвода непосредственно над головой) называется *зенитом*, полюс нижней полусферы – *надиром*.

В общем случае **астрономическим расстоянием** называется расстояние от одного небесного тела до другого (измеренное в световых годах, парсеках или астро-

номических единицах). Среднее расстояние между звездами (в галактиках, подобных нашей) составляет несколько световых лет. Среднее расстояние между галактиками (в созвездии) равняется примерно 20 их диаметрам, т.е. нескольким мегапарсекам.

Широта

В сферических координатах (r, θ, ϕ) **широтой** называется **угловое расстояние** δ от xy-плоскости (*фундаментальной плоскости*) до объекта, измеренное от начала координат; $\delta = 90° - \theta$, где θ – колатитьюда (дополнение широты).

В *географической системе координат* (или *картографической системе координат*) **широтой** называется угловое расстояние от экватора Земли до объекта, измеренное от центра Земли. Широта измеряется в градусах от –90° (Южный полюс) до +90° (Северный полюс). *Параллели* – линии постоянной широты.

В астрономии **небесной широтой** называется широта небесного объекта на небесной сфере от пересечения фундаментальной плоскости с небесной сферой, выраженная в определенной *системе небесных координат*. В *экваториальной системе координат* фундаментальной плоскостью является плоскость земного экватора, в *эклиптической системе координат* – плоскость эклиптики; в *галактической системе координат* – плоскость Млечного Пути; в *системе горизонтальных координат* – горизонт наблюдателя. Небесная широта измеряется в градусах.

Долгота

В сферических координатах (r, θ, ϕ) **долготой** называется **угловое расстояние** ϕ в xy-плоскости от x-оси до пересечения большого круга, проходящего через объект, с xy-плоскостью.

В *географической системе координат* (или *картографической системе координат*) **долготой** называется угловое расстояние, измеренное в направлении на восток вдоль экватора Земли от *гринвичского меридиана* (или *нулевого меридиана*) до пересечения с меридианом, проходящим через объект. Долгота измеряется в градусах от 0° до 360°. *Меридиан* – большой круг, проходящий через Северный и Южный полюсы Земли; меридианы являются линиями постоянной долготы.

В астрономии **небесной долготой** называется долгота небесного объекта на небесной сфере, измеренная в направлении на восток вдоль пересечения фундаментальной плоскости с небесной сферой в данной системе небесных координат от выбранной фиксированной точки. В *экваториальной системе координат* фундаментальной плоскостью является плоскость земного экватора; в *эклиптической системе координат* – плоскость эклиптики; в *галактической системе координат* – плоскость Млечного Пути и в *горизонтальной системе координат* – горизонт наблюдателя. Небесная долгота измеряется в единицах времени.

Колатитьюда

В сферических координатах (r, θ, ϕ) **колатитьюдой** (**дополнением широты**) называется **угловое расстояние** от δ-оси до объекта, измеренное от начала координат; $\theta = 90° - \delta$, где δ – **широта.**

В *географической системе координат* (или *картографической системе координат* **колатитудой (дополнением широты)** называется угловое расстояние от Северного полюса Земли до объекта, измеренное от центра Земли. Колатитуда измеряется в градусах.

Склонение

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*) **склонением** δ называется **небесная широта** небесного объекта на небесной сфере, измеренная от небесного экватора. Склонение измеряется в градусах от –90 до +90°.

Прямое восхождение

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*), привязанной к звездам, **прямым восхождением** *RA* называется **небесная долгота** небесного объекта на небесной сфере, измеренная в направлении на восток вдоль небесного экватора от точки весеннего равноденствия до пересечения с часовым кругом объекта. Прямое восхождение измеряется в единицах времени (часах, минутах и секундах), при этом один час равен примерно 15°.

Время, необходимое для одного полного периода прецессии равноденствия, называется *Платоническим годом* (или *Великим годом*); он длится примерно 257 столетий и незначительно сокращается. Данный цикл имеет важное значение для календаря Майя и в астрологии.

Часовой угол

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*), привязанной к Земле, **часовым углом** называется небесная долгота небесного объекта на небесной сфере, измеренная по небесному экватору от меридиана наблюдателя до пересечения с часовым кругом небесного объекта. Часовой угол измеряется в единицах времени (часах, минутах и секундах). Он показывает время, истекшее с момента последнего пересечения небесным объектом меридиана наблюдателя (для положительного часового угла), или время следующего пересечения (для отрицательного часового угла).

Полярное расстояние

В *экваториальной системе координат* (или *геоцентрической системе координат*) **полярным расстоянием** *PD* называется колатитьюда (**дополнение широты**) небесного объекта, т.е. **Угловое расстояние** от небесного полюса до небесного объекта на небесной сфере. Подобно тому, как склонение δ измеряется от небесного экватора: $PD = 90° \pm \delta$. Полярное расстояние выражается в градусах, и его величина не может быть больше 90°. Объект на небесном экваторе имеет полярное расстояние $PD = 90°$.

Эклиптическая широта

В *эклиптической системе координат* **эклиптической широтой** называется **небесная широта** небесного объекта на небесной сфере, измеренная от плоскости эклиптики. Эклиптическая широта измеряется в градусах.

Эклиптическая долгота

В *эклиптической системе координат* **эклиптической долготой** называется **небесная долгота** небесного объекта на небесной сфере, измеренная в направлении на восток по плоскости эклиптики от точки весеннего равноденствия. Эклиптическая долгота измеряется в единицах времени.

Высота

В *горизонтальной системе координат* **высота** *ALT* – **небесная широта** объекта относительно горизонта. Она дополняет **зенитный угол** *ZA*: $ALT = 90° - ZA$. Высота измеряется в градусах.

Азимут

В *горизонтальной системе координат* **азимутом** называется **небесная долгота** объекта, измеренная в направлении на восток по горизонту от полярной точки. Азимут измеряется в градусах от 0° до 360°.

Зенитный угол

В *горизонтальной системе координат* **зенитным углом** Z A называется колатитьюда (**дополнение широты**) объекта, измеренная от зенита.

Лунное расстояние

Лунным расстоянием называется угловое расстояние между луной и другим небесным объектом.

Расстояние эллиптической орбиты

Расстоянием эллиптической орбиты называется расстояние от тела массы m, находящегося на эллиптической орбите, до тела массы M в фокусе орбиты. Это расстояние задается как

$$\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

где a – *большая полуось*, e – *эксцентриситет* и θ – орбитальный угол.

Большая полуось a эллипса (или эллиптической орбиты) равна половине ее большой оси; это среднее (относительно эксцентрической аномалии) расстояние эллиптической орбиты. Среднее расстояние относительно **истинной аномалии** является *малой полуосью*, т.е. половиной малой оси эллипса (или эллиптической орбиты). *Эксцентриситет* e эллипса (или эллиптической орбиты) – это отношение половины расстояния c между фокусами и большой полуосью a: $e=\frac{c}{a}$.

Для эллиптической орбиты $e=\frac{r_+-r_-}{r_++r_-}$, где r_+ – **расстояние апоапсиды** и r_- – **расстояние периапсиды**.

Расстояние периапсиды

Расстоянием периапсиды называется расстояние r_- максимального сближения тела массы m с массой M, вокруг которой оно вращается по эллиптической орбите. $r_-=a(1-e)$, где a – *большая полуось* и e – *эксцентриситет.*

Перигей – периапсида эллиптической орбиты вокруг Земли. **Перигелий** – периапсида эллиптической орбиты вокруг Солнца. **Периастрий** – точка орбиты двойной звездной системы в момент максимального сближения звезд.

Расстояние апоапсиды

Расстоянием апоапсиды называется расстояние r_- наибольшего удаления тела массы m от тела массы M, вокруг которой оно вращается по эллиптической орбите. $r_+=a(1+e)$, где a – *большая полуось* и e – *эксцентриситет.*

Апогей – апоапсида эллиптической орбиты вокруг Земли. Афелий – апоапсида эллиптической орбиты вокруг Солнца. **Апоастрий** – точка орбиты двойной звездной системы в момент максимального удаления между звездами.

Истинная аномалия

Истинной аномалией называется **угловое расстояние** точки на орбите после прохождения точки периапсиды, измеренное в градусах.

Закон Титиуса-Боде

Закон Титиуса-Боде является эмпирическим (еще недостаточно хорошо объясненным) законом, аппроксимирующим среднее планетарное расстояние от Солнца (т.е. орбитальную *большую полуось планеты*) как $\frac{3k+4}{10}$ AU (астрономических единиц). Здесь 1 AU обозначает среднее планетарное расстояние от Солнца до Земли (т.е. около $1{,}5 \times 10^8$ км $\approx 8{,}3$ км световых минуты) и $k = 0, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7$ для Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Цереры (крупнейший астероид астероидного пояса), Юпитера, Сатурна, Урана, Плутона. При этом Нептун не соответствует данному закону – место Нептуна ($k = 2^7$) занимает Плутон.

Расстояния между доминирующим телом и спутником

Рассмотрим два небесных тела: *доминирующее M* и меньшее *m* (спутник на орбите вокруг *M*, или вторичная звезда, или пролетающая комета).

Средним расстоянием является среднее арифметическое максимального и минимального расстояний тела *m* от тела *M*.

Пусть ρ_M, ρ_m и R_M, R_m обозначают плотности и радиусы тел *M* и *m*. Тогда **пределом Роша** пары (*M, m*) называется максимальное расстояние между ними, в рамках которого происходит разрушение *m* под воздействием приливообразующих сил *M*, превосходящих внутренние гравитационные силы *m*. Данное расстояние равно $R_M \sqrt[3]{2\frac{\rho_M}{\rho_m}} \approx 1{,}26 R_M \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$, если является твердым сферическим телом и составляет около $2{,}423 R_M \sqrt[3]{\frac{\rho_M}{\rho_m}}$, если тело *m* является жидким. Предел Роша имеет смысл только тогда, когда он превышает значение R_M. Предел Роша имеет значения $0{,}8R_M$, $1{,}49R_M$ и $2{,}8R_M$ соответственно для пар Солнце–Земля, Земля–Луна и Земля–комета. Вероятной причиной появления колец Сатурна могла стать его луна, которая сблизилась с Сатурном, превысив свой предел Роша.

Пусть *d*(*m, M*) – расстояние между *m* и *M*, а S_m и S_M – массы *m* и *M*. Тогда **сфера Хилла** для *m* **в присутствии** *M* есть аппроксимация гравитационной *сферы влияния* *m* в условиях возмущающего влияния *M*. Ее радиус примерно равен $d(m, M)\sqrt[3]{\frac{S_m}{3S_M}}$. Например, радиус сферы Хилла для Земли равен 0,01 AU; Луна, удаленная на 0,0025 AU от Земли, полностью находится в пределах сферы Хилла Земли.

Пару (*M, m*) можно охарактеризовать посредством пяти **точек Лагранжа** L_i, $1 \le i \le 5$, где третье значительно меньшее тело (например, космический аппарат) имеет относительно стабильное состояние, поскольку его центробежная сила равна суммарной силе притяжения *M* и *m*. Такими точками будут следующие:

– L_1, L_2 и L_3, лежащие на прямой, проходящей через центры *M* и *m* так, что $d(L_3, m) = 2d(M, m)$, $d(M, L_2) = d(M, L_1) + d(m, L_2)$ и $d(L_1, m) = d(m, L_2)$;

– L_4 и L_5, принадлежащие орбите *m* вокруг *M* и образующие равносторонние треугольники с центрами *M* и *m*. Эти две точки являются наиболее стабильными; каждая из них составляет с *M* и *m* частное решение (пока нерешенной) гравитационной *задачи трех тел*. Возникновение Луны предполагается как следствие бокового удара по Земле медленно приблизившегося из точки Лагранжа L_4 в системе Солнце–Земля планетоида размером с Марс.

Глава 26

Расстояния в космологии и теории относительности

26.1. РАССТОЯНИЯ В КОСМОЛОГИИ

Вселенная определяется как полный пространственно-временной континуум, в котором мы существуем вместе со всей заключенной в нем энергией и веществом.

Космология занимается изучением крупномасштабной структуры вселенной. Специфическими проблемами космологической тематики являются *изотропия* вселенной (в крупнейшем масштабе вселенная представляется одинаковой по всем направлениям, т.е. инвариантной по отношению к вращениям), *однородность* вселенной (любые измеряемые свойства вселенной одинаковы повсюду, т.е. инвариантны по отношению к переносам), плотность вселенной, соразмерность вещества и антивещества, а также источник колебаний плотности в галактиках.

В 1929 г. Хаббл открыл, что галактики обладают положительным *красным смещением*, т.е. все галактики, за исключением нескольких близлежащих галактик типа Андромеды, удаляются от Млечного Пути. Исходя из принципа Коперника (о том, что мы не находимся в особом месте вселенной), можно заключить, что все галактики также удаляются друг от друга, т.е. мы живем в динамическом, расширяющемся мире и чем дальше от нас находится галактика, тем быстрее она движется (это называется теперь *законом Хаббла* (*красного смещения*). Потоком Хаббла движение называется общее разбегание галактик и скоплений галактик в результате расширения вселенной. Оно происходит по радиальным направлениям от наблюдателя и подчиняется закону красного смещения. Галактики могут преодолевать это расширение в масштабах, меньших, чем скопления галактик, однако скопления галактик всегда будут стремиться к разбеганию в соответствии с законом красного смещения.

В космологии преобладающей научной теорией о возникновении и форме вселенной является теория *"большого взрыва"*. Наблюдение того, что галактики кажутся удаляющимися друг от друга, можно совместить с общей теорией относительности и экстраполировать состояние вселенной в обратном отсчете времени. Основанные на этой методике построения показывают, что по мере удаления в прошлое вселенная становится плотнее и ее температура увеличивается. В конечном итоге возникает гравитационная сингулярность, при которой все расстояния сводятся к нулю, а давление и температура возрастают до бесконечности. Термин *"большой взрыв"* используется для обозначения некой гипотетической точки во времени, когда наблюдаемое началось расширение вселенной. На основе проведенных измерений параметров расширения в настоящее время предполагается, что возраст вселенной равен 13,7 ± 0,2 млрд лет. Этот период должен быть больше, если разбегание, как предполагалось недавно, идет с ускорением. Дофас на основе данных об относительном содержании урана и тория в хондритовых метеоритах предположил [Dau05], что вселенная существует уже 14,5 ± 2 млрд лет.

В космологии (или, точнее, в *космографии*, науке об измерении вселенной) существует много способов для определения расстояния между двумя точками, поскольку в условиях расширяющейся вселенной расстояния между движущимися объектами постоянно изменяются, и для наблюдателей на Земле смотреть вдаль означает смотреть в прошлое. Объединяющим фактором при этом является то, что все меры расстояний так или иначе оценивают разделение между событиями по *радиально нулевым траекториям*, т.е. траекториям фотонов, заканчивающихся в точке наблюдения. В общем случае **космологическое расстояние** – это расстояние, выходящее далеко за пределы нашей галактики.

Геометрия вселенной определяется рядом *космологических параметров*: *параметром расширения* (или *коэффициентом масштабирования*) *a, константой Хаббла H, плотностью* ρ и *критической плотностью* ρ_{crit} (плотностью, обусловливающей прекращение расширения вселенной и, в конечном счте, ее обратный коллапс), *космологической постоянной* Λ, *кривизной вселенной k*. Многие из этих величин могут быть связаны между собой предположениями в рамках конкретной космологической модели. Наиболее общими космологическими моделями являются открытая и закрытая *космологические модели Фридманна–Леметра* и *космологическая модель Эйнштейна-де Ситтера* (см. также *космологическая модель Эйнштейна, космологическая модель де Ситтера, космологическая модель Эддинтона-Леметра*). Космологическая модель Эйнштейна–де Ситтера исходит из того, что вселенная является однородной, изотропной, имеет постоянную кривизну с нулевой космологической постоянной Λ и давлением P. Для постоянной массы вселенной M $H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho, \quad t = \frac{2}{3}H^{-1}, a = \frac{1}{R_C}\left(\frac{9GM}{2}\right)^{1/3} t^{2/3}$, где $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ м^3/кг$^{-1}$/с$^{-2}$ – *гравитационная постоянная*, $R_C = |k|^{-1/2}$ – абсолютное значение радиуса кривизны и t – возраст вселенной.

Параметр расширения $a = a(t)$ является *коэффициентом масштабирования,* связывающим размер вселенной $R = R(t)$ во времени t с размером вселенной $R_0 = R(t_0)$ во времени t_0, по какому $R = aR_0$. В настоящее время его обычно рассматривают безразмерным с $a(t_{obser}) = 1$, где t_{obser} – текущий возраст вселенной.

Константа Хаббла H – коэффициент пропорциональности между скоростью расширения v и размерами вселенной R, т.е. $v = HR$. Это равенство выражает *закон Хаббла* (*красного смещения*) с константой Хаббла $H = \frac{a'(t)}{a(t)}$. Текущее значение константы Хаббла, по недавним оценкам, равно $H_0 = 71 \pm 4$ кмс$^{-1}$ Мпк$^{-1}$, где нижний индекс 0 означает современную эпоху, так как в общем случае H изменяется со временем. *Время Хаббла* и **расстояние Хаббла** определяются как $t_H = \frac{1}{H_0}$ и $D_H = \frac{c}{H_0}$ (здесь c – скорость света) соответственно.

Плотность массы ρ (равная ρ_0 в настоящую эпоху) и значение космологичекой постоянной Λ являются динамическими характеристиками вселенной. Их можно преобразовать в безразмерные параметры плотности Ω_M и Ω_Λ: как $\Omega_M = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^3}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^3}$. Третий параметр плотности Ω_R измеряет "кривизну пространства" и может быть определен из отношения $\Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_R = 1$.

Этими параметрами в полной мере определяется геометрия вселенной, если она однородна, изотропна и преимущественно материальна.

Скорость галактики измеряется по *доплеровскому сдвигу*, т.е. эффекту по факту изменения длины волны испускаемого светового излучения в зависимости от движения источника. Релятивистская форма доплеровского сдвига существует для объектов, движущихся с очень большой скоростью: она выражается как $\frac{\lambda_{\text{obser}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$, где λ_{emit} – длина испускаемой волны и λ_{obser} – сдвинутая наблюдаемая длина волны. Разница длин волн по отношению к неподвижному источнику называется *красным смещением* (если источник удаляется) и обозначается буквой z. Релятивистское красное смещение z для частицы записывается как $z = \frac{\Delta\lambda_{\text{obser}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{obser}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1.$

Космологическое красное смещение непосредственно связано с параметром расширения $a = a(t) : z + 1 = \frac{a(t_{\text{obser}})}{a(t_{\text{emit}})}$. Здесь $a(t_{\text{obser}})$ является значением параметра расширения в период наблюдения приходящего от объекта света, а t_{emit} – значением параметра расширения в период его излучения.

Расстояние Хаббла

Расстояние Хаббла есть константа

$$D_H = \frac{c}{H_0} = 4220 \text{ Мпк} \approx 1{,}3 \times 10^6 \text{ м} \approx 1{,}377 \times 10^{10} \text{ световых лет},$$

где c – скорость света и $H_0 = 71 \pm 4$ кмс$^{-1}$ Мпк$^{-1}$ – *константа Хаббла.*

Это расстояние от Земли до *космического светового горизонта*, которым обозначается край видимой вселенной, т.е. радиус сферы, центром которой является Земля, протяженностью около 13,7 млрд световых лет. Это расстояние часто называют **ретроспективным расстоянием**, поскольку астрономы, наблюдающие удаленные объекты, фактически "смотрят назад" в историю вселенной.

Для небольшого v/c или малого расстояния d в расширяющейся вселенной скорость пропорциональна расстоянию и все меры расстояний, например **расстояние углового диаметра, фотометрическое расстояние** и т.п., сходятся к одному значению. Взяв линейную аппроксимацию, получим $d = zD_H$, где z – *красное смещение.* Однако эта формула справедлива только для небольших значений красного смещения.

Расстояние совместного движения

В стандартной модели "большого взрыва" используются координаты *совместного движения*, где пространственная система координат привязана к среднему местоположению галактик. Такая система координат позволяет пренебречь параметрами времени и расширения вселенной, и форма пространства может быть представлена как пространственная гиперповерхность с постоянным космологическим временем.

Расстоянием совместного движения (или *координатным расстоянием, космологическим расстоянием* χ) называется расстояние в координатах совместного движения между двумя точками в пространстве в одно и то же космологическое время, т.е. расстояние между двумя соседними объектами во вселенной, которое

остается неизменным относительно эпохи, если оба объекта движутся в потоке Хаббла. Это расстояние между ними измеренное масштабной линейкой в момент их наблюдения (**собственное расстояние**), деленное на отношение коэффициентов масштабирования вселенной в исходный текущий периоды. Иными словами, это собственное расстояние, умноженное на (1 + z), где z – красное смещение:

$$d_{\text{comov}}(x,y) = d_{\text{proper}}(x,y)\cdot\frac{a(t_{\text{obser}})}{a(t_{\text{emit}})} = d_{\text{proper}}(x,y)\cdot(1+z).$$

Во время t_{obser}, т.е. в настоящую эпоху, $a = a(t_{\text{obser}}) = 1$ и $d = d_{\text{proper}}$, т.е. расстояние совместного движения между двумя соседними событиями (с близкими значениями красного смещения или расстояния) является собственным расстоянием между ними. В общем случае для космологического времени t выполняется равенство $d_{\text{comov}} = \dfrac{d_{\text{proper}}}{a(t)}$.

Полное **расстояние совместного движения по линии прямой видимости** D_C от Земли до удаленного объекта рассчитывается посредством интегрирования бесконечно малых $d_{\text{comov}}(x,\ y)$ между соседними событиями вдоль луча времени, начиная с времени t_{emit}, когда свет был излучен объектом, до момента t_{obser}, когда осуществлялось наблюдение объекта:

$$D_C = \int_{t_{\text{emit}}}^{t_{\text{obser}}} \frac{cdt}{a(t)}.$$

На языке красного смещения расстояние D_C от Земли до удаленного объекта рассчитывается посредством интегрирования бесконечно малых $d_{\text{comov}}(x,\ y)$ между соседними событиями вдоль радиального луча времени от $z = 0$ до объекта: $D_C = D_H\int_0^z \frac{dz}{E(z)}$, где D_H есть **расстояние Хаббла**, и $E(z) = (\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda)^{1/2}$.

В некотором смысле расстояние совместного движения является фундаментальной мерой расстояния в космологии, поскольку все другие расстояния могут быть выражены через него.

Собственное расстояние

Собственным расстоянием (или *физическим расстоянием, ординарным расстоянием*) называется расстояние между двумя соседними событиями в системе, в которой они происходят в одно время. Это расстояние будет измеряться масштабной линейкой в момент наблюдения. Следовательно, для космологического времени t выполняется равенство

$$d_{\text{proper}}(x,\ y) = d_{\text{comov}}\cdot a(t),$$

где d_{comov} – **расстояние совместного движения** и $a(t)$ – *коэффициент масштабирования.*

В современную эпоху (т.е. во время t_{obser}) выполняется условие $a = a(t_{\text{obser}}) = 1$ и $d_{\text{proper}} = d_{\text{comov}}$. Таким образом, собственным расстоянием между двумя соседними событиями (т.е. событиями с близкими значениями красного смещения или расстояния) является расстояние, которое мы будем измерять локально между двумя событиями сегодня, если эти две точки связаны потоком Хаббла.

Расстояние собственного движения

Расстоянием собственного движения (или расстоянием совместного поперечного движения, *современным расстоянием углового диаметра*) D_M называется расстояние от Земли до удаленного объекта, которое определяется как отношение актуальной поперечной скорости (в расстоянии по времени) объекта к его *собственному движению* (в радианах за единицу времени). Оно выражается как

$$D_M = \begin{cases} D_H \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_R}} \sinh(\sqrt{\Omega_R} D_C / D_H), & \Omega_R > 0, \\ D_C, & \Omega_R = 0, \\ D_H \dfrac{1}{\sqrt{\Omega_R}} \sin(\sqrt{|\Omega_R|} D_C / D_H), & \Omega_R < 0, \end{cases}$$

где D_H – **расстояние Хаббла** и D_C – **расстояние совместного движения по линии прямой видимости.** Для $\Omega_\Lambda = 0$ существует аналитическое решение (z – *красное смещение*):

$$D_M = D_H \frac{2(2 - \Omega_M(1-z) - (2-\Omega_M)\sqrt{1+\Omega_M z})}{\Omega_M^2 (1+z)}.$$

Расстояние собственного движения D_M совпадает с расстоянием совместного движения по линии прямой видимости D_C тогда и только тогда, когда кривизна вселенной равна нулю. **Расстояние совместного движения** между двумя событиями при одинаковых красном смещении или расстоянии, но разнесенными по небосводу на некоторый угол $\delta\theta$, равно $D_M \delta\theta$.

Расстояние D_M связано с **фотометрическим расстоянием** D_L как $D_M = \dfrac{D_L}{1+z}$ и с **расстоянием углового диаметра** D_A как $D_M = (1+z) D_A$.

Фотометрическое расстояние

Фотометрическое расстояние D_L есть расстояние от Земли до удаленного объекта, определяемое отношением между наблюдаемым потоком S и яркостью L:

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}.$$

Данное расстояние связано с **расстоянием собственного движения** D_M как $D_L = (1+z) D_M$ и **расстоянием углового диаметра** D_L как $D_L = (1+z)^2 D_A$, где z – красное смещение.

Фотометрическое расстояние учитывает то обстоятельство, что наблюдаемая светимость ослаблена факторами релятивистского красного смещения и доплеровского сдвига излучения, каждый из которых дает $(1 + z)$ – ослабление:

$$L_{\text{obser}} = \frac{L_{\text{emit}}}{(1+z)^2}$$

Скорректированное фотометрическое расстояние D'_L определяется как $D'_L = \dfrac{D_L}{1+z}$.

Модуль расстояния

Модулюс расстояния DM определяется как $DM = 5\ln\left(\frac{D_L}{10\,pc}\right)$, где D_L – **фотометрическое расстояние.** Модулюс расстояния – разность между абсолютной величиной и наблюдаемой величиной астрономического объекта. Модулюсы расстояний обычно используются для выражения расстояний до других галактик. Так, например, модулюс расстояния галактики Большого Магелланова Облака составляет 18,5; галактики Андромеда – 24,5; скопление Девы имеет модулюс расстояния, равный 31,7.

Расстояние углового диаметра

Расстоянием углового диаметра (или *расстоянием угловой протяженности*) D_A называется расстояние от Земли до удаленного объекта, определенное как отношение физического поперечного размера объекта к его угловому размеру (в радианах). Оно используется для преобразования угловых разделений в телескопических изображениях в собственные разделения источника. Специфика этого расстояния состоит в том, что оно не увеличивается бесконечно при $z \to \infty$, оно начинает уменьшаться при $z \sim 1$, и после этого более удаленные объекты видятся как имеющие большие угловые размеры. Расстояние углового диаметра связано с **расстоянием собственного движения** D_M как $D_A = \frac{D_M}{1+z}$ и **фотометрическим расстоянием** D_L как

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2},$$

где z – красное смещение.

Если расстояние углового диаметра основано на представлении диаметра объекта как произведения угла и расстояния (угол × расстояние), то **расстояние площади** определяется аналогичным образом из представления площади объекта как произведения пространственного угла и квадрата расстояния (телесный угол × расстояние^2).

Расстояние светового пути

Расстоянием светового пути (или *расстоянием времени светового пути*) D_{lt} называется расстояние от Земли до удаленного объекта, определенное как $D_{lt} = c(t_{\text{obser}} - t_{\text{emit}})$, где t_{obser} – время, когда объект наблюдался, и t_{emit} – время, кода свет был излучен объектом.

Это расстояние используется редко, поскольку весьма трудно определить время t_{emit} – возраст вселенной в момент излучения света, который мы видим.

Расстояние параллакса

Расстоянием параллакса D_P называется расстояние от Земли до удаленного объекта, определенное измерением *параллаксов*, т.е. кажущихся изменений положения объекта на небосводе в результате перемещения наблюдателя с Землей вокруг Солнца.

Космологический параллакс измеряется как разность углов линии видимости объекта из двух конечных точек диаметра орбиты Земли, которая используется в качестве *опорной линии.* Для данной опорной линии параллакс $\alpha - \beta$ зависит от расстояния и, зная его и длину опорной линии (две астрономические единицы AU,

где AU ≈ 150 млн км – расстояние между Солнцем и Землей), расстояние до звезды можно вычислить по формуле

$$D_P = \frac{2}{\alpha - \beta},$$

где D_P – выражено в парсеках, а α и β – в арксекундах.

В астрономии "параллакс" означает обычно *годовой параллакс p*, который является разницей в углах наблюдения звезды со стороны Земли и со стороны Солнца. Соответственно расстояние до звезды (в парсеках) определяется как

$$D_P = \frac{1}{p}$$

Кинематическое расстояние

Кинематическое расстояние – расстояние до галактического источника, которое определяется из вращения галактики, когда известна *радиальная скорость* источника. *Неоднозначность кинематического расстояния* возникает (только в нашей галактике), поскольку вдоль данной линии видимости каждое значение радиальной скорости соответствует двум расстояниям одинаково удаленных от точки касания. Данная проблема решается для некоторых галактических регионов посредством измерения их спектра поглощения в том случае, если между наблюдателем и регионом имеется межзвездное облако.

Расстояние, радара

Расстоянием, радара D_R называется расстояние от Земли до удаленного объекта, измеренное с помощью *радара.*

Радиолокационный сигнал – обычно высокочастотный радиоимпульс, посылаемый в течение короткого промежутка времени. При встрече с проводящим объектом достаточное количество энергии отражается от него обратно и принимается радиолокационной системой. Поскольку радиоволны в воздухе распространяются практически с той же скоростью, что и в вакууме, расстояние D_R до обнаруженного объекта можно вычислить по временному интервалу t между переданным и возвратившимся импульсами по формуле

$$D_R = \frac{1}{2}ct,$$

где c – скорость света.

Лестница космологических расстояний

Для измерения расстояний до астрономических объектов используется своего рода "лестница" различных методов; каждый из них обеспечивает вычисления только для ограниченного множества расстояний, а каждый метод, используемый для больших расстояний, базируется на данных, полученных в ходе предыдущих этапов.

Исходной точкой является знание расстояния от Земли до Солнца; это расстояние называется *астрономической единицей* (AU) и равно примерно 150 млн км. Коперник был первым, кто сделал (Dobovolutionibus, 1543) приблизительную модель Солнечной системы, основываясь на данных, полученных в древние времена. Расстояния внутри Солнечной системы измеряются посредством сравнения временных интервалов между излучаемыми радиолокационными радиоимпульсами и их отражениями от планет или астероидов. Современные модели отличаются высокой точностью измерений.

Следующая ступенька лестницы включает в себя простые геометрические методы; они позволяют продвинуться вперед на несколько сотен световых лет. Расстояние до ближайших звезд может быть измерено с помощью их *параллаксов*; используя орбиту Земли в качестве опорной линии, расстояние до звезд можно определить методом триангуляции. Данный метод имеет погрешность около 1% на дальности до 50 световых лет и около 10% на дальности до 500 световых лет.

На основе данных, полученных геометрическими методами и дополненных *фотометрией* (т.е. измерением параметров яркости) и спектроскопией, можно достигнуть следующей ступеньки к звездам, расположенным настолько далеко, что их параллаксы пока еще не поддаются измерениям. Поскольку яркость убывает пропорционально квадрату расстояния, мы можем, если известны *абсолютная яркость* звезды (т.е. ее яркость на стандартном опорном расстоянии 10 пк) и ее *видимая яркость* (т.е. истинная яркость, наблюдаемая на Земле), сказать, как далеко от нас находится эта звезда. Для определения абсолютной яркости можно воспользоваться *диаграммой Герцшпрунга–Рассела:* звезды одинакового типа имеют одинаковую яркость; следовательно, если известен тип звезды (по цвету и/или спектру), можно рассчитать расстояние до нее методом сравнения ее видимой яркости с абсолютной; последняя может быть получена из геометрических параллаксов соседних звезд.

Для определения еще больших расстояний во вселенной требуется дополнительный элемент: *стандартные свечи,* т.е. несколько типов космологических объектов, для которых можно определить их абсолютную яркость не зная расстояния до них. *Первичными стандартными свечами* являются *цефеиды*. Они периодически изменяют свои размеры и температуру. Существует связь между яркостью этих пульсирующих звезд и периодом их колебаний, и эту взаимосвязь можно использовать для определения их абсолютной яркости. Цефеиды можно найти на удалении до скопления Девы (60 млн световых лет). Еще одним типом стандартной свечи (*вторичные стандартные свечи*), которые ярче цефеид и соответственно могут использоваться для определения расстояний до галактик, находящихся на удалении даже сотен миллионов световых лет, являются сверхновые и целые галактики.

Для действительно больших расстояний (сотен миллионов или даже миллиардов световых лет) используются космологическое красное смещение и закон красного смещения (закон Хаббла). Однако не совсем ясно, что считать здесь "расстоянием", и в космологии существуют несколько разновидностей расстояний (**фотометрическое расстояние, расстояние собственного движения, расстояние углового диаметра** и др.).

Для разных ситуаций в космологии применяются самые разнообразные и специфические способы измерения расстояний, например **расстояние отраженного света, расстояние радара Бонди, расстояние типа RR Лиры,** а также расстояния *векового, статистического* и *спектрального* параллаксов.

26.2. РАССТОЯНИЯ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Пространство-время по Минковскому (или *пространство Минковского, пространство-время по Лоренцу, плоское пространство-время*) – обычная геометрическая модель для специальной теории относительности Эйнштейна. В такой модели три обычных измерения пространства дополняются одним измерением времени и все вместе образуют четырехмерное *пространство-время* $\mathbb{R}^{1,3}$ в отсутствие тяготения.

Векторы в $\mathbb{R}^{1,3}$ называются *4-векторами* (или *событиями*). Они могут быть записаны как (*ct, x, y, z*), где первая компонента называется *временноподобной компонентой* (*c* – скорость света и *t* – время), тогда как другие три компоненты называются *пространственными компонентами.* В *сферических координатах* эти векторы записываться как (*ct, r,* θ, ϕ). В теории относительности *сферические координаты* есть система криволинейных координат (*ct, r,* θ, ϕ), где *c* – скорость света, *t* – время, *r* – *радиус*, проведенный из начала координат в данную точку с $0 \le r < \infty$, ϕ – азимутальный угол в *xy*-плоскости от *x*-оси измеренный с $0 \le \varphi < 2\pi$ (долгота), а θ – полярный угол, измеренный от *z*-оси с $0 \le \theta \le \pi$ (*дополнение широты*). 4-Векторы классифицируются по знаку квадрата их *нормы*

$$\| v \|^2 = \langle v, v \rangle = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Они являются *временноподобными, пространственноподобными* и *изотропными,* если квадраты их нормы положительны, отрицательны или равны нулю соответственно.

Множество всех изотропных векторов образуют *световой конус*. Если исключить начало координат, то пространство можно разделить на три области: области *абсолютного будущего* и *абсолютного прошлого,* попадающие в световой конус, точки которых связаны с началом координат временноподобными векторами с положительными или отрицательными значениями координаты времени соответственно, и область *абсолютного небытия*, выпадающую из светового конуса, точки которой связаны с началом координат пространственноподобными векторами.

Мировая линия объекта – последовательность событий, обозначающая временную историю объекта. Мировая линия показывает путь данной точки в пространстве Минковского. Это одномерная *кривая,* представленная координатами как функция одного параметра. Мировая линия является *временноподобной* кривой в пространстве-времени, т.е. в любой точке *ее касательный вектор* является временноподобным четырехмерным 3-вектором. Все мировые линии попадают световой конус, образованный *изотропными* кривыми, т.е. кривыми, касательные векторы которых являются изотропными 4-векторами, соответствующими движению света и других частиц с нулевой массой покоя.

Мировые линии частиц с постоянной скоростью (другими словами, свободно падающих частиц) называются *геодезическими.* В пространстве Минковского они являются прямыми линиями.

Геодезическая в пространстве Минковского, соединяющая два данных события *x* и *y,* является самой длинной кривой из всех мировых линий, соединяющих два эти события. Это следует из **обратного неравенства треугольника** (или *неравенства времени Эйнштейна*)

$$\| x + y \| \ge \| x \| + \| y \|,$$

в соответствии с которым временноподобная кривая, соединяющая два события, всегда короче соединяющей их временноподобной геодезической, т.е. собственное время частицы, свободно двигающейся от *x* к *y*, превышает собственное время любой другой частицы, чья мировая линия соединяет эти события. Данный факт обычно называют *парадоксом близнецов.*

Пространство-время – четырёхмерное многообразие, которое является обычной математической моделью для общей теории относительности Эйнштейна. Здесь три пространственные компоненты и одна временноподобная компонента

образуют четырехмерное пространство-время при наличии гравитации. Гравитация является эквивалентом геометрических свойств пространства-времени, и при наличии гравитации геометрия пространства-времени искривлена. Следовательно, пространство-время является четырехмерным искривленным многообразием, для которого касательное пространство в любой точке есть пространство Минковского, т.е. *псевдоримановым многообразием* с сигнатурой (1, 3).

В общей теории относительности гравитация описывается свойствами локальной геометрии пространства-времени. В частности, гравитационное поле может быть построено с помощью **метрического тензора**, который количественно описывает геометрические свойства пространства-времени, такие как расстояние, площадь и угол. Материя описывается с помощью ее *тензора энергии напряжения* – величины, характеризующей плотность и давление материи. Сила взаимодействия между материей и гравитацией определяется *постоянной силы тяжести.*

Уравнением поля Эйнштейна называется уравнение общей теории относительности, которое описывает, как материя создает силу тяготения и наоборот, как сила тяготения воздействует на материю. Решением уравнения поля Эйнштейна является некая **метрика Эйнштейна**, соответствующая данной массе и распределенного давления материи.

Черная дыра – массивный астрофизический объект, который (теоретически) возникает при коллапсе нейтронной звезды. Силы тяготения черной дыры настолько велики, что преодолевают даже давление нейтронов, и объект стягивается в точку (называемую *сингулярностью*). Даже свет не может преодолеть силу притяжения черной дыры в пределах так называемого *радиуса Шварцчайльда* (или *гравитационного радиуса*) черной дыры. Незаряженные черные дыры с нулевым угловым моментом называются *черными дырами Шварцчайльда.* Незаряженные черные дыры с ненулевым угловым моментом называются *черными дырами Керра.* Невращающиеся заряженные черные дыры называются *черными дырами Рейсснера–Нордстрома.* Заряженные вращающиеся черные дыры называются *черными дырами Керра–Ньюмана.* Соответствующие метрики описывают, как пространство-время искривляется материей в присутствии этих черных дыр.

Дополнительную информацию можно найти, например, в [Wein72].

Метрика Минковского

Метрика Минковского – псевдориманова метрика, определяемая на *пространстве Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$, т.е. на четырехмерном действительном векторном пространстве, которое рассматривается как псевдоевклидово пространство с сигнатурой (1, 3). Она определяется **метрическим тензором**

$$((g_{ij})) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Линейный элемент ds^2 и *элемент ds пространственно-временного интервала* данной метрики задаются как

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

В *сферических координатах* $(ct,\ r,\ \theta,\ \phi)$ мы получаем $ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - -r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2$.

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ с сигнатурой (3,1) и *линейным элементом*

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

может также использоваться как пространственно-временная модель специальной теории относительности Эйнштейна. Обычно *сигнатура* (1, 3) используется в физике элементарных частиц, а *сигнатура* (3, 1) – в теории относительности.

Метрика Лоренца

Метрикой Лоренца (или **лоренцевой метрикой**) называется **псевдориманова метрика** с сигнатурой $(1, p)$.

Лоренцево многообразие – многообразие, снабженное метрикой Лоренца. Искривленное пространство-время общей теории относительности может быть смоделировано как лоренцево многообразие M с сигнатурой (1, 3). *Пространство Минковского* $\mathbb{R}^{1,3}$ с плоской **метрикой Минковского** является моделью плоского лоренцева многообразия.

В *лоренцевой геометрии* обычно используется следующее понятие расстояния. Для спрямляемой не пространствоподобной кривой γ: $[0, 1] \to M$ в пространстве-времени M *длина* кривой γ определяется как $l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{-\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle} dt$. Для пространственноподобной кривой $l(\gamma) = 0$. Тогда расстояние Лоренца между двумя точками $p, q \in M$ определяется как

$$\sup_{\gamma \in \Gamma} l(\gamma),$$

если $p < q$, т.е., если множество Γ *направленных в будущее* не пространственноподобных кривых от p до q является непустым. В остальных случаях расстояние Лоренца равняется 0.

Расстояние аффинного пространства-времени

Для пространства-времени (M^4, g) существует единственная аффинная параметризация $s \to \gamma(s)$ для каждого светового луча (т.е. изотропной геодезической), проходящего через событие наблюдения p_{obser}, такое что $\gamma(0) = p_{\text{obser}}$ и $g\left(\frac{d\gamma}{dt}, U_{\text{obser}}\right) = 1$, где U_{obser} – 4-скорость наблюдателя в p_{obser} (т.е. вектор с $g(U_{\text{obser}}, U_{\text{obser}}) = -1$).

В таком случае **расстоянием аффинного пространства-времени** называется *аффинный параметр* s, рассматриваемый в качестве меры расстояния.

Расстояние аффинного пространства-времени является монотонным, увеличивающимся вдоль каждого луча; оно совпадает в бесконечно малой окрестности p_{obser} с евклидовым расстоянием в покоящейся системе координат U_{obser}.

Кинематическая метрика

Для заданного множества X **кинематической метрикой** (или **временноподобной метрикой**) является такая функция τ: $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, что для всех $x, y, z \in X$ имеют место условия:

1) $\tau(x, x) = 0$;

2) если $\tau(x, y) > 0$ то $\tau(y, x)$ (*антисимметрия*);

3) если $\tau(x, y), \tau(y, z) > 0$ то $\tau(x, z) > \tau(x, y) + \tau(y, z)$ (**обратное неравенство треугольника**).

Пространственно-временное множество X состоит из *событий* $x = (x_0, x_1)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$ обычно является *временем*, а $x_1 \in \mathbb{R}$ – *пространственным местоположением* события x. Неравенство $\tau(x, y) > 0$ означает *обусловленность,* т.е. x может влиять на y; обычно оно эквивалентно неравенству $y_0 > x_0$ и значение $\tau(x, y) > 0$ может считаться наибольшим (поскольку зависит от скорости) собственным (т.е. *субъективным*) временем движения от x до y.

Если силой тяготения можно пренебречь, то из неравенства $\tau(x, y) > 0$ следует, что $y_0 - x_0 \geq \| y_1 - x_1 \|_2$ и $\tau(x,y) = ((y_0 - x_0)p - \| y_1 - x_1 \|_2^p)^{1/p}$ (как введено Буземаном в 1967 г.) является действительным числом. Для $p \approx 2$ оно совместимо с наблюдениями специальной теории относительности.

Кинематическая метрика не является обычной в нашем понимании метрикой и никак не связана с **кинематическим расстоянием** в астрономии.

Расстояние Лоренца–Минковского

Расстоянием Лоренца–Минковского называется расстояние на $\mathbb{R}^n$ (или C^n), определенное как

$$\sqrt{| x_1 - y_1 |^2 - \sum_{i-2}^{n} | x_i - y_i |^2}.$$

Галилеево расстояние

Галилеево расстояние – расстояние на $\mathbb{R}^n$, определенное как

$$| x_1 - y_1 |,$$

если $x_1 \neq y_1$, и как

$$\sqrt{(x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2},$$

если $x_1 = y_1$. Пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное галилеевым расстоянием, называется *галилеевым пространством.* Для $n = 4$ оно является математической моделью для пространства-времени классической механики по Галилею–Ньютону, в котором расстояние между двумя событиями, происходящими в точках p и q в моменты времени t_1 и t_2, определяется как временной интервал $|t_1 - t_2|$, тогда как в случае одновременности этих событий оно определяется как расстояние между точками p и q

Метрика Эйнштейна

В общей теории относительности, которая описывает, как материя искривляет пространство-времена, **метрика Эйнштейна** есть решение *уравнения поля Эйнштейна*

$$R_{ij} - \frac{g_{ij}R}{2} + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij},$$

т.е. **метрический тензор** ((g_{ij})) с сигнатурой (1, 3), соответствующий данной массе и распределению давления вещества. Здесь $E_{ij} = R_{ij} - \frac{g_{ij}R}{2} + \Lambda g_{ij}$ – *тензор кривизны Эйнштейна*, R_{ij} – *тензор кривизны Риччи,* R – скаляр величиной Риччи, Λ – *космологическая постоянная*, G – *гравитационная постоянная* и T_{ij} – *тензор энергии напряжения. Пустое пространство* (*вакуум*) соответствует случаю нулевого тензора Риччи: $R_{ij} = 0$.

Статическая метрика Эйнштейна для однородной и изотропной вселенной задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{dr^2}{(1-kr^2)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где k – кривизна пространства-времени и коэффициент масштабирования равен 1.

Метрика де Ситтера

Метрикой де Ситтера называется максимально симметричное вакуумное решение *уравнения поля Эйнштейна* с положительной космологической постоянной Λ, определенное *линейным элементом*

$$ds^2 = dt^2 + e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2).$$

Без космологической постоянной (т.е. при $\Lambda = 0$) наиболее симметричным решением уравнения поля Эйнштейна в вакууме является плоская **метрика Минковского**.

Метрика анти-де Ситтера соответствует отрицательному значению Λ.

Метрика Шварцчайльда

Метрика Шварцчайльда – решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг сферически симметричного распределения массы; данная метрика дает описание вселенной вокруг черной дыры с данной массой, из которой невозможно извлечение энергии. Эта метрика была получена К. Шварцчайльдом в 1916 г., всего через несколько месяцев после опубликования уравнения поля Эйнштейна, и стала первым точным решением данного уравнения.

Линейный элемент этой метрики задается как

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ – *радиус Шварцчайльда*, m – масса черной дыры и G – *гравитационная постоянная.*

Данное решение действительно только для радиусов, которые больше r_g, поскольку при $r = r_g$ мы получаем координатную сингулярность. Данной проблемы можно избежать посредством приведения к другим пространственно-временным координатам, которые называются координатами *Крускала–Чекереса.* При $r \to +\infty$ метрика Шварцшильда стремится к **метрике Минковского.**

Метрика Крускала–Чекереса

Метрика Крускала–Чекереса есть решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг статического сферически симметричного распределения массы, заданное *линейным элементом*

$$ds^2 = 4\frac{r_g}{r}\left(\frac{r_g}{R}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{r}{r_g}}(c^2 dt'^2 - dr'^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $r_g = \dfrac{2Gm}{c^2}$ – *радиус Шварцчайльда*, m – масса черной дыры, G – гравитационная постоянная, R – постоянная, и *координаты Крускала–Чекереса* (t', r', θ, ϕ) получены из *сферических координат* (ct, r, θ, ϕ) с помощью *преобразования Крускала–Чекереса* $r'^2 - ct'^2 = R2\left(\dfrac{r}{r_g} - 1\right)e^{\frac{r}{r_g}}$, $\dfrac{ct'}{r'} = \text{tgh}\left(\dfrac{ct}{2r_g}\right)$.

Именно, метрика Крускала–Чекереса является **метрикой Шварцчайльда,** записанной в координатах Крускала–Чекереса. Она показывает, что сингулярность пространства-времени в метрике Шварцчайльда у радиуса Шварцчайльда r_g не является реальной физической сингулярностью.

Метрика Коттлера

Метрикой Коттлера называется единственное решение *уравнения поля Эйнштейна* для сферического симметричного вакуума с космологической постоянной Λ. Эта метрика задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Она называется также **метрикой Шварцайльда-де Ситтера** для $\Lambda > 0$ и **метрикой Шварцшильда–анти-де Ситтера** для $\Lambda < 0$.

Метрика Райсснера–Нордстрома

Метрика Райсснера-Нордстома – решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг сферически симметричного распределения массы в присутствии заряда; данная метрика дает нам представление вселенной вокруг черной дыры с зарядом.

Линейный элемент данной метрики задается как

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где m – масса дыры, e – заряд ($e < m$); здесь использованы единицы измерения, в которых скорость света c и гравитационная постоянная G равны единице.

Метрика Керра

Метрика Керра (или **метрика Керра–Шайльда**) есть точное решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг осесимметричного вращающегося распределения массы; эта метрика дает нам представление вселенной вокруг вращающейся черной дыры.

Линейный элемент этой метрики задается (в *форме Бойера–Линдквиста*) как

$$ds^2 = \rho^2\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{\rho^2}(a\sin^2\theta d\phi - dt)^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ и $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$. Здесь m – масса черной дыры, и a – угловая скорость, измеренная с позиции удаленного наблюдателя.

Обобщение метрики Керра для заряженной черной дыры известно как **метрика Керра–Ньюмана.** Когда $a = 0$, метрика Керра становится **метрикой Шварцчайльда.**

Метрика Керра–Ньюмана

Метрика Керра–Ньюмана есть точное, единственное и полное решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) вокруг осесимметричного вращающегося распределения массы в присутствии заряда; данная метрика дает представление вселенной вокруг вращающейся зараженной черной дыры.

Линейный элемент внешней метрики задается как

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a^2)d\phi - adt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$ и $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2$. Здесь m – масса черной дыры, e – ее заряд и a – угловая скорость. Когда $e = 0$, метрика Керра–Ньюмана становится **метрикой Керра.**

Статичная изотропная метрика

Статичная изотропная метрика – наиболее общее решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума); эта метрика дает представление статичного изотропного гравитационного поля. *Линейный элемент* данной метрики задается как

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $B(r)$ и $A(r)$ – произвольные функции.

Метрика Эддингтона–Робертсона

Метрика Эддингтона–Робертсона – обобщение **метрики Шварцчайльда** в предположении, что масса m, *гравитационная постоянная* G и плотность ρ изменяются под воздействием неизвестных безразмерных параметров α, β и γ (которые равны 1 в *уравнении поля Эйнштейна*).

Линейный элемент этой метрики задается как

$$ds^2 = \left(1 - 2\alpha\frac{mG}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma)\left(\frac{mG}{r}\right)^2 + \ldots\right)dt^2 - \left(1 + 2\gamma\frac{mG}{r} + \ldots\right)dr^2 -$$

$$-r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Метрика Джаниса–Ньюмана–Винкура

Метрика Джаниса–Ньюмана–Винкура есть наиболее общее сферически симметричное статичное и асимптотически плоское решение *уравнения поля Эйнштейна*, сопряженное с безмассовым скалярным полем. *Линейный элемент* данной метрики задается как

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{\gamma} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{-\gamma} dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{\gamma r}\right)^{1-\gamma} r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где m и γ – постоянные. Для $\gamma = 1$ получаем **метрику Шварцчайльда.** В этом случае скалярное поле является нулевым.

Метрика Робертсона–Уолкера

Метрика Робертсона–Уолкера (или **метрика Фридмана–Леметра–Робертсона-Уолкера**) есть решение *уравнения поля Эйнштейна* для изотропной и однородной

вселенной с постоянной плотностью и пренебрежимо малым давлением; данная описывает преимущественно материальную вселенную, заполненную пылью без давления. *Линейный элемент* этой метрики обычно записывается в *сферических координатах* (ct, r, θ, ϕ):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right),$$

где $a(t)$ – *коэффициент масштабирования* и k – кривизна пространства-времени.

Для *линейного элемента* существует и другая форма:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \cdot (dr'^2 + \tilde{r}^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)),$$

где r' обозначает **расстояние совместного движения** с позиции наблюдателя и $\tilde{r}$ – **расстояние собственного движения,** т.е. $\tilde{r} = R_C \sinh(r'/R_C)$ или r', или $R_C \sinh(r'/R_C)$ для отрицательной, нулевой или положительной кривизны соответственно, где $R_C = 1/\sqrt{|k|}$ есть абсолютное значение *радиуса кривизны.*

Метрики Бианки

Метрики Бианки – *решения уравнения поля Эйнштейна* для космологических моделей, которые имеют пространственно однородные участки, инвариантные относительно воздействия трехмерных групп Ли, т.е. действительные четырехмерные метрики с трехмерной группой изометрий, транзитивной на 3-поверхностях. Применяя классификацию Бианки трехмерных алгебр Ли над векторными полями Киллинга, мы получаем девять типов метрик Бианки.

Каждая модель Бианки B определяет транзитивную группу G_B на некотором трехмерном односвязном многообразии M; таким образом, пара (где G – максимальная группа, воздействующая на X и содержащая C_B) есть одна из восьми *модельных геометрий* Терстона, если M/G' является компактным для дискретной подгруппы G' группы G. В частности, тип IX Бианки соответствует модельной геометрии S^3.

Метрика Бианки типа I есть решение *уравнения поля Эйнштейна* для анизотропной однородной вселенной, заданное *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dx^2 + b(t)^2 dy^2 + c(t)^2 dz^2,$$

где функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ определены уравнением Эйнштейна.

Эта метрика соответствует плоским пространственным участкам, т.е. является обобщением **метрики Робертсона–Уолкера.**

Метрика Бианки типа IX (или **метрика Миксмастера**) характеризуется сложной динамикой поведения вблизи сингулярностей ее кривизны.

Метрика Каснера

Метрика Каснера – одна из метрик Бианки типа I, которая является вакуумным решением *уравнения поля Эйнштейна* для анизотропной однородной вселенной, определенным *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1} dx^2 + t^{2p_2} dy^2 + t^{2p_3} dz^2,$$

где $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$.

Метрику Каснера можно записать иначе как

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2/3}\left(t^{1/3\cos(\phi+\pi/3)}dx^2 + t^{1/3\cos(\phi-\pi/3)}dy^2 + t^{-1/3\cos\phi}dz^2\right).$$

В этом случае она называется *кругом Каснера.*

Одна из метрик Каснера, часто называемая *каснер-подобной метрикой*, задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2q}(dx^2 + dy^2) + t^{2-4q}dz^2.$$

Асимметричная метрика Каснера задается линейным элементом

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{\sqrt{t}} + \frac{dx^2}{\sqrt{t}} + tdy^2 + tdz^2.$$

Метрика Кантовского–Сахса

Метрика Кантовского–Сахса – одно из решений *уравнения поля Эйнштейна,* задаваемое *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dz^2 + b(t)^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2),$$

где функции $a(t)$ и $b(t)$ определяются уравнением Эйнштейна. Это единственная однородная модель без трехмерной транзитивной подгруппы.

В частности, метрика Кантовского–Сахса с *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\Lambda}}\, dz^2 + \frac{1}{\Lambda}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

описывает вселенную с двумя сферическими измерениями, сохраняющими свои размеры в ходе космической эволюции, и третьим измерением, расширяющимся экспоненциально.

Метрика GCSS

Метрика GCSS (общая цилиндрически симметричная стационарная метрика) – решение *уравнения поля Эйнштейна,* задаваемое *линейным элементом*

$$ds^2 = -fdt^2 + 2kdtd\phi + e^{\mu}(dr^2 + dz^2) + ld\phi^2,$$

где пространство-время разделено на две области: внутреннюю (с $0 \le r \le R$) к цилиндрической поверхности с радиусом R, центрированной вдоль оси z, и внешнюю (с $R \le r < \infty$). Здесь f, k, μ и l являются функциями только от r, $-\infty < t$, $z < \infty$, $0 \le \phi \le 2\pi$, гиперповерхности $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$ отождествлены.

Метрика Льюиса

Метрика Льюиса – стационарная цилиндрически симметричная метрика, которая является решением *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) во внешней области цилиндрической поверхности. *Линейный элемент* данной метрики имеет форму

$$ds^2 = -fdt^2 + 2kdtd\phi - e^{\mu}(dr^2 + dz^2) + ld\phi^2,$$

где $f = ar^{-n+1} - \dfrac{c^2}{n^2 a}r^{n+1}$, $k = -Af$, $l = \dfrac{r^2}{f} - A^2 f$, $e^{\mu} = f^{1/2(n2-1)}$ с $A = \dfrac{cr^{n+1}}{naf} + b.$

Постоянные и с могут быть либо действительными, либо комплексными, и соответствующие решения принадлежат *классу Вейла* или *классу Льюиса*. В последнем случае метрические коэффициенты имеют вид $f = r(a_1^2 - b_1^2)\cos(m\ln r) + 2ra_1b_1\sin(m\ln r)$, $k = -r(a_1a_2 - b_1b_2)\cos(m\ln r) - r(a_1b_2 - a_2b_1)\sin(m\ln r)$, $l = -r(a_2^2 - b_2^2)\cos(m\ln r) - 2ra_2b_2\sin(m\ln r)$, $e^{\mu} = r^{-1/2(m2+1)}$, где m, a_1, a_2, b_1 и b_2 – действительные постоянные с $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$. Такие метрики составляют подкласс класса *Каснера-подобных метрик.*

Метрика Ван Стокума

Метрика Ван Стокума – стационарное цилиндрически симметричное решение *уравнения поля Эйнштейна* для пустого пространства (вакуума) с жестко вращающимся бесконечно длинным пылевым цилиндром. *Линейный элемент* этой метрики для внутренности цилиндра задается (в совместно движущихся, т.е. совместно вращающихся координатах) как

$$ds^2 = -dt^2 + 2ar^2dtd\phi + e^{-a^2r^2}(dr^2 + dz^2) + r^2(1 - a^2r^2)d\phi^2,$$

где $0 \le r \le R$, R – радиус цилиндра и a – угловая скорость частиц пыли. Существует три варианта внешних решений для вакуума (т.е. **метрик Льюиса**), которые находятся в соответствии с внутренними решениями и зависят от массы пыли на единицу длины внутреннего пространства (*случай малой массы, нулевой случай* и *ультрарелятивистский случай*). При некоторых условиях (например, если $ar > 1$) допускается существование замкнутых временноподобных кривых (и, следовательно, путешествия во времени).

Метрика Леви-Чивита

Метрика Леви-Чивита является статичным цилиндрически симметричным решением для вакуума *уравнения поля Эйнштейна с линейным элементом*, заданным (в форме Вейля) как

$$ds^2 = -r^{4\sigma}dt^2 + r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + C^{-2}r^{2-4\sigma}d\phi,$$

где постоянная C относится к дефициту угла, а параметр σ интерпретируется в соответствии с ньютоновской аналогией решения Леви–Чивита: это гравитационное поле бесконечной однородной линейной массы (*бесконечный провод*) с линейной плотностью массы σ. В случае $\sigma = -\frac{1}{2}, C = 1$ данную метрику можно преобразовать либо в *плоскую симметричную метрику Тауба*, либо в *метрику Робинсона-Тротмана.*

Метрика Вейля-Папапетру

Метрикой Вейля-Папапетру называется стационарное осесимметричное решение *уравнения поля Эйнштейна,* выраженное *линейным элементом*

$$ds^2 = Fdt^2 - e^{\mu}(dz^2 + dr^2) - Ld\phi^2 - 2Kd\phi dt,$$

где F, K, L и μ являются функциями только r и z, $LF + K^2 = r^2$, $\infty < t, z < \infty, 0 \le r < \infty$ и $0 \le \phi \le 2\pi$, гиперповерхности $\phi = 0$ и $\phi - 2\pi$ отождествлены.

Пылевая метрика Боннора

Пылевая метрика Боннора является решением *уравнения поля Эйнштейна* и представляет собой осесимметричную метрику, которая описывает облако жестко

вращающихся частиц пыли, движущихся по кольцевым геодезическим вокруг z-оси в гиперплоскостях $z = \text{const}$. *Линейный элемент* этой метрики задается как

$$ds^2 = dt^2 + (r^2 - n^2)d\phi^2 + 2ndtd\phi + e^{\mu}(dr^2 + dz^2),$$

где в совместно движущихся (т.е. совместно вращающихся) координатах Боннора $n = \frac{2hr^2}{R^3}, \mu = \frac{h^2r^2(r^2 - 8z^2)}{2R^8}, R^2 = r^2 + z^2$ и h – параметр вращения. По мере того как $R \to \infty$, метрические коэффициенты стремятся к значениям Минковского.

Метрика Вейля

Метрика Вейля является общим статичным осесимметричным вакуумным решением *уравнения поля Эйнштейна*, выраженным в канонических координатах Вейля *линейным элементом*

$$ds^2 = e^{2\lambda}\, dt^2 - e^{2\lambda}(e^{2\mu}(dr^2 + dz^2) + r^2 d\phi^2),$$

где λ и μ являются функциями только r и z, такими что $\frac{\partial^2\lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial\mu}{\partial r} = r\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial r} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z}\right)$ и $\frac{\partial\mu}{\partial r} = 2r\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{\partial\lambda}{\partial z}$.

Метрика Зипой-Вурхиза

Метрика Зипой-Вурхиза (или **γ-метрика**) – **метрика Вэйля,** полученная для $e^{2\lambda} = \left(\frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m}\right)^{\gamma}$, $e^{2\mu} = \left(\frac{(R_1 + R_2 + 2m)(R_1 + R_2 - 2m)}{4R_1R_2}\right)^{\gamma^2}$, где $R_1^2 = r^2 + (z - m)^2$, $R_2^2 = r^2 + (z + m)^2$. Здесь соответствует ньютонову потенциалу линейного отрезка плотности $\gamma/2$ и длины $2m$, симметрично распределенному вдоль z-оси. Случай $\gamma = 1$ соответствует метрике Шварцчайльда, случаи $\gamma > 1$ ($\gamma < 1$) соответствуют сжатому (растянутому) сфероиду, а для $\gamma = 0$ мы получим плоское пространство-время Минковского.

Метрика прямой вращающейся струны

Метрика прямой вращающейся струны задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -(dt - ad\phi)^2 + dz^2 + dr^2 + k^2r^2d\phi^2,$$

где a и $k > 0$ – постоянные. Она описывает пространство-время вокруг прямой вращающейся вокруг собственной оси струны. Постоянная k связана с массой струны на единицу длины μ как $k = 1 - 4\mu$, и постоянная a является мерой вращения струны вокруг собственной оси. Для $a = 0$ и $k = 1$ мы получаем **метрику Минковского** в цилиндрических координатах.

Метрика Томиматсу-Сато

Метрика Томиматсу-Сато [ToSa73] – одна из метрик бесконечного семейства решений *уравнения поля Эйнштейна* для вращающихся масс, каждая из которых имеет форму $\xi = U/W$, где U и W и являются многочленами. В простейшем решении $U = p^2(x^4 - 1) + q^2(y^4 - 1) - 2ipqxy(x^2 - y^2)$, $W = 2px(x^2 - 1) - 2iqy(1 - y^2)$, где $p^2 +$

$+q^2=1$. *Линейный элемент* для данного решения задается как

$$ds^2=\Sigma^{-1}((\alpha dt+\beta d\phi)^2-r^2(\gamma dt+\delta d\phi)^2)-\frac{\Sigma}{p^4(x^2-y^2)^4}(dz^2+dr^2),$$

где $\alpha=p^2(x^2-1)^2+q^2(1-y^2)^2$, $\beta=-\frac{2q}{p}W(p^2(x^2-1)(x^2-y^2)+2(px+1)W)$, $\gamma=$ $=-2pq(x^2-y^2)$, $\delta=\alpha+4((x^2-1)+(x^2+1)(px+1))$, $\Sigma=\alpha\delta-\beta\gamma=|U+W|^2$.

Метрика Гёделя

Метрика Гёделя – точное решение *уравнения поля Эйнштейна* с космологической постоянной для вращающейся вселенной, выраженное *линейным элементом*

$$ds^2=-(dt^2+C(r)d\phi)^2+D^2(r)d\phi^2+dr^2+dz^2,$$

где (t,r,ϕ,z) – обычные цилиндрические координаты. Вселенная по Гёделю является однородной, если $C(r)=\frac{4\Omega}{m^2}\sinh^2\left(\frac{mr}{2}\right)$, $D(r)=\frac{1}{m}\sinh(mr)$, где m и Ω – постоянные. Вселенная Гёделя предполагает возможность *замкнутых временноподобных кривых* и соответственно путешествий во времени. Необходимым условием отсутствия таких кривых является условие $m^2>4\Omega^2$.

Конформно стационарная метрика

Конформно стационарными метриками называются модели гравитационных полей, которые независимы от времени с точностью до общего конформного множителя. Если выполняются некоторые глобальные условия регулярности, то пространство-время должно быть произведением $\mathbb{R}\times M^3$ с (хаусдорфовым и пара-компактным) трехмерным многообразием M^3, а *линейный элемент* метрики задается как

$$ds^2=\mathrm{e}^{2f(t,x)}(-(dt+\sum_{\mu}\phi_{\mu}(x)dx_{\mu})^2+\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}(x)dx_{\mu}dx_{\nu}),$$

где μ, $\nu=1$, 2, 3. Конформный фактор e^{2f} не воздействует на изотропные геодезические, за исключением их параметризации, т.е. пути лучей света полностью определяются римановой метрикой $g=\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\nu}(x)dx_{\mu}dx_{\nu}$ и 1-формой $\phi=\sum_{\mu}\phi_{\mu}(x)dx_{\mu}$ на M^3.

В этом случае функция f называется *потенциалом красного смещения,* метрика g – **метрикой Ферма** и 1-форма ϕ – 1-*формой Ферма.*

Для статического пространства-времени геодезические метрики Ферма являются проекциями нулевых геодезических пространства-времени.

В частности, **сферически симметричные и статичные метрики,** включая модели не вращающихся звезд и черных дыр, пространственных воронок, монополей однополюсных зон, голых сингулярностей и (бозонных или фермионных) звезд, задаются *линейным элементом*

$$ds^2=\mathrm{e}^{2f(r)}(-dt^2+S(r)^2dr^2+R(r)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)).$$

Здесь 1-форма ϕ обращается в нуль, и метрика Ферма g приобретает особый вид

$$g = S(r)^2 dr^2 + R(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Так, например, конформный фактор $e^{2f(r)}$ метрики Шварцчайльда равен $1 - \frac{2m}{r}$, а соответствующая метрика Ферма приобретает вид

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} r^2 (d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2).$$

Метрика pp-волны

Метрика pp-волны является точным решением *уравнения поля Эйнштейна*, в котором радиация распространяется со скоростью света. *Линейный элемент* этой метрики задается (в координатах Бринкмана) как

$$ds^2 = H(u, x, y)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2,$$

где H – любая гладкая функция.

Наиболее важным классом особо симметричных pp-волн являются **метрики плоских волн,** у которых H квадратично.

Метрика луча Боннора

Метрика луча Боннора является точным решением *уравнения поля Эйнштейна,* моделирующим бесконечно длинный прямой луч света. Это пример **метрики pp-волны.**

Внутренняя часть решения (во внутренней области равномерно плоской волны, имеющей форму твердого цилиндра) определяется *линейным элементом*

$$ds^2 = -8\pi m r^2 du^2 - 2dudv + dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

где $-\infty < u, v < \infty$, $0 < r < r_0$ и $-\pi < \theta < \pi$. Это решение может рассматриваться как некогерентное электромагнитное излучение.

Внешняя часть решения определяется как

$$ds^2 = -8\pi m r_0^2 (1 + 2\log(r / r_0))du^2 - 2dudv + dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

где $-\infty < u, v < \infty$, $r_0 < r < \infty$ и $-\pi < \theta < \pi$.

Луч Боннора можно обобщить, рассматривая несколько параллельных лучей, распространяющихся в одном направлении.

Метрика плоской волны

Метрика плоской волны является решением *уравнения поля Эйнштейна* в вакууме и задается *линейным элементом*

$$ds^2 = 2dwdu + 2f(u)(x^2 + y^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является конформно плоской и описывает в поле чистой радиации. Пространство-время применительно к этой метрике называется *плоской гравитационной волной.* Данная метрика является примером **метрики pp-волны.**

Метрика Вилса

Метрика Вилса – решение *уравнения поля Эйнштейна,* выраженное *линейным элементом*

$$ds^2 = 2xdwdu - 2wdudx + (2f(u)x(x^2 + y^2) - w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является конформно плоской и описывает поле чистой радиации, которое не является *плоской волной.*

Метрика Кутраса-Макинтоша

Метрика Кутраса-Макинтоша является решением *уравнения поля Эйнштейна*, выраженным *линейным элементом*

$$ds^2 = 2(ax + b)dwdu - 2awdudx + (2f(u)(ax + b)(x^2 + y^2) - a^2w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является конформно плоской и описывает поле чистой радиации, которое в общем случае не является *плоской волной.* При $a = 0$ и $b = 0$ получим **метрику плоской волны,** а при $a = 0$ и $b = 0$ – **метрику Вилса.**

Метрика Эдгара-Людвига

Метрика Эдгара-Людвига является решением *уравнения поля Эйнштейна,* выраженным линейным элементом

$$ds^2 = 2(ax + b)dwdu - 2awdudx +$$

$$+ (2f(u)(ax + b)(g(u)y + h(u) + x^2 + y^2) - a^2w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Она является обобщением метрики **Кутраса-Макинтоша.** Это наиболее общая метрика, описывающая конформно плоское поле чистой радиации, которое в общем случае не является *плоской волной.* Если исключить плоские волны, то она будет иметь вид

$$ds^2 = 2xdwduu - 2wdudx + (2f(u)x(g(u)y + h(u) + x^2 + y^2) - w^2)du^2 - dx^2 - dy^2.$$

Метрика излучения Бонди

Метрика излучения Бонди описывает асимптотическую форму радиационного решения *уравнения поля Эйнштейна,* которая задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -\left(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma}\right)du^2 -$$

$$-2e^{2\beta}\,dudr - 2Ur^2e^{2\gamma}\,dud\theta + r^2(e^{2\gamma}\,d\theta^2 + e^{2\gamma}\sin^2\theta d\theta^2),$$

где u – время запаздывания, r – **фотометрическое расстояние,** $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ и U, V, β, γ являются функциями u, r и θ. Эта метрика используется в теории гравитационных волн.

Метрика Тауба–НУТ–де Ситтера

Метрика Тауба–НУТ–деСиттера является положительно определенным (т.е. римановым) решением *уравнения поля Эйнштейна* с космологической постоянной Λ, заданным *линейным элементом*

$$ds^2 = \frac{r^2 - L^2}{4\Delta}dr^2 + \frac{L^2\Delta}{r^2 - L^2}\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)^2 + \frac{r^2 - L^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $\Delta = r^2 2Mr + L^2 + \frac{\Lambda}{4}\left(L^4 + 2L^2 r^2 - \frac{1}{3}r^4\right)$, L и M – параметры, и θ, ϕ, ψ – *углы Эйлера.* Если $\Lambda = 0$, то мы получим метрику **Тауба-НУТ,** используя некоторые условия регулярности.

Метрика Эгучи–Хансона–де Ситтера

Метрика Эгучи–Хансона–де Ситтера является положительно определенным (т.е. римановым) решением *уравнения поля Эйнштейна* с космологической постоянной Λ, заданным *линейным элементом*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a^4}{r^4} - \frac{\Lambda r^2}{6}\right)^{-1} dr^2 + \frac{r^2}{4}\left(1 - \frac{a^4}{r^4} - \frac{\Lambda r^2}{6}\right)\left(d\psi + \cos\theta d\phi\right)^2 +$$

$$+ \frac{r^2}{4}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где a – параметр, а θ, ϕ, ψ – *углы Эйлера.* Если $\Lambda = 0$, то получаем **метрику Эгучи–Хансона.**

Метрика монополей Барриолы–Виленкина

Метрика монополей Барриолы-Виленкина задается *линейным элементом*

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + k^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

с постоянной $k > 1$. При $r = 0$ возникают дефицит телесного угла и сингулярность; плоскость $t = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеет геометрию конуса. Данная метрика является примером конической сингулярности; она может быть использована в качестве модели для *монополей* (однополюсных зон), которые могут существовать во вселенной.

Магнитный монополь есть гипотетический изолированный магнитный полюс "магнит с одним полюсом". Теоретически предполагается, что такое явление может вызываться мельчайшими частицами, подобными электронам или протонам, которые появляются в результате топологических дефектов точно так же, как и космические струны, однако подобных частиц пока в природе не найдено.

Метрика Бертотти–Робинсона

Метрика Бертотти–Робинсона является решением *уравнения поля Эйнштейна* для вселенной с равномерным магнитным полем. *Линейный элемент* этой метрики задается как

$$ds^2 = Q^2(-dt^2 + \sin^2 t dw^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

где Q – постоянная, $t \in [0, \pi]$, $w \in (-\infty, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi]$.

Метрика Морриса–Торна

Метрика Морриса–Торна – решение *уравнения поля Эйнштейна* для *пространственной воронки с линейным элементом*

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\frac{2\Phi(w)}{c^2}} c^2 dt^2 - dw^2 - r(w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

где $w \in (-\infty, +\infty)$, r – функция от w, которая достигает минимального значения большего нуля при некоторой конечной величине w, и $\Phi(w)$ – гравитационный потенциал, обусловленный геометрией пространства-времени.

Пространственная воронка – гипотетическая "труба" в пространстве, соединяющая удаленные друг от друга точки вселенной. Для существования пространственных воронок требуется необычный материал с отрицательной энергетической плотностью, чтобы воронки все время были открыты.

Метрика Миснера

Метрика Миснера – метрика, представляющая две черные дыры. Миснер сформулировал в 1960 г. методику описания метрики, связывающей пару черных дыр в состоянии покоя, жерла которых соединены *пространственной воронкой. Линейный элемент* этой метрики записывается в виде

$$ds^2 = -dt^2 + \psi^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где конформный фактор ψ задается как

$$\psi = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\sin h(\mu_0 n)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \coth(\mu_0 n))^2}}.$$

Параметр μ_0 является мерой отношения массы к расстоянию между жерлами (эквивалентно, мерой расстояния петли на поверхности, проходящей через одно жерло и выходящей из другого). Предел суммирования N стремится к бесконечности.

Топология *пространства-времени Миснера* аналогична паре асимптотически плоских листов, соединенных несколькими мостами Эйнштейна–Роузена. В простейшем случае пространство Миснера можно рассматривать как двумерное пространство с топологией $\mathbb{R} \times S^1$, в котором свет постепенно отклоняется по мере движения во времени и после определенной точки имеет *замкнутые временноподобные кривые.*

Метрика Алкубьерра

Метрика Алкубьерра – решение *уравнения поля Эйнштейна* представляющее *движение по принципу деформации пространства-времени,* допускающее существование *замкнутых временноподобных кривых.* В этом случае нарушается только релятивистский принцип, суть которого состоит в том, что движение в космосе может осуществляться с любой скоростью, сколь угодно близкой, но не равной и не превышающей скорость света. Построение Алкубьерра соответствует варп-движению в том смысле, что перед космическим кораблем происходит свертывание пространства-времени, а за кораблем – расширение, чем космическому кораблю сообщается скорость, которая может значительно превышать скорость света по отношению к удаленным объектам, в то время как на локальном уровне скорость корабля никогда не будет больше скорости света.

Линейный элемент этой метрики имеет вид

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - vf(r)dt)^2 + dy^2 + dz^2,$$

где $v = \dfrac{dx_s(t)}{dt}$ кажущаяся скорость космического корабля с двигателем дефор-

мации пространства, $x_s(t)$ – траектория космического корабля вдоль координаты x (при этом радиальная координата определяется как $r = ((x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$), и $f(r)$ – произвольная функция, подчиненная граничным условиям: $f = 1$ при $r = 0$ (местоположение космического корабля) и $f = 0$ в бесконечности.

Вращающаяся *C*-метрика

Вращающаяся *C*-метрика является решением *уравнений Эйнштейна–Максвелла,* которое описывает две противоположно заряженные черные дыры, разбегающиеся с равномерным ускорением в разные стороны друг от друга. *Линейный элемент* этой метрики имеет вид

$$ds^2 = A^{-2}(x+y)^{-2}\left(\frac{dy^2}{F(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + k^{-2}G(X)d\phi^2 - k^2A^2F(y)dt^2\right),$$

где $F(y) = -1 + y^2 - 2mAy^3 + e^2A^2y^4, G(x) = 1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4$, m, e и A – параметры, связанные с массой, зарядом и ускорением черных дыр, а k – постоянная, определенная условиями регулярности.

Эту метрику не следует путать с ***C*-метрикой** в гл. 11.

Метрика Майерса–Перри

Метрикой Майерса–Перри описывается пятимерная вращающаяся черная дыра. Ее *линейный элемент* задается как

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{2m}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\phi - b\cos^2\theta d\psi)^2 +$$

$$+\frac{\rho^2}{R^2}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2 + (r^2 + b^2)\cos^2\theta d\psi^2,$$

где $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ и $R^2 = \dfrac{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2) - 2mr^2}{r^2}$.

Метрика Калузы–Клейна

Метрика Калузы–Клейна является метрикой в *модели Калузы-Клейна* пятимерного (в общем случае многомерного) пространства-времени, предназначенной объединить классическую гравитацию с электромагнетизмом.

Калуза высказал в 1919 г. идею о том, что если теорию Эйнштейна о чистой гравитации распространить на пятимерное пространство-время, то *уравнения поля Эйнштейна* можно разделить на обычное четырехмерное гравитационное тензорное поле и дополнительное векторное поле, которое эквивалентно уравнению Максвелла для электромагнитного поля плюс дополнительное скалярное поле (известное как "расширение"), эквивалентное безмассовому уравнению Клейна–Гордона.

Клейн предположил в 1926 г., что пятое измерение имеет круговую топологию, такую что пятая координата является периодичной и дополнительное измерение скручено до ненаблюдаемого размера. Альтернативным предположением является то, что дополнительное измерение (дополнительные измерения) является расширенным. Такой подход аналогичен четырехмерной модели – все измерения являются расширенными и первоначально одинаковыми, а сигнатура имеет форму $(p, 1)$.

В модели расширенного дополнительного измерения 5-мерную метрику вселенной можно записать в нормальных гауссовых координатах в виде

$$ds^2 = -(dx_5)^2 + \lambda^2(x_5)\sum_{\alpha,\beta}\eta_{\alpha\beta}dx_\alpha dx_\beta,$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ является четырехмерным **метрическим тензором** и $\eta^2(x_5)$ – произвольная функция пятой координаты.

Метрика Понсе де Леона

Метрика Понсе де Леона – 5-мерная метрика, заданная *линейным элементом*

$$ds^2 = l^2dt^2 - (t/t_0)^2\, pl^{\frac{2p}{p-1}}(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{t^2}{(p-1)^2}dl^2,$$

где l – пятая (пространственноподобная) координата. Эта метрика описывает пятимерный вакуум, но не является плоской.

Часть VII

РАССТОЯНИЯ В РЕАЛЬНОМ МИРЕ

Глава 27

Меры длины и шкалы

В данной главе приводится избранная информация по наиболее важным единицам длины и представлен на языке длин перечень ряда интересных объектов.

27.1. МЕРЫ ДЛИНЫ

Основными системами измерения длины являются: метрическая, "имперская" (английская и американская), японская, тайская, китайская имперская, старорусская, древнеримская, древнегреческая, библейская, астрономическая, морская и полиграфическая.

Существует много других специализированных шкал длины; например, для измерения одежды, размеров обуви, калибров (внутренних диаметров стволов огнестрельного оружия, проводов, ювелирных колец), размеров абразивных кругов, толщины металлических листов и т.п. Многие единицы измерений служат для выражения относительных или обратных расстояний.

Международная метрическая система

Международная метрическая система (или сокращенно система СИ) является современным вариантом метрической системы единиц, установленных международным соглашением (Метрическая конвенция, подписанная 20 мая 1875 г.), которым была определена логическая и взаимосвязанная основа для всех измерений в науке, промышленности и коммерции. В основе системы заложены семь основных единиц, которые считаются взаимозависимыми.

1. Длина: **метр** (м) – равна расстоянию, проходимому светом в вакууме за 1/299792458 долей секунды.
2. Время: *секунда* (с).
3. Масса: *килограмм* (кг).
4. Температура: *Кельвин* (К).
5. Сила тока: *ампер* (А).
6. Сила света: *кандела* (кд).
7. Количество вещества: *моль* (моль).

Первоначально, 26 марта 1791 г., *,metre* метр по-французски был определен как 1/10 000 000 часть расстояния от Северного полюса Земли до экватора по парижскому меридиану. В 1799 г. стандартным *метром* стал платиново-иридиевый стержень метровой длины ("архивный метр"), хранившийся во французском городе Севре (пригород Парижа) и служивший для любого желающего эталоном для сравнения с собственным измерительным инструментом. (Введенная в 1793 г. метрическая система была настолько непопулярна, что Наполеону пришлось отказаться от нее, и Франция вновь вернулась к метру только в 1837 г.). В 1960 г. эталонный метр был официально привязан к длине волны.

Метризация

Метризация – процесс перехода к *Международной метрической системе* (СН). Он еще не завершен (особенно в США и Великобритании). Официально пока еще только США, Либерия и Мьянмар не перешли на систему СИ. Так, например, в США на дорожных знаках для обозначения расстояний используются только мили. Высоты в авиации даются, как правило, в футах; на флоте используются морские мили и узлы. Разрешающая способность устройств вывода данных зачастую указывается в количестве точек на дюйм (*dpi*).

Твердая метрика означает применение метрической системы с самого начала и соответствие, насколько это приемлемо, международным размерам и стандартам.

Мягкая метрика означает умножение на коэффициент преобразования количества дюймов – фунтов и округление результата до приемлемой степени точности; таким образом, при мягкой метризации размеры предметов не изменяются. *Американская метрическая система* предполагает преобразование традиционных единиц в десятичную систему, используемую в метрической системе. Такими гибридными единицами имперской системы и системы СИ, применяемыми в мягкой метризации, являются, например, *килоярд* (914,4 м), *килофут* (304,8 м), миль или *милли дюйм* (24,5 микрон) и *микродюйм* (25,4 нанометров).

Родственные метру термины

В дополнение к системным единицам длины ниже представлено большое семейство нематематических терминов для обозначения длины.

Метр в поэзии (или *каденция*): ритмическая форма, служащая мерой ритмики, лингвистической размеренности звукового образа стихотворения. *Гиперметр* – это часть стиха, содержащая лишний слог.

Метр в музыке (или *ритм*): размеренность ритмического рисунка музыкальной строки, деление композиции на равные по времени части и дальнейшее их разбиение. *Изометрия* – использование *импульсов* (непрерывной последовательности периодических кратковременных воздействий) без какой-либо упорядоченности, а *полиметрия* – использование двух метров одновременно.

Метрометр в медицине – инструмент для измерения размера матки. В наименованиях различных измерительных инструментов в конце слова присутствует термин *метр*.

Метрическая рейка – эмпирическое правило для приближенных подсчетов на основе повседневной практики, например, сторона спичечного коробка равна 5 см, а 1 км – примерно 10 минут ходьбы.

Отмеривание – термин, эквивалентный измерению; *микрометрия* – измерение под микроскопом.

Метрология – научная дисциплина, исследующая понятие измерения.

Метрономия – инструментальное измерение времени.

Метрософия – космология, основанная на строго числовых соответствиях.

Аллометрия – наука об изменении пропорций различных частей организма в процессе роста.

Археометрия – наука о точном датировании археологических находок, относящихся к далекому прошлому и т.п.

Изометропия – одинаковость рефракции в обоих глазах.

Изометрическое упражнение – упражнение с физической нагрузкой на мышцы, когда сила прикладывается к статичному объекту.

Изометрическая частица – вирус, который (в состоянии капсида вириона) обладает икосаэдральной симметрией.

Изометрический процесс – термодинамический процесс при постоянном объеме.

Изометрическая проекция – представление трехмерных объектов в двух измерениях, в котором углы между тремя осями проекции одинаковы или равны $\frac{2\pi}{3}$.

Изометрическая система кристаллов – кубическая кристаллографическая система.

Метрическая асимметрия кристаллической решетки – симметрия без учета расположения атомов в базисной клетке.

Метрические меры длины

Километр (км) = 1000 метров = 10^3 м.
Метр (м) = 10 дециметров = 10^0 м.
Дециметр (дм) = 10 сантиметров = 10^{-1} м.
Сантиметр (см) = 10 миллиметров = 10^{-2} м.
Миллиметр (мм) = 1000 микрометров = 10^{-3} м.
Микрометр (или микрон, μ) = 1000 нанометров = 10^{-6} м.
Нанометр (нм) = 10 Å = 10^{-9} м.
Длины 10^{3t} м, t = –8, –7, ..., –1,1,..., 7, 8 указываются с приставками: йокто, цепто, атто, фемто, пико, нано, микро, милли, кило, мега, гига, тера, пета, экса, цетта, йотта соответственно.

Имперские меры длины

Имперскими мерами длины (слегка упорядоченными международным соглашением от 1 июля 1959 г.) являются следующие:
– *лига* = 3 мили;
– (*американская геодезическая) миля* = 5280 футов ≈ 1609,347 м;
– *международная миля* = 1609,344 м;
– *ярд* = 3 фута = 0,9144 м;
– *фут* = 12 дюймов = 0,3048 м;
– *дюйм* = 2,54 см (для огнестрельного оружия, *калибр*);
– *линия* = 1/12 дюйма;
– *агат* = 1/14 дюйма;
– *мики* = 1/200 дюйма;
– *мил* (британская *тысячная*) =1/1000 дюйма (*мил* является также угловой мерой π/3200 ≈ 0,01 радиана).

Существуют также старинные меры: *ячменное зерно* – 1/3 дюйма; *палец* – 3/4 дюйма; *ладонь* – 3 дюйма; *рука* – 4 дюйма; *шафтмент* – 6 дюймов, *пядь* – 9 дюймов, *локоть* – 18 дюймов.

Дополнительно имеются *меры землемерной цепи*: *фарлонг* = 10 чейнов = 1/8 мили; *чейн* = 100 линков = 66 футов; *шнур* = 20 футов; *род* (или *поль*) = 16,5 футов; *линк* = 7,92 дюймов. Миля, фарлонг и сажень (6 футов) произошли от несколько более коротких греко-римских милей, стадий и оргий, упоминаемых в Новом Завете.

Библейскими мерами аналогичного типа были: *локоть* и его производные единицы, кратные 4, 1/2, 1/6 и 1/24, называемые соответственно *саженью, пядью*, *ладонью* и *пальцем*. При этом базовая длина библейского локтя остается неизвестной; в настоящее время предполагается, что она составляет около 17,6 дюймов для общей (используемой в коммерции) меры локтя и около 20–22 дюймов для

официального использования (применялся в строительстве). *Талмудический локоть* равен 56,02 см, т.е. несколько длиннее 22 дюймов.

Как указано на http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Strange_units_of_measurement, старинная единица длины, называвшаяся *дистанцией* и равная 221763 дюймам (около 5633 м), определялась весьма необычно, как равная 3 мили + 3 фарлонга + + 9 чейнов + 3 рода + 9 футов + 9 шафтментов + 9 рук + 9 ячменных зерен.

Для обозначения размеров материи и одежды используются старые единицы: *рулон* – 40 ярдов; *локоть* – 5/4 ярда; *голд* – 3/2 ярда; *четверть* (или *пядь*) – 1/4 ярда; *палец* – 1/8 ярда; *ноготь* – 1/16 ярда.

Морские единицы длины

Морские единицы длины (применяемые также и в воздушной навигации):
– *морская лига* = 3 морских мили;
– *морская миля* = 1852 м;
– *географическая миля* 1852 м (среднее расстояние на поверхности Земли, представленное одной минутой широты);
– *кабельтов* = 120 саженей = 720 футов = 219,456 м;
– *короткий кабельтов* = 1/10 морской мили 608 футов;
сажень = 6 футов.

Бумажные форматы МОС

В широко используемой системе бумажных форматов МОС отношение высоты листа к его ширине является *отношением Лихтенберга,* т.е. $\sqrt{2}$. Система включает в себя форматы An, Bn и (используемый для конвертов) формат Cn с $0 \le n \le 10$ и шириной листа $2^{-1/4-n/2}$, $2^{-n/2}$ и $2^{-1/8-n/2}$ соответственно. Все размеры указаны в метрах, и соответственно площадь An равна 2^{-n} м^2. Они округляются и обычно выражаются в миллиметрах, например, формат A4 – 210×297, а формат B7 (используемый также для паспортов европейских стран и США) имеет размеры 88×125.

Полиграфические единицы длины

Пункт (*PostScript*) = 1/72 дюйма = 100 гутенбергов = 3,527777778 см.
Пункт (*TeX*) (или *пункт принтера*) = 1/72,27 дюйма = 3,514598035 см.
Пункт (*ATA*) = 3,514598 см.
Ку (*японская*) (или *Q*, *четверть*) = 2,5 см.
Пункт (*Дидо*) = 1/72 французского королевского дюйма = 3,761 см и *цицеро* = = 12 пунктов Дидо.
Пика (*PostScript*, *TeX* или *ATA*) = 12 пунктов в соответствующей системе.
Твип = 1/20 пункта в соответствующей системе.

Очень малые единицы длины

Ангстрем (Å) = 10^{-10} м.
Ангстрем звезда (или *единица Бердена*): Å ≈ 1,0000148 ангстрем (используется с 1965 г. для измерения длин волн рентгеновского и гамма излучения, а также расстояний между атомами в кристаллах).
X единица (или *зигбанова единица*) ≈ $1{,}0021 \times 10^{-13}$ м (ранее использовалась для измерения длин волн рентгеновского и гамма излучения).
Бор (атомная единица длины): α_0, средний радиус ≈ $5{,}291772 \times 10^{-11}$ м орбиты электрона атома водорода (в модели Бора).

Приведенная комптоновская длина волны электрона (т.е. $\frac{\hbar}{mc}$) для массы электрона m_e: $\vec{\lambda}_C = \alpha\alpha_0 \approx 3{,}862 \times 10^{-13}$ м, где $\hbar$ – *приведенная* (т.е. деленная на 2π) *постоянная Планка*, c – скорость света и $\alpha \approx \frac{1}{137}$ – *постоянная тонкой структуры*.

Классический радиус электрона: r_e: $\alpha\vec{\lambda}_C = \alpha^2\alpha_0 \approx 2{,}81794 \times 10^{-15}$ м.

Комптоновская длина волны протона: $\approx 1{,}32141 \times 10^{-15}$ м; большая часть измерений длин в ходе экспериментов, связанных с фундаментальными ядерными силами, является ее кратными.

Длина Планка (наименьшая физическая длина): $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1{,}6162 \times 10^{-35}$ м, где G – универсальная *гравитационная постоянная* Ньютона. Она является также приведенной комптоновской длиной волны и половиной радиуса Шварцчайльда для массы *Планка* $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{c^3}} \approx 2{,}176 \times 10^{-8}$ кг. Время Планка $t_p = \frac{l_P}{c} \approx 5{,}4 \times 10^{-44}$ с.

Именно, $10^{38} l_P \approx 1$ миле США, $10^{43} t_P \approx 54$ с и $10^9 m_P \approx 21{,}76$ кг, т.е. близко к 1 *таланту* (26 кг серебра, мера веса в Древней Греции). Котрелл (http://planck.com/humanscale.htm) предложил "постметрический" вариант адаптированной под человека системы единиц Планка на основе трех вышеуказанных единиц, назвав их (планковскими) *милей*, *минутой* и *талантом*.

Астрономические единицы длины

Расстояние Хаббла (граница космического светового горизонта) равна $D_H = \frac{c}{H_0} \approx 4{,}22$ пк $\approx 13{,}7$ световых гигалет (используется для измерения расстояний $d > \frac{1}{2}$ Мпк в терминах красного смещения z: $d = zD_H$, если $z \le 1$, и $d = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} D_H$, иначе).

Гигапарсек (Гпк) = 10^3 мегапарсеков (Мпк).

Хаббл (или светогигагод, световой гигагод, световой Ga) = 10^9 (млрд) световых лет ≈ 306,595 Мпк.

Мегапарсек = 10^3 килопарсеков ≈ 3,262 *MLY* (млн св. лет).

MLY (*миллион световых лет*) = 10^6 (млн) св. лет.

Килопарсек = 10^3 парсеков.

Парсек $= \frac{648000}{\pi}$ AU (астрономических единиц, а.е.) ≈ 3,261624 св. года ≈ $3{,}08568 \times 10^{16}$ м (расстояние от воображаемой звезды, когда прямые, проведенные от нее до Земли и до Солнца, образуют максимальный угол, т.е. *параллакс*, величиной в секунду).

Световой год ≈ $9{,}46073 \times 10^{15}$ м ≈ $5{,}2595 \times 10^5$ световых минут ≈ $\pi \times 10^7$ (расстояние, которое в вакууме свет проходит за один год; используется для измерения расстояний между звездами).

Спат (устаревшая единица) $\approx 10^{12}$ м $\approx$ 6,6846 AU (астрономических единиц).

Астрономическая единица (AU) = $1{,}49597871 \times 10^{11}$ м $\approx$ 8,32 световых минуты (среднее расстояние между Землей и Солнцем; используется для измерения расстояний в пределах Солнечной системы).

Световая секунда $\approx 2{,}998 \times 10^{8}$ м.

Пикопарсек $\approx$ 30,86 км (см. также другие забавные единицы, как, например, *микростолетие* $\approx$ 52,5 минуты, обычная продолжительность доклада, и *нано-столетие* $\approx \pi$ секунд).

27.2. ШКАЛЫ ФИЗИЧЕСКИХ ДЛИН

В данном разделе рассматривается набор различных порядков величины длин, выраженных в метрах.

$1{,}616 \times 10^{-35}$ – *длина Планка* (наименьшая возможная физическая длина): на этой шкале ожидается наличие "квантумной пены" (мощное искривление и турбуленция *пространства-времени*, нет гладкой пространственной геометрии); доминирующими структурами являются малые (многосвязные) *пространственные воронки* и *пузыри*, возникающие и исчезающие.

10^{-34} – длина предполагаемой *струны*: М-теория предполагает, что все силы и все 25 элементарных частиц объясняются вибрацией таких струн и стремится объединить квантовую механику с общей теорией относительности.

10^{-24} = 1 **йоктометр**.

10^{-21} = 1 **цептометр**.

10^{-18} = 1 **аттометр**: область слабых ядерных сил, размер кварка.

10^{-15} = 1 **фемтометр** (бывшая *ферми*).

$1{,}3 \times 10^{-15}$ – область больших ядерных сил, ядра средних размеров.

10^{-12} = 1 **пикометр** (ранее назывался *бикрон* или *стигма*): расстояние между атомными ядрами в белых карликовых звездах.

10^{-11} – длина волны наиболее жесткого (коротковолнового) рентгеновского излучения и наибольшая длина волны гамма излучения.

5×10^{-11} – диаметр наименьшего атома (водорода H); $1{,}5 \times 10^{-10}$ – диаметр наименьшей молекулы (водород H_2).

10^{-10} = 1 **ангстрем** – диаметр типового атома, предел разрешающей способности электронного микроскопа.

$1{,}54 \times 10^{-10}$ – длина типовой ковалентной связи (C–C).

10^{-9} = 1 **нанометр** – диаметр типовой молекулы.

2×10^{-9} – диаметр спирали ДНК.

10^{-8} – длина волны наиболее мягкого рентгеновского излучения и самого крайнего ультрафиолетового излучения.

$1{,}1 \times 10^{-8}$ – диаметр приона (наименьшей биологической сущности, способной к самовоспроизведению).

$4{,}5 \times 10^{-8}$ – наименьшая деталь компьютерной микросхемы в 2007 г.

9×10^{-8} – вирус иммунодефицита человека (ВИЧ); в общем случае размеры известных вирусов колеблются в пределах от 2×10^{-8} (аденоассоциированные вирусы) до 8×10^{-7} (мимивирус).

10^{-7}: размер хромосомы, максимальный размер частицы, которая может пройти через хирургическую маску.

2×10^{-7}: предел разрешающей способности оптического микроскопа.

$3{,}8–7{,}4 \times 10^{-7}$: длина волны видимого (глазом человека) света, т.е. цветовой спектр от фиолетового до красного.

10^{-6} = 1 **микрометр** (бывший *микрон*).

$10^{-6}–10^{-5}$: диаметр типовой бактерии; в общем случае размеры известных (не находящихся в состоянии покоя) бактерий колеблются в пределах от $1{,}5 \times 10^{-7}$ (микоплазма гениталиум: "минимальная клетка") до 7×10^{-4} ("Серная жемчужина Намибии" – *Thiomargarita of Namibia*).

7×10^{-6}: диаметр ядра типовой эукариотной клетки.

8×10^{-6}: средний диаметр человеческого волоса (колеблется от $1{,}8 \times 10^{-6}$ до 18×10^{-6}).

10^{-5}: типовой размер капли воды (туман, водяная пыль, облако).

10^{-5}, $1{,}5 \times 10^{-5}$ и 2×10^{-5}: диаметры волокон хлопка, шелка и шерсти.

2×10^{-4}: приблизительно нижний предел различения предмета человеческим глазом.

5×10^{-4}: диаметр человеческой яйцеклетки, микропроцессор MEMS (микромашинная технология).

10^{-3} = 1 **миллиметр**: крайняя длина волны инфракрасного диапазона.

5×10^{-3}: длина среднего красного муравья; в общем случае размеры насекомых находятся в пределах от $1{,}7 \times 10^{-4}$ (наездник мегафрагма – *Megaphragma caribea*) до $3{,}6 \times 10^{-1}$ (палочник – *Pharnacia kirbyi*).

$8{,}9 \times 10^{-3}$: радиус Шварцчайльда ($\frac{2Gm}{c^2}$ – наименьший предел, после которого масса m коллапсирует в черную дыру) для Земли.

10^{-2} = 1 **сантиметр**.

10^{-1} = 1 **дециметр**: длины волны самой низкой частоты микроволнового спектра и самой высокой частоты диапазона УВЧ (ультравысоких частот), 3 ГГц.

1 **метр**: длина волны самой низкой частоты УВЧ диапазона и самой высокой частоты диапазона ОВЧ (очень высоких частот), 300 МГц.

1,435: стандартная колея железнодорожного пути.

2,77–3,44: длина волны широковещательного УКВ радиодиапазона с частотной модуляцией сигнала, 108–87 МГц.

5,5 и 30,1: рост самого высокого животного (жирафа) и длина самого длинного животного (голубого кита).

10 = 1 **декаметр**: длина волны самой нижней частоты диапазона высоких радиочастот (ВЧ) и самой высокой частоты коротковолнового (КВ) диапазона, 30 МГц.

26: самая высокая (измеренная) океанская волна. При этом расчетная высота волны мегацунами, вызванного 65 млн лет назад столкновением Земли с астероидом К-Т, в результате которого, вероятно, погибли все динозавры, составила около 1 км.

100 = 1 **гектометр**: длина волны самой низкой частоты КВ диапазона и самая высокая частота средневолнового (СВ) диапазона, 3 МГц.

115,5: высота самого высокого в мире дерева, калифорнийского мамонтового дерева.

137, 300, 508 и 541: высоты Великой пирамиды в Гизе, Эйфелевой башни, небоскреба Тайбэй 101 (самого высокого здания на 2007 г.) и Небоскреба Свободы, который предполагается построить на месте бывшего комплекса Всемирного торгового центра.

187–555: длина волны широковещательного диапазона частот с амплитудной модуляцией, 1600–540 кГц.

340: расстояние, на которое перемещается звук в атмосфере за одну секунду.

10^3 = 1 **километр**.

$2{,}95 \times 10^3$: радиус Шварцчайльда для Солнца.

$3{,}79 \times 10^3$: средняя глубина океанов.

10^4: длина волны самой нижней радиочастоты СВ диапазона, 300 кГц.

$8{,}8 \times 10^3$ и $10{,}9 \times 10^3$: высота самой высокой горы Эверест и глубина Впадины Минданао.

5×10^4 = 50 км: максимальное расстояние, на котором можно увидеть пламя спички (минимум 10 фотонов достигают сетчатки глаза в течение 0,1 с).

$1{,}11 \times 10^5$ = 111 км: один градус широты на Земле.

$1{,}5 \times 10^4$–$1{,}5 \times 10^7$: диапазон частот слышимого человеком звука (20 Гц–208 кГц).

$1{,}69 \times 10^5$: длина гидротехнического туннеля Делавэр (Нью-Йорк), самого длинного в мире.

2×10^5: длина волны (расстояние между подошвами последовательных волн) типового цунами.

$4{,}83 \times 10^5$: диаметр кратера Земли Уилкса (Антарктика), образовавшегося 250 млн лет назад в результате падения небесного тела; самый большой из найденных на Земле (предполагается, что эта катастрофа повлекла за собой массовое уничтожение жизни в пермский период); считается также, что столкновение Земли с гипотетическим планетоидом "Тейя", по размерам сходным с Марсом (теория "Большого Всплеска"), привело 4533 млрд лет назад к образованию Луны.

10^6 = 1 **мегаметр**.

$3{,}48 \times 10^6$: диаметр Луны.

5×10^6: диаметр LHS 4033, наименьшей известной звезды – белого карлика.

$6{,}4 \times 10^6$ и $6{,}65 \times 10^6$: длина Великой Китайской Стены и длина реки Нил.

$1{,}28 \times 10^7$ и $4{,}01 \times 10^7$: диаметр Земли в экваториальной зоне и длина экватора Земли.

$3{,}84 \times 10^8$: орбитальное расстояние Луны от Земли.

10^9 = 1 **гигаметр**.

$1{,}39 \times 10^9$: диаметр Солнца.

$5{,}8 \times 10^{10}$: орбитальное расстояние Меркурия.

$1{,}496 \times 10^{11}$ (1 астрономическая единица, AU): среднее расстояние между Землей и Солнцем (орбитальное расстояние Земли).

$5{,}7 \times 10^{11}$: длина наибольшего наблюдаемого кометного хвоста (кометы Хуакутаке, C/1996 B2).

10^{12} = 1 **терametр** (бывший *спат*).

$2{,}9 \times 10^{12} \approx 7$ AU: диаметр самой большой известной сверхгигантской звезды VY Canis Majoris.

$4{,}5 \times 1012 \approx 30$ AU: орбитальное расстояние Нептуна.

30–50 AU: расстояние от Солнца до астероидного пояса Куипера.

10^{15} = 1 **петаметр**.

50 000–100 000 AU: расстояние от Солнца до облака Оорта (предполагаемое сферическое скопление комет).

$3{,}99 \times 10^{16}$ = 266715 AU = 4,22 св. года = 1,3 пк: расстояние до ближайшей к Солнцу звезды Проксима Центавра.

10^{18} = 1 **эксаметр**.

$1{,}57 \times 10^{18} \approx 50{,}9$ пк: расстояние до сверхновой 1987A.

$9.46 \times 10^{18} \approx 306{,}6$ пк св. лет: диаметр галактического диска нашей галактики Млечный Путь.

$2{,}62 \times 10^{20} \approx 8{,}5$ кпк св. лет): расстояние от Солнца до галактического центра (в созвездии Стрельца A^*).

$3{,}98 \times 10^{20} \approx 12{,}9$ кпк: расстояние до ближайшей карликовой галактики Большого Пса.

10^{21} = 1 **зеттаметр**.

$2{,}23 \times 10^{22}$ – 725 кпк: расстояние до Туманности Андромеды, ближайшей крупной галактики.

5×10^{22} = 1,6 Мпк: диаметр Местной группы галактик.

$5{,}7 \times 10^{23}$ = 60 млн св. лет: расстояние до созвездия Девы, ближайшего крупного скопления (которое является доминирующим в Местном сверхскоплении и в котором были обнаружены первая галактика темной материи и первые внегалактические звезды).

10^{24} = 1 **йоттаметр**.

2×10^{24} = 60 Мпк: диаметр Местного сверхскопления (или Сверхскопления Девы).

$2{,}36 \times 10^{24}$ = 250 млн св. лет: расстояние до Великого аттрактора (гравитационной аномалии в Местном сверхскоплении).

500 млн св. лет: длина Великой Стены галактик и альфа пузырей Лимана, самых больших наблюдаемых суперструктур во вселенной (пространство выглядит тем более равномерным, чем крупнее масштаб).

12 080 млн св. лет = 3704 Мпк: расстояние до наиболее удаленного известного квазара SDSS J1148 + 5251 (красное смещение 6,43, в то время как 6,5 является предположительно "стеной невидимости" для видимого света).

$1{,}3 \times 10^{26}$ = 13,7 св. гигалет = 4,22 Гпк: расстояние (рассчитанное с помощью зонда микроволновой анизотропии Уилкинсона), пройденное фоновым космическим излучением с момента "Большого взрыва" (радиус Хаббла $D_H = \frac{c}{H_0}$, космический световой горизонт, возраст вселенной). С учетом того что это число имеет порядок радиуса Шварцчайльда для массы вселенной, некоторые физики рассматривают всю вселенную как гигантскую вращающуюся черную дыру. Данное число имеет также порядок $\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$ (если *космологическая постоянная* $\Lambda \approx 1{,}36 \times 10^{-56}$ см$^{-2}$), что некоторые ученые считают максимальной длиной подобно минимальной длине Планка.

$7{,}4 \times 10^{26}$: нынешнее расстояние (совместного) движения до края наблюдаемой вселенной (размеры наблюдаемой вселенной превышают длину радиуса Хаббла, поскольку вселенная продолжает расширяться). Согласно теории параллельных вселенных, предполагается, что на удалении порядка $10^{10^{118}}$ м существует другая, идентичная копия нашей вселенной.

Глава 28

НЕМАТЕМАИЧЕСКИЕ И ОБРАЗНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РАССТОЯНИЯ

28.1. РАССТОЯНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОТЧУЖДЕННОСТЬЮ

Приблизительные расстояния по шкале человека

Расстояние руки – расстояние (около 0,7 м, т.е. так называемое **личное расстояние**), которое предупреждает фамильярность или конфликт (аналогами являются итальянское *bracio*, турецкий *pik* и старорусская сажень). **Расстояние досягания** – разница между пределом досягаемости и расстоянием руки.

Расстояние плевка – весьма короткое расстояние.

Расстояние окрика – короткое, легко досягаемое расстояние.

Расстояние удара – расстояние, в пределах которого объект может быть досягаем для нанесения удара.

Расстояние броска камня измеряется расстоянием примерно 25 саженей (46 м).

Расстояние слышимости голоса – дальность, в пределах которой может быть услышан человеческий голос.

Расстояние пешком – расстояние, которое обычно можно (в зависимости от конкретной ситуации) пройти пешком. Так, например, в некоторых школах Великобритании расстояние 2 и 3 мили считается нормативным расстоянием ходьбы пешком для детей в возрасте до и после 11 лет.

Расстояния между людьми

В работе Холла [Hall69] предлагается в сфере межличностных физических отношений между людьми выделить следующие четыре зоны: *интимной близости* – для объятий и разговора шепотом (15–45 см), *расстояние личной близости* – для разговора с хорошими друзьями (45–120 см), *расстояние социального контакта* – для беседы со знакомыми (1,2–3,6 м) и *расстояние общественной дистанции* – для публичных выступлений (более 3,6 м). Какое из этих *проксемических расстояний* будет приемлемым в конкретной социальной ситуации, определяется культурой, полом и личными предпочтениями человека. Например, в исламских странах близкий контакт (нахождение в одном помещении или укромном месте) между мужчиной и женщиной допускается только в присутствии их *махрама* (супруга или какого-нибудь лица того же пола, или несовершеннолетнего лица противоположного пола). Для среднего представителя западной цивилизации его личным пространством считается расстояние спереди 70 см, сзади – 40 см и 60 см с любого бока.

Поведение людей, определяемое расстоянием между ними, можно измерять, например, *расстоянием* торможения (когда объект останавливается, поскольку дальнейшее сближение вызывает у нее/него чувство неловкости) или показателем *приближения*, т.е. процентным отношением шагов, сделанных для сокращения межличностного расстояния, к общему количеству шагов.

Угловые расстояния в осанке людей – измеренная в градусах ориентация в пространстве положения плечей одного человека по отношению к другому; положение верхней части туловища говорящего по отношению к слушателю (например, находиться лицом к нему или обращаться в сторону); положение корпуса говорящего относительно корпуса слушающего, измеренное в вертикальной плоскости, которая разделяет тело на две половины (переднюю и заднюю). Данное расстояние позволяет судить о том, как человек относится к окружающим его людям: верхняя часть туловища непроизвольно разворачивается в сторону от тех, кто не нравится или в случае разногласий.

Эмоциональное расстояние

Эмоциональное расстояние (или *психическое расстояние*) показывает степень эмоциональной отстраненности (по отношению к человеку, группе людей или событиям), отчужденность и равнодушие посредством замкнутости и необщительности.

Шкала социальной дистанции Богардуса в действительности измеряет не социальные, а именно такие расстояния; по данной шкале различаются следующие восемь градаций "чуждости" для респондентов – представителей других этнических групп и готовность к взаимодействию с ними в том или ином качестве: могли бы породниться, могли бы принять гостем в доме, могли бы жить соседями, могли бы жить в ближайшей окрестности, могли бы жить в одном городе, не желали бы жить в одном городе, выслали бы, убили бы. Додд и Нехневасия в 1954 г. поставили в соответствие восьми уровням шкалы Богарда возрастающие расстояния 10^t м, $0 \le t \le 7$.

Эффект соседства – тенденция людей эмоционально сближаться, вступать в дружеские или романтические отношения с теми, кто находится ближе к ним (физически и психологически), т.е. с теми, с кем они часто встречаются. Уолмсли предложил считать, что эмоциональная вовлеченность сокращается как $d^{-1/2}$ по мере увеличения **субъективного расстояния** d.

Социальная дистанция

В социологии **социальной дистанцией** называется степень отстраненности отдельных лиц или групп людей от участия в жизни друг друга; степень понимания и тесная связь, характеризующие личные и социальные отношения в целом. Данное понятие было введено Симмелом в 1903 г.; по его мнению, социальные формы являются стабильными итогами расстояний между субъектом и объектом (который, в свою очередь, является разделением самого себя).

Отсчет по шкале социальных расстояний Богардуса (см. **эмоциональное расстояние**) ведется таким образом, что ответы для каждой этнической/расовой группы усредняются по всем респондентам, что дает нам показатель RDQ (коэффициент расового расстояния) в пределах от 1,00 до 8,00.

Примером соответствующих моделей являются: [Aker97], определяющий *агента* x как пару (x_1, x_2) чисел, где x_1 представляет исходное, т.е. унаследованное, социальное положение, и x_2 – положение, которое предположительно будет занято в будущем. Агент x выбирает значение x_2, с тем чтобы максимизировать

$$f(x_1) + \sum_{y \neq x} \frac{e}{(h + |x_1 - y_1|)(g + |x_2 - y_1|)},$$

где e, h, g – параметры, $f(x_1)$ – собственная стоимость x и $|x_1 - y_1|$ $|x_2 - y_1|$ – унаследованная и приобретенная *социальные дистанции* x до любого агента y (с социальным положением y_1) конкретного общества.

Социо-культурные дистанции Руммеля

По определению Руммеля [Rumm76], основными социально-культурными дистанциями между двумя людьми являются следующие.

1. **Личная дистанция** – такое расстояние, сокращая которое люди начинают вторгаться на территорию личного пространства друг друга.
2. **Психологическая дистанция** – воспринимаемое различие мотиваций, темпераментов, способностей, настроений и состояний (включая отдельной категорией *интеллектуальную дистанцию*).
3. **Дистанция интересов** – воспринимаемое различие в желаниях, средствах и целях (включая **идеологическую дистанцию** по социально-политическим программам).
4. **Аффинная дистанция** – степень симпатии, расположения или привязанности между двумя людьми.
5. **Дистанция социальных атрибутов** – различие в доходах и образовании, расовые и сексуальные различия, различия в профессиональной деятельности и т.п.
6. **Дистанция статуса** – различие в благосостоянии, могуществе и престиже (включая **дистанцию власти**).
7. **Классовая дистанция** – степень общего авторитетного превосходства одного лица над другим, находящимся в его подчинении.
8. **Культурная дистанция** – различия понимания смысла, значений и норм, отображенные в философско-религиозных установках, науке, этических нормах, языке и изобразительном искусстве.

Культурное расстояние

В работе [KoSi88] **культурное расстояние между двумя странами** $x = (x_1, ..., x_5)$ и $y = (y_1, ..., y_5)$ (обычно это США) получается в виде следующего обобщенного индекса:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{(x_i - y_i)^2}{5V_i},$$

где V_i – отклонение индекса i, а сами индексы по методике [Hofs80] обозначают:

1) расстояние власти;

2) предотвращение неуверенности (степень ощущения членами одной культуры угрозы от неопределенных или неизвестных ситуаций);

3) индивидуализм против коллективизма;

4) мужественность против женственности;

5) конфуцианский динамизм (охватывает долгосрочные и краткосрочные установки).

Указанное выше **расстояние власти** измеряет то, насколько облеченные меньшей властью члены учреждений и организаций в стране ожидают и признают неравное распределение власти, т.е. насколько высока культура уважения к власти. Так, например, Латинская Америка и Япония по этим показателям находятся в середине шкалы.

Расстояние эффективной торговли

Расстояние эффективной торговли между странами x и y с населением $x_1,...,x_m$ и $y_1,...,y_n$ основных их городских агломераций определяется в работе [HeMa02] как

$$\left(\sum_{1\le i\le m} \frac{x_i}{\Sigma_{1\le t\le m} x_i} \sum_{1\le j\le n} \frac{y_j}{\Sigma_{1\le i\le m} y_i} d_{ij}^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

где d_{ij} – взаимное расстояние (в километрах) соответствующих агломераций и r – мера чувствительности торговых потоков торговли к d_{ij} .

В качестве **внутреннего расстояния страны**, измеряющего среднее расстояние между производителями и потребителями, предлагается использовать величину $0,67\sqrt{\frac{площадь}{\pi}}$ (см. [HeMa02]).

Технологические расстояния

Технологическим расстоянием между двумя фирмами является расстояние (обычно это χ^2 или **расстояние косинуса**) между их *портфелями патентов*, т.е. векторами количества полученных патентов в технологических (обычно 36) подкатегориях. Другие измерения основаны на количестве ссылок на патенты, соавторские разработки и т.п.

Когнитивное расстояние Гранстрэнда между двумя компаниями – **расстояние Штейнхауса** $\frac{\mu(A\,\Delta\,B)}{\mu(A\cup B)} = 1 - \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A\cup B)}$ между их технологическими профилями (наборами идей) A и B, рассматриваемыми как подмножества *пространства с мерой* (Ω, A, μ).

Экономическая модель Олссона определяет метрическое пространство (I, d) всех идей (подобно человеческому мышлению), где $I \subset \mathbb{R}_+^n$, с некоторым *интеллектуальным расстоянием d*. Замкнутое, ограниченное и связное *множество знаний* $A_t \subset I$ расширяется в течение времени t. Новые элементы обычно являются выпуклыми комбинациями предыдущих: *обновлениями* в процессе постепенного технологического совершенствования. В исключительных случаях происходят открытия (смещения парадигмы Куна). Аналогичное понятие *мысленного пространства* (материализованного ментального пространства идей/знаний и взаимоотношений между ними в процессе мышления) использовали Суми, Хори и Ошуга в 1997 г. для компьютерного моделирования мыслительной работы с текстом; ими была предложена система отображения текстовых объектов в метрических пространствах.

Экономическое расстояние Патела между двумя странами – время (число лет), которое потребуется отстающей стране для выхода на тот же уровень доходов на душу населения, какой имеет в настоящее время развитая страна. **Технологическое расстояние** Фукучи–Сато между странами – время (число лет), необходимое отстающей стране для создания аналогичной технологической структуры, которой обладает в данный момент развитая страна. Основным допущением популярной *гипотезы конвергенции* является то, что технологическое расстояние между двумя странами меньше, чем экономическое.

В экономике производства *технология* моделируется как множество пар (x, y), где $x \in \mathbb{R}_+^m$ является вектором *затрат*, а $y \in \mathbb{R}_+^m$ – вектором *выпуска* и x может

производить y. Такое множество T должно удовлетворять условиям стандартной экономической закономерности. **Функция ориентированного технологического расстояния** затрат/выпуска x, y в (запланированном и расчетном) направлении $(-d_x, d_y) \in \mathbb{R}^m_- \times \mathbb{R}^m_+$ выражена как $\sup\{k \geq 0 : ((x - kd_x), (y + kd_y)) \in T\}$. **Функция расстояния выпуска Шепарда** записывается как $\sup\left\{k \geq 0 : \left(x, \frac{y}{k}\right) \in T\right\}$. *Граница* $f_s(x)$ есть максимальный допустимый выпуск продукции при данных затратах x в условиях конкретной системы или года s. **Расстояние до границы** точки производства $(y = g_s(x), x)$ составляет $\frac{g_s(x)}{f_s(x)}$. *Индекс Малмквиста* для измерения изменения совокупной производительности факторов производства между периодами s и s' (или сравнения с другой единицей в то же время) имеет вид $\frac{g'_s(x)}{f_s(x)}$. Термин *расстояние до границы* используется также для обращения совокупной производительности факторов производства конкретной промышленности (или ВВП на одного работающего в конкретной стране) по отношению к существующему максимуму (в качестве границы обычно берутся США).

Смерть расстояния

Смерть расстояния, так называется авторитетная книга [Cair01], в которой утверждается, что революция в сфере телекоммуникаций (Интернет, мобильная телефония, цифровое телевидение и т.п.) привела к "смерти расстояния" и породила фундаментальные перемены: трехсменную работу, снижение налогов, возвышение английского языка, аутсорсии (привлечение внешних ресурсов для решения внутренних задач), новые возможности контроля за деятельностью правительства, расширение гражданской связи и т.п. В сфере международных отношений заметно возросла доля общения на больших расстояниях. Однако "смерть расстояния" способствовала одновременно и совершенствованию методов управления на расстоянии, и сосредоточению элиты в городах "молочного пояса".

Аналогичным образом [Ferg03] пароходы и телеграф (как железные дороги раньше и автомобили позже) привели вслед за падением стоимости транспортных перевозок к "ликвидации расстояния" в XIX и XX вв. В еще более далеком прошлом, как свидетельствуют археологические данные (около 140 тыс. лет назад), появилась регулярная меновая торговля на больших расстояниях, а изобретение метательного оружия (около 40 тыс. лет назад) позволило человеку убивать крупную дичь (и других людей), находясь на безопасном удалении.

Однако в настоящее время современные технологии затмили расстояние только тем, что значительно сократилось время пути до объекта назначения. В действительности расстояния (культурное, политическое, географическое и экономическое) еще не утратили своей значимости, например, при выработке стратегии компании на развивающихся рынках, в вопросах политической легитимности и т.п.

Моральная дистанция

Моральная дистанция – мера моральной индифферентности или сопереживания по отношению к одному человеку, группе людей или событиям.

Дистанциирование – разделение во времени или пространстве, снижа.ott сопереживание, которое человек мог бы испытывать к страданиям других, т.е. увеличивающее моральную дистанцию. Термин *дистанцирование* используется также (в кни-

гах Кантора) для психологической характеристики замкнутой личности: боязнь близких отношений и обязательств (убежденные холостяки, роковые женщины и т.п.).

Дистанцирование, связанное с технологией

Теория морального дистанцирования утверждает, что технология способствует предрасположенности к неэтическому поведению тем, что формирует **моральную дистанцию** между действием и моральной ответственностью за него.

Печатные технологии разделили людей на отдельные системы связи и дистанцировали их от общения лицом к лицу, живого разговора и прикосновения. Телевидение задействует наши слуховые ощущения и делает расстояние менее довлеющим фактором, однако при этом усилидftn *когнитивное дистанцирование*: сюжет и изображение не стыкуются с пространством/местоположением и временем/памятью. Это дистанцирование не уменьшилось с внедрением компьютерной техники, хотя интерактивность возросла. Говоря словами Хантера, технология лишь по-новому реорганизовала содержание *расстояния коммуникации*, поскольку его также следует рассматривать как пространство между пониманием и непониманием. Ликвидация пространственных барьеров уменьшает только экономические, но никак не социальные и когнитивные расстояния.

С другой стороны, модель *психологического дистанцирования* [Well86] связывает сиюминутность общения с количеством информационных каналов: сенсорные ощущения уменьшаются в прогрессивной пропорции, по мере того как люди переходят от личного общения к общению по телефону, видеофону электронной почте. Общение через Интернет имеет тенденцию к отсеиванию сигналов, в характуризующих социальный смысл или личные отношения. Кроме того, отсутствие немедленной ответной реакции собеседника, обусловленное особенностями электронной почты, ведет к временным несовпадениям и может вызвать чувство изолированности. Например, моральные и познавательные последствия дистанцирования в процессе обучения в режиме онлайн до сих пор остаются неизученными.

Трансакционная дистанция

Трансакционная дистанция – воображаемая степень разделенности в ходе взаимодействия между студентами и преподавателями и внутри каждой группы субъектов. Данная дистанция сокращается при наличии *диалога* (преднамеренного положительного взаимодействия с целью улучшения понимания), а также при предоставлении обучаемому большей свободы действия и менее предопределенной структуры образовательной программы. Данное понятие было введено Муром в 1993 г. в качестве парадигмы *обучения на расстоянии*.

Расстояние дистанция

Расстояние дистанция – расстояние между массивом информации, генерируемым системой активного бизнес-анализа (Business Intelligence), и множеством действий, приемлемых для конкретной деловой ситуации. Расстояние дистанция действия является мерой усилий, необходимых для уяснения информации и воздействия этой информации на последующие действия. Она может выражаться в физическом расстоянии между отображаемой информацией и управляемым действием.

Антиномия расстояния

Антиномия расстояния, как она была введена в [Bull12] для сферы эстетических ощущений зрителей и актера, заключается в том, что они оба должны найти такую

правильную **эмоциональную дистанцию** (не слишком вовлеченную и не слишком бесстрастную), чтобы быть в состоянии творить или оценивать искусство. Эту тонкую линию раздела между объективностью и субъективностью можно легко преступить, и величина самой дистанции может со временем изменяться.

Эстетическая дистанция – степень эмоциональной вовлеченности индивидуума, который, глядя на произведение искусства, оказывается под его впечатлением. В качестве примера такой дистанции можно привести перспективу зрителя в зале по отношению к представлению на сцене, психологическое и эмоциональное расстояние между текстом и читателем, **дистанцию между актером и ролью**, как она трактуется в театральной системе Станиславского.

Варианты антиномии расстояния проявляются в критическом мышлении: существует необходимость установить определенную эмоциональную и интеллектуальную дистанцию между самим собой и идеей, чтобы иметь возможность более точной оценки ее значимости. Другой вариант рассматривается в *парадоксе доминирования: дистанция и связь* (http://www.leatherpage.com/rscurrent.htm/).

Историческая дистанция по терминологии [Tail04] является положением, которое историк занимает по отношению к своим объектам – далекую, близкую или где-нибудь между ними; это – воображение, посредством которого живой ум историка, встречая инертное и невосстановимое, стремится представить материалы реально живыми. Антиномия расстояния здесь вновь проявляется в том, что историки обращаются к прошлому не только интеллектуально, но и переживают моральную и эмоциональную вовлеченность. Формальные свойства исторических писаний зачастую оказываются под влиянием их эмоциональных, идеологических и когнитивных установок.

Смежной проблемой является то, насколько большой должна быть дистанция между людьми и их прошлым, чтобы человек оставался психологически приспособленным к жизни. Фрейд показал, что зачастую между нами и детством такой дистанции не существует.

Неметрическое пространство Кристевой

По мнению Кристевой (1980), основные психоаналитические различия выражаются в терминах пре-эдипова или эдипова аспектов развития личности. Признаки самовлюбленности и зависимости от матери, анархических мотивов поведения, полиморфический эротогеницизм и первичные процессы характерны для пре-эдиповой организации. Соперничество и отождествление с отцом, специфические и мотивации поведения, фаллический эротогеницизм, вторичные процессы более характерны для эдиповой ориентации. Кристева описывает пре-эдипову женскую фазу как обволакивающее аморфное **неметрическое пространство** (*хора* Платона), которое одновременно и кормит, и угрожает; оно также определяет и ограничивает тождественность самому себе. При этом эдипову мужскую фазу она характеризует как метрическое пространство (*топос* Аристотеля); собственная личность и отношение личности к пространству более точно и качественно определены в топосе. Кристева утверждает также, что корни семиотического процесса лежат в женском либидо, пре-эдиповой энергии, которую необходимо направлять в русло социального сплочения.

Делюзе и Гуаттари (1980) разделили свои *мультиплетности* (сети, многообразия, пространства) на *бороздчатые* (метрические, иерархические, центрированные и числовые) и *гладкие* (неметрические, корневые и ацентрированные, которые занимают пространство без какого-либо учета и могут быть исследованы только "ногами").

Эти французские постструктуралисты использовали метафору *неметрический* точно так же, как психоаналитик Лакан систематически пользовался топологической терминологией. В частности, он представлял пространство *J* (от французского *Jouissance*) сексуальных отношений как ограниченное метрическое пространство.

Возвращаясь к математике, **неметрический тензор** – это *ковариантная производная* **метрического тензора**. Она может быть ненулевой для **псевдоримановых метрик** и обращаться в нуль для **римановых метрик**.

Расстояние Симоны Вейль

"**Расстояние**" – это заголовок философско-теологического эссе Симоны Вейль из ее книги "В ожидании Бога" (Нью-Йорк: Путман, 1951). Она связывает любовь Бога с расстоянием; таким образом, его отсутствие может рассматриваться как присутствие: "любое разъединение есть связь" (*метаксю Платона*). Соответственно, утверждает она, распятие Христа (наибольшая любовь/расстояние) было необходимо "для того, чтобы мы смогли осознать расстояние от нас до Бога..., поскольку мы не осознаем расстояние, кроме как по нисходящей линии" (см. понятия Лурианской каббалы *цимцум* ("самосокращение" Бога), "разбиение сосудов" (зло как сила разобщения, которое утратило свою функцию разобщения и превратилось в черепки).

Взять также песню "Издалека", написанную Юлией Голд, в которой поется о Боге, который наблюдает за нами, и о том, как, несмотря на расстояние (физическое и эмоциональное), искажающее восприятие, в нашем мире еще осталь место для мира и любви.

Небесные расстояния Сведенборга

Известный ученый и мечтатель Сведенборг в своем главном труде "*Небеса и Ад*" (Лондон, 1952, первое издание на латинском языке в 1758 г.) утверждает (см. гл. 22 "*Пространство на небесах*", с. 191–199), что "расстояния и таким образом пространство находятся в полной зависимости от внутреннего состояния ангелов". Движение на небесах – лишь изменение этого состояния, когда длина пути измеряется желанием идущего, а сближение отражает схожесть состояний. В духовной сфере и загробной жизни, считает он, "вместо расстояний и пространства существуют только состояния и их изменения".

Расстояние далекого близкого

Расстояние далекого близкого – название программы Дома мировых культур в Берлине, которая представляет панораму современного позиционирования всех художников иранского происхождения. Примерами аналогичного использования термина расстояния в современной поп-культуре являются: "Some Near Distance" (где-то близко) – название художественной выставки Марка Льюиса (Бильбао, 2003), "A Near Distance" (близкое расстояние) – бумажный коллаж Перле Файна (Нью-Йорк, 1961), "Quiet Distance" (тихое расстояние) – художественная репродукция Эдда Мела, "Distance" (расстояние) – японский кинофильм Хироказу Корееды (2001), "The Distance" (это расстояние) – альбом американской рок-группы "Серебряная пуля", "Near Distance" (близкое расстояние) – музыкальная композиция Чен Юи (Нью-Йорк, 1988), "Near Distance" (близкое расстояние) – лирическая песня манчестерского квартета "Пьюрессенсе".

Термины *ближнее расстояние* и *дальнее расстояние* также используются в офтальмологии и для настройки некоторых сенсорных устройств.

Изречения с использованием "ближнего-дальнего" расстояний

"Лучше сосед вблизи, нежели брат вдали" (Библия).

"Люди испытывают сочувствие только когда страдания кажутся им близкими; бедствия, отстоящие от них на десятки тысяч лет в прошлом или в будущем, люди предчувствовать не могут и либо не сострадают, либо во всяком случае не испытывают соизмеримого сочувствия" (Аристотель).

"Путь долга лежит в том, что близко, а человек ищет его в том, что далеко" (Менций).

"Не вглядывайся в близкое, если смотришь вдаль" (Эврипидий).

"Хорошим правительство будет тогда, когда те, кто близко, будут счастливы, а те, кто далеко, заинтересуются" (Конфуций).

"Какая дорога", – спросил я маленького мальчика, сидящего около перекрестка, – "ведет в город?" "Эта", – ответил он, – "она короткая, но длинная, а та – длинная, но короткая". Я пошел по той, что "короткая, но длинная". Когда я подошел к городу, я обнаружил, что он был окружен садами и огородами. Вернувшись к мальчику, я сказал ему: "Сын мой, разве ты не говорил мне, что эта дорога короткая?" И он ответил: "А разве я не сказал тебе также: "но длинная"? Я поцеловал его голову и сказал: "Счастлив ты, о Израиль, все вы мудрые, и молодые, и старые" (Эрубин, Талмуд).

Пророку Мухаммеду приписывают слова: "Наименьшим вознаграждением для людей в раю будет пристанище с 80 000 слуг и 72 женами, над которым возвышается купол, украшенный жемчугом, аквамаринами и рубинами, такой же ширины, как расстояние от Аль-Джабийя (пригород Дамаска) до Саны (Йемен)" (Хадит, Исламская традиция).

"Нет настолько большого предмета, …который на большом расстоянии не казался бы меньше, чем маленький предмет вблизи" (Леонардо да Винчи).

"Ничто не позволяет Земле выглядеть такой просторной, как друзья на расстоянии; именно они составляют широты и долготы" (Генри Дэвид Торо).

Первый закон географии Толбера: все связано между собой, но более близкие предметы более связаны, чем дальние. **Принцип близости** (или *принцип наименьших усилий*): для имеющегося распределения одинаково желанных мест чаще всего выбираться будет самое близкое.

В физике **принцип локальности** Эйнштейна утверждает: удаленные объекты не могут непосредственно влиять друг на друга, объект подвержен прямому влиянию только со стороны объектов в непосредственной близости.

В области программирования **закон Деметры** Холланда содержит установку в отношении стиля программирования "обращаться только к ближайшим друзьям" (объектам, "тесно" связанным с данным объектом) и каждый объект должен иметь ограниченную информацию о других.

28.2. РАССТОЯНИЕ ЗРИТЕЛЬНОГО ВОСПРИЯТИЯ

Расстояния видимости

Расстояние между зрачками (или *межлинзовое расстояние*): в офтальмологии расстояние между центрами зрачков двух глаз при параллельных осях визирования. Обычно 2,5 дюйма (6,35 см).

Острота зрения (ближняя) – способность глаза различать форму предмета и его детали на близком расстоянии порядка 40 см; **острота зрения (дальняя)** – способность глаза делать это на большем расстоянии порядка 6 м.

Оптические приборы для работы с близкими предметами служат для увеличения изображения предмета и печати; **оптические приборы для работы с предметами на расстоянии** служат для приближения удаленных объектов (от трех метров и дальше).

Близкое расстояние: в офтальмологии это расстояние между плоскостью объекта и плоскостью очков.

Расстояние вершины: в офтальмологии расстояние между роговицей и плоскостью очков.

Бесконечное расстояние: в офтальмологии расстояние порядка 20 футов (6,1 м) и более; оно называется так, поскольку попадающие в глаз лучи от объекта, находящегося на этом удалении, практически параллельны, аналогично лучам, приходящим из точки в бесконечности. **Дистанционное зрение** – зрительное восприятие объектов, находящихся на удалении не менее 6 м от наблюдателя.

Угловое расстояние глаза – апертюра угла, образуемого линиями, проведенными от глаза к двум объектам.

Расстояние RPV (или *точки схождения в покое*) – расстояние, при котором глаза начинают *сходиться* (сдвигаться к переносице), когда отсутствует какой-либо близкий объект, вызывающий такое схождение. Оно составляет в среднем 45 дюймов (1,14 м), если смотреть прямо, и уменьшается до 35 дюймов (0,89 м), если смотреть вниз под углом 30°.

С точки зрения эргономики при продолжительной работе с компьютером рекомендуется выдерживать расстояние RPV до экрана, чтобы минимизировать напряжение глаз.

Расстояние свободной аккомодации (или *точка аккомодации в покое, расстояние RPA*) – расстояние до точки, на которую фокусируются глаза, когда нет конкретного предмета наблюдения.

Фокусные расстояния

Рабочее расстояние – расстояние от передней линзы микроскопа до объекта при правильной фокусировке прибора.

Расстояние до объекта – расстояние от объектива камеры до фотографируемого объекта, т.е. объекта, на который наводится фокус.

Расстояние изображения – расстояние от объектива до изображения (картинки на экране); если между объектом и экраном размещается увеличительная линза, то сумма величин, обратных расстоянию до объекта и расстоянию изображения, равно величине, обратной фокусному расстоянию.

Фокусное расстояние (*фокальная длина*): расстояние от оптического центра линзы (или изогнутого зеркала) до точки фокуса (до изображения). Его обратная величина, измеренная в метрах, называется *диоптрией* и используется в качестве единицы измерения (оптической) силы линзы.

Глубина резкости – расстояние перед объектом и позади объекта, находящееся в фокусе, т.е. зона с допустимой нечеткостью изображения.

Гиперфокальное расстояние – расстояние от объектива до ближайшей точки (*гиперфокальной точки*), которая находится в фокусе при наведении на бесконечность; далее этой точки все объекты определены ясно и четко. Это самое близкое расстояние, за пределами которого глубина резкости становится бесконечной (см. **бесконечное расстояние видимости**).

Феномены размера-расстояния

Законом размера-расстояния Эммерта определено, что изображение на сетчатке глаза является пропорциональным по воспринимаемому размеру (кажущейся

высоте) воспринимаемому расстоянию до поверхности, на которую оно проецируется. Этот закон основывается на том факте, что воспринимаемый размер объекта удваивается каждый раз, когда воспринимаемое расстояние от наблюдателя делится пополам и, наоборот. Законом Эммерта объясняется также *постоянство масштабирования*, т.е. того, что размер объекта воспринимается как величина постоянная, несмотря на изменение изображения на сетчатке (по мере удаления объекты, с учетом визуальной перспективы, кажутся все меньше и меньше).

Согласно **гипотезе инвариантности размера-расстояния** соотношение воспринимаемого размера и воспринимаемого расстояния является тангенсом физического визуального угла. В частности, объекты, которые кажутся ближе, должны также и выглядеть меньше. Однако в отношении *лунной иллюзии* мы имеем **парадокс размера-расстояния**. С Луной (точно так же, как и с Солнцем) иллюзия заключается в том, что, несмотря на постоянство ее визуального угла (примерно 0,52°), размеры Луны, находящейся над уровнем горизонта, могут казаться в 2 раза больше, чем размеры Луны, находящейся в зените. Суть этой иллюзии еще не до конца понятна; одна из предполагаемых причин когнитивная: размеры Луны в зените недооцениваются, поскольку она воспринимается как приближающийся объект.

Наиболее общим случаем оптической иллюзии является искажение размеров или длины; например, иллюзии Мюллера–Лейера, Сандера и Понзо.

Эффект символической дистанции

В психологии мозг осуществляет сравнение двух концепций (или объектов) тем точнее и быстрее, чем больше они различаются в соответствующем измерении.

Субъективное расстояние

Субъективное расстояние (или *когнитивное расстояние*) – мысленное представление действительного расстояния, сформированние в зависимости от социального, культурного и общего жизненного опыта индивидуума. Ошибки когнитивного расстояния возникают либо по причине отсутствия кодирования/хранения информации о двух точках в одной и той же ветви памяти, либо из-за ошибки вызова этой информации. Например, длина пути с многочисленными поворотами и ориентирами обычно переоценивается.

Эгоцентрическое расстояние

В психофизиологии **эгоцентрическое расстояние** определяется как воспринимаемое абсолютное расстояние от личности (наблюдателя или слушателя) до объекта или раздражителя (например, источника звука). Как правило, визуальное эгоцентрическое расстояние оценивается короче действительного физического расстояния до удаленных объектов и длиннее до близких. При зрительном восприятии *пространство действия* объекта охватывает 1–30 м; меньшее и большее пространства называются *личным пространством* и *пространством перспективы* соответственно.

Экзоцентрическим расстоянием называется воспринимаемое относительное расстояние между объектами.

Ориентиры для оценки расстояния

Ориентиры для оценки расстояния – ориентиры, используемые для оценки **эгоцентрического расстояния**.

Для слушателя с фиксированным местоположением главными акустическими ориентирами для оценки расстояния являются: *интенсивность* (на открытом воздухе она падает на 5 дБ для каждого удвоения расстояния (см. **Акустические рас-**

стояния, гл. 21)), *соотношение прямой к отраженной энергии* (при наличии звукоотражающих поверхностей), спектральные и *стереофонические различия*.

Для наблюдателя основными визуальными ориентирами для оценки расстояния являются:

– *относительный размер, относительная яркость, свет* и *тень*;

– *высота в поле зрения* (для случаев плоских поверхностей, лежащих ниже уровня глаз, более удаленные объекты кажутся выше);

– *интерпозиция* (когда один объект частично загораживает вид на другой);

– *бинокулярные расхождения, схождение* (в зависимости от угла оптической оси глаз), *аккомодация* (состояние фокусировки глаз);

– *воздушная перспектива* (объекты на расстоянии ставятся более голубыми и бледными), *потускнение от расстояния* (объекты на расстоянии менее контрастны и их очертания более размыты);

– *перспектива движения* (стационарный объект воспринимается движущимся наблюдателем как плавно пролетающий мимо него).

Далее приводятся некоторые технические приемы, использующие указанные выше ориентиры для создания оптических иллюзий для зрителей:

– *туман расстояния*: элемент трехмерной компьютерной графики для создания эффекта размытости (затуманивания) объектов по мере их удаления от камеры;

– *принудительная перспектива*: кинематографический прием, делающий так, чтобы объекты казались более далекими или наоборот в зависимости от их местоположения относительно камеры и друг друга.

Киносъемки, связанные с расстоянием

Киносъемка – это фильмовые материалы, отснятые с момента начала работы камеры (по команде режиссера "мотор") и до момента ее остановки (по команде "снято").

Основными **кадрами, связанными с расстоянием** (настройками камеры), являются:

– *съемка общим планом*: кадры в начале эпизода, с помощью которых устанавливается место действия и/или время суток;

– *съемка дальним планом*: кадры, снятые с расстояния не менее 50 футов (45,72 м) от места действия;

– *средний план*: кадры, снятые с расстояния 5–15 ярдов (4,57–13,75 м), включая целиком небольшую группу, показ группы людей/объектов относительно окрестностей;

– *крупный план*: кадры, показывающие актера с уровня шеи и выше или объект с аналогично близкого расстояния;

– *двойной план*: кадры, снятые с двумя людьми на переднем плане;

– *вставка*: вставленные кадры (обычно крупным планом) для более детального показа объекта.

Расстояния в стереоскопии

Одним из способов получения трехмерного изображения является съемка пары двухмерных изображений с помощью системы спаренных камер.

Расстояние между камерами (или *длина базисной линии, расстояние между окулярами камер*) – расстояние между двумя камерами, делающими снимки в роли левого и правого глаз.

Расстояние схождения – расстояние между центром *базисной линии* камеры до *точки схождения*, где две линзы должны совместиться для получения стерео-

скопического эффекта. Это расстояние должно быть в 15–30 раз больше **расстояния между камерами**.

Расстояние плоскости изображения – расстоянием, на котором объект кажется находящимся на (но не позади или перед) *плоскости изображения* (кажущейся поверхности изображения). *Рамка* – граница кашированияя рамки экрана таким образом, чтобы появляющиеся на нем (не за и не вне его) объекты казались находящимися на том же расстоянии от зрителя, что и сама рамка. Для визуального восприятия человека расстояние плоскости изображения равно примерно 30 расстояниям между камерами.

Расстояния дорожной видимости

Дальность видимости (или *расстояние видимости*) – длина обозреваемого водителем участка шоссе. **Безопасная дальность видимости** определяется как дальность видимости, необходимая водителю для того, чтобы выполнить конкретную задачу; основными безопасными расстояниями, используемыми при проектировании дорог, являются следующие:

– **расстояние тормозного пути** – дальность видимости, обеспечивающая остановку автомобиля перед неожиданно появившимся препятствием;

– *безопасная для маневрирования видимость* – расстояние, обеспечивающее возможность объезда неожиданного небольшого препятствия на дороге;

– *безопасная для обгона видимость* – расстояние, необходимое для выполнения безопасного обгона;

– *видимость обзора дороги* – расстояние, позволяющее предвидеть изменение осевого направления (как повороты, так и подъемы и спуски) полотна дороги (например, для выбора скоростного режима движения).

Кроме того, соответствующая дальность видимости необходима и в локальном масштабе: для оценки ситуации на перекрестках и реагирования на сигналы светофоров.

28.3. РАССТОЯНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ

Расстояния, связанные с транспортными средствами

Тормозной путь – расстояние, которое проходит автомобиль с момента нажатия тормозов до полной остановки.

Расстояние реагирования – расстояние, которое автомобиль проходит с момента, когда водитель увидит опасность на дороге, до момента начала торможения (складывается из времени восприятия и скорости реакции человека) (не путать с **дистанцией реакции животного**).

Расстояние торможения – расстояние, которое проходит автомобиль с того момента, когда водитель решает затормозить, до момента полной остановки транспортного средства (определяется скоростью реакции системы торможения и эффективностью тормозных устройств).

Обозначаемый по расстоянию номер развязки дорог – номер, присваиваемый перекрестку (обычно это развязка на автостраде), который отображает в милях (или километрах) расстояние от начала автострады до развязки. *Мильный камень* (или *километровый столб*) является элементом последовательности нумерованных указателей, установленных с равными интервалами вдоль дороги. Нулевой столб в столичном Вашингтоне считается началом отсчета для всех дорожных расстояний в США.

Расстояние прерванного взлета – длина взлетно-посадочной полосы плюс длина концевой полосы безопасности, которая пригодна и которую разрешено исполь-

зовать для разгона при взлете и торможения самолета в случае прерывания взлета.

Расстояние срока действия – общее расстояние, которое проходит самодвижущийся наземный или морской транспорт с заданной экономичной скоростью движения.

Фактически пройденное расстояние (морской термин) – расстояние, пройденное после корректировки текущих отклонений от курса, бокового сноса (дрейфа корабля в подветренную сторону) и прочих ошибок, которые могли быть не учтены при начальном измерении расстояния. *Лаг* – прибор для отсчета пройденного на воде расстояния, показания которого затем корректируются для выведени я фактически пройденного расстояния.

***GM*-расстояние** (или *метациклическая высота*) **судна** – расстояние между центром его тяжести *G* и *метацентром*, т.е. проекцией *центра водоизмещения* (гравитационного центра выталкиваемого корпусом судна объема воды) на диаметральную линию судна в момент крена. Это расстояние (обычно 1–2 м) характеризует остойчивость судна на воде.

Оттяжка – при погружениях под воду является временным маркером (обычно это 50-метроввый тонкий полипропиленовый трос), обозначающим кратчайший путь между двумя точками. Она предназначена для ориентирования в условиях плохой видимости при возвращении водолаза к отправной точке.

Расстояния в системах обнаружения

Расстояние невидимости (или **расстояние первой засечки**) – расстояние, пройденное движущимся объектом (нарушителем) до момента фиксации его активными средствами системы обнаружения (см. **Квазирасстояния контакта**, гл. 19); *время невидимости* характеризует соответствующие временные параметры.

Расстояние задержки данных обнаружения – расстояние, пройденное движущимся объектом (нарушителем) до момента получения контрольным органом данных от системы обнаружения.

Ошибка по дальности – расстояние между двумя линиями места цели, полученными от двух различных станций обнаружения (см. **Расстояние между прямыми**, гл. 4).

Предельная дальность обнаружения – расстояние, в пределах которого ошибки местоопределения считаются допустимыми для практического использования данных (см. **Предельная дальность**, гл. 25).

Дистанция выноса

В войне с применением ядерного оружия **дистанцией выноса** называется величина, на которую расчетный (или реальный) эпицентр взрыва отклонился от центра района (или точки) цели.

В вычислительных операциях **выносом** называется расстояние от начала строкы до конца участка строки. Для автомобиля **выносом** колеса называется расстояние от поверхности ступицы до осевой линии колеса.

Расстояние удаленности

Расстояние удаленности – расстояние объекта от источника взрыва (в боевых действиях) или от точки наведения лазерного луча (в производстве лазерных материалов). В механике и электронике оно является расстоянием, отделяющим одну часть от другой; например, изолирующим расстоянием (см. **безопасное расстояние**) или расстоянием от неконтактного датчика длины до измеряемой материальной поверхности.

Расстояние окаймления

Обычно **расстоянием окаймления** называется длина интервала между *окаймлениями* (например, темные и светлые области на интерференционном узоре световых лучей; компоненты, на которые распадается спектральная линия под воздействием электрического или магнитного поля – *эффекты Старка и Зимана* в физике).

При этом, скажем, для неконтактного измерителя длины расстоянием окаймления является величина $\frac{\lambda}{2\sin\alpha}$, где λ – длина волны лазера и α – угол луча.

В области анализа изображений существует также броуновское **расстояние окаймления** между бинарными изображениями (см. **Расстояние пикселя**, гл. 21).

Дистанционный взрыватель

Дистанционный взрыватель осуществляет подрыв взрывчатого вещества автоматически при достаточном сближении с целью.

Датчики ближней локации

Датчики ближней локации представляют собой разнообразные ультразвуковые, лазерные, фотоэлектрические и оптоволоконные датчики, предназначенные для измерения расстояния от самого датчика до объекта (цели).

Сравните со следующим простым способом оценки расстояния (для распознавания добычи), используемым некоторыми насекомыми: скорость движений головы богомола в момент всматривания остается постоянной и, следовательно, расстояние до цели будет обратно пропорционально скорости изображения на сетчатке.

Точное измерение расстояния

Разрешение ТЭМ (просвечивающего электронного микроскопа) составляет около 0,2 нм (2×10^{-10} м), т.е. типовое расстояние между двумя атомами в твердом теле. Такое разрешение в 1000 раз больше, чем у оптического микроскопа, и почти в 500 тыс. раз больше, чем у человеческого глаза. Однако в поле зрения электронного микроскопа могут попасть только наночастицы.

Методы, основанные на измерении длины волны лазерного излучения, применяются для определения макроскопических расстояний, которые нельзя измерить с помощью электронного микроскопа. Неточность измерений такими способами равна минимум длине волны света, т.е. порядка 633 нм.

Современная адаптация *интерферометра Фабри–Перо* (для измерения частоты света, заключенного между двумя зеркалами с высокой отражательной способностью) в виде лазерного устройства позволяет измерять относительно большие расстояния (до 5 см) с погрешностью всего 0,01 нм.

Радиоизмерение расстояния

Оборудование для измерения расстояний (DME) – аэронавигационная аппаратура для измерения расстояний как времени прохождения УКВ сигналов до *ответчика* (радиолокационного приемоответчика, генерирующего ответный сигнал на правильный запрос) и обратно. Аппаратура DME скорее всего будет вытеснена глобальными спутниковыми навигационными системами: системой GPS и планируемым вводом в строй в 2009 г. систем Галилео (стран Европейского Союза) и ГЛОСНАСС (Россия/Индия).

Система GPS (глобальная система навигации и определения местоположения) является радионавигационной системой, позволяющей каждому определять его местоположение на земном шаре (в любое время и в любом месте). В состав системы входят 24 спутника и наземные средства управления, находящиеся в ведении

министерства обороны США. Гражданские пользователи получают доступ к системе, покупая специализированный приемник сигналов GPS, который обеспечивает определение местоположения с точностью до 10 м.

Псевдорасстояние GPS от приемника до спутника – это время прохождения радиосигнала меток времени от спутника до приемника, умноженное на скорость распространения радиоволн (около скорости света). Оно называется *псевдорасстоянием*, с учетом неизбежной погрешности в расчетах: часы приемника далеко не так точны, как сверхточные часы на спутнике. Приемник GPS рассчитывает свое местоположение (по широте, долготе, высоте и т.д.) посредством решения системы уравнений с использованием псевдорасстояний, получаемых минимум от четырех спутников, местоположение которых заранее известно (см. **Расстояния радиосвязи**, гл. 25).

Дальность передачи

Дальность передачи – определенное для конкретной (волоконно-оптической, проводной, беспроводной и т.п.) системы передачи расстояние, которое является максимальным в смысле допустимости уровня потерь в полосе пропускания.

Для конкретной сети контактов, которая может передавать инфекцию (или, скажем, идею в системе убеждений, рассматриваемой как иммунная система), **дальностью передачи** является **метрика пути** графа ребра которого соответствуют событиям инфицирования через наиболее близкого общего предка и между зараженными индивидуумами.

Инструментальные расстояния

Расстояние груза – расстояние (на рычаге) от центра вращения до груза. **Расстояние приложенной силы** (или *расстояние сопротивления*): расстояние (на рычаге) от центра вращения до точки приложения силы.

K-расстояние – расстояние от внешней нитки прокатного стального прута до шейки галтели прокатного профиля.

Расстояние до обрезной кромки – расстояние от болта, винта или гвоздя до конца (доски) элемента конструкции. **Расстояние до края** – расстояние от болта, винта или гвоздя до края (доски) элемента конструкции.

Расстояния зубчатых передач

Для двух шестерней в зацеплении, расстояние между их центрами называется **межосевым расстоянием**. Ниже приводятся другие расстояния, используемые в основных формулах зубчатых передач (таких как $b = a + c$).

Высота головки зуба шестерни (a) – радиальное расстояние между окружностью центров шарниров (окружностью, радиус которой равен расстоянию от оси шестерни до полюса зацепления) и вершиной зуба.

Высота ножки зуба зубчатого колеса (b) – радиальное расстояние между дном впадины между зубьями шестерни и вершиной зуба.

Зазор (c) – расстояние между вершиной зуба и дном впадины другой шестерни в зацеплении.

Полная высота – расстояние между вершиной зуба и дном впадины между зубьями.

Люфт – свободный ход (шатание) между сопряженными зубьями шестерен.

Расстояние утечки

Расстояние утечки – кратчайший путь по поверхности изоляционного материала между двумя токопроводящими элементами.

Безопасное расстояние – кратчайшее (по прямой линии) расстояние между двумя токопроводящими элементами.

Расстояние переноса растворителя

В хроматографии **расстоянием переноса растворителя** называется расстояние, проходимое фронтом жидкости или газа, подающегося в хроматографическую установку для элюирования (процесса, использующего растворяющие вещества для извлечения адсорбированного элемента из твердой среды).

Дистанция распыления

Дистанцией распыления называется установленное технологическое расстояние между оконечностью сопла металлизационного аппарата и напыляемой поверхностью.

Вертикальное эшелонирование

Вертикальным эшелонированием называется расстояние между дном поля фильтрации канализационной очистной системы и лежащим ниже горизонтом грунтовых вод. Это эшелонирование позволяет удалять патогенные микроорганизмы (вирусы, болезнетворные бактерии и т.п.) посредством фильтрации сточных вод через почву, прежде чем они достигнут грунтовых вод.

Расстояние защитных мероприятий

Расстояние защитных мероприятий – расстояние в направлении ветра от места происшествия (излив на поверхность опасных продуктов, вызывающих отравление при вдыхании), в пределах которого люди могут получить поражение.

28.4. ПРОЧИЕ РАССТОЯНИЯ

Расстояния дальности

Расстояниями дальности называются практические расстояния, указывающие максимальное расстояние эффективного действия, например, пробег автомобиля без дозаправки топливом, дальность полета пули, видимости, пределов движения, участка обитания животного и т.п.

В частности, **расстояние распространия** в биологии может относиться к разбрасыванию семян посредством опыления, натальному расселению, племенному разведению, миграционному распространению и т.п.

Дальность воздействия факторов риска (токсических веществ, взрывов и т.п.) указывает минимальное **безопасное дистанцирование**. Дальность действия какого-либо устройства (например, пульта дистанционного управления), указанная в спецификации производителя в качестве ориентировки для потребителя, называется **рабочим расстоянием** (*номинальной дальностью измерения датчика*). Максимальное расстояние активации сенсорного включателя называется **дальностью включения**. Для того чтобы подчеркнуть большую дальность действия, некоторые производители выносят эту характеристику в название продукта: например, *мячики предельной дальности для гольфа* (бита для софтбола, спиннинги и т.п.).

Расстояние зазора

Следующие примеры иллюстрируют обширный класс используемых на практике расстояний, указывающих на минимальное рассеяние (см. **Минимальное расстояние** в кодировании. **Расстояние первого соседа** для атомов в твердых телах и т.п.).

Расстояние по фронту – установленное минимальное расстояние в морских милях между самолетами в воздухе.

Расстояние изоляции –установленное минимальное расстояние, которое (с учетом возможности опыления) должно быть между посевами разновидностей одного и того же вида культур, с тем чтобы сохранить (генетическую) чистоту семян (например, для риса оно составляет около 3 м).

Расстояние между остановками – интервалы между остановками автобуса; среднее расстояние между остановками в США (для легкого рельсового транспорта) колеблется от 500 м (в Филадельфии) до 1742 м (в Лос-Анджелесе).

Интервал между знаками – расстояние между знаками конкретного компьютерного шрифта.

Порог различимости (JND) – мельчайшее изменение меры (расстояния, положения и т.п.), котороее может быть достоверно воспринято (см. **Допускаемое расстояние**, гл. 25).

Метрики качества

Это обширное семейство мер (или стандартов измерений) характеризует различные свойства объектов (обычно оборудования). По этой терминологии наши расстояния и подобности являются "метриками подобности", т.е. метриками (мерами), характеризующими степень связанности между двумя объектами. Ниже приведены примеры таких метрик, которые не связаны с оборудованием и более абстрактны в смысле качественных оценок.

Метрика симметрии (Бханджи и др., 1995) служит для измерения эстетики графических представлений как $\frac{\sum_{i=1}^{m}(a_{1i}+a_{2i}+a_{3i})}{a}\times\sum_{i=1}^{m}\left(a_{1i}+\frac{a_{2i}+n_i}{2}\right)$, где a – число всех дуг, m – число *осей симметрии* и n для заданной *оси* i – число вершин, которые зеркально отображаются от других вершин относительно i, тогда как a_{1i}, a_{2i} и a_{3i} являются числом дуг, которые, соответственно делятся пополам под прямыми углами осью i, зеркально отображаются от другой дуги относительно i и проходят вдоль i. В качестве *осей симметрии* берутся все прямые i с n_i, a_{1i}, $a_{2i} \geq 1$.

Ландшафтные метрики используются, например, для оценки участков озеленения конкретного ландшафта как *плотности участков* (количества таких участков на квадратный километр), *плотности краев* (общей длины границ участков на гектар), *индекса формы* $\frac{E}{4\sqrt{A}}$ (где A – общая площадь и E – общая длина краев), связности, разнообразия и т.п.

Управленческие метрики включают в себя обзоры (скажем, доли на рынке, увеличения сбыта, удовлетворения запросов потребителей), прогнозы (например, доходов, непредвиденных продаж, инвестиций), эффективности НИОКР, соблюдения рабочей дисциплины и т.п.

Метрики риска применяются в сфере страхования и в финансовой сфере для анализа портфеля (например, заказов или ценных бумаг).

Коэффициент воздействия является метрикой качества, которая ранжирует относительное влияние, например, в следующем порядке:

– *ранг страницы (PageRank)* в порядке ранжирования Web страниц в системе Google;

– *коэффициент воздействия* по методике ISI (институт ISI переименован в Thomson Scientific) используется для оценки популярности журнала за двухлетний

период, сколько раз обычная статья данного журнала упоминалась в какой-нибудь другой статье, публиковавшейся в следующем году;

– *h-индекс* Гирша для ученого, соответствующий максимальному числу публикаций его авторских статей, каждая из которых была столько же раз процитирована другими авторами.

Убывание расстояния

Убывание расстояния (или *вертикальный градиент расстояния*) – ослабление характеристики или процесса в зависимости от расстояния. В пространственном взаимодействии оно является математическим представлением обратного отношения между количеством полученного вещества и удалением от его источника. Такое убывание измеряет влияние расстояния на доступность: оно может свидетельствовать о сокращении потребности из-за увеличения стоимости проезда. Примерами кривых убывания расстояния являются: модель Парето $\ln I_{ij} = a - b \ln d_{ij}$ и модель $\ln I_{ij} = a - b d_{ij}^{p}$ с $p = \frac{1}{2}$, 1 или 2 (здесь I_{ij} и d_{ij} являются взаимодействием и расстоянием между точками i и j, тогда как a и b – параметры).

Кривая расстояния

Кривая расстояния – график данного параметра по отношению к расстоянию. Примерами кривых расстояния, в терминах рассматриваемого процесса, являются: **кривая время-расстояние** (для времени распространения серии волн, сейсмических сигналов и т.п.), *кривая высота-путь* (для высоты волны цунами по отношению к расстоянию распространения волны от точки удара), *кривая расстояние-депрессия*, *кривая расстояние-таяние* и *кривая расстояние-объем износа*.

Кривая расстояние-сила является в микроскопии зондового сканирования графиком вертикальной силы, приложенной иглой измерительной головки к поверхности образца в момент, когда производится контактная съемка изображения атомно-силовым микроскопом (АСМ). Кроме того, в микроскопии зондового сканирования используются кривые *частота-расстояние* и *амплитуда-расстояние*.

Термин *кривая расстояния* применяется для составления диаграмм роста, например, регистрации детского роста или веса в каждый день рождения. График скорости роста по отношению к возрасту называется кривой **скорость-расстояние**. Последний термин используется и как определение скорости самолетов.

Функция масса-расстояние

Функцией масса-расстояние называется функция, пропорциональная $\frac{xy}{d(x,y)}$. Ее называют также *функцией гравитации*, поскольку она выражает гравитационное притяжение между массами x и y на (евклидовом) расстоянии $d(x, y)$ (см. **Закон обратных квадратов**, гл. 24). Подобные функции чаще всего применяются в социальных науках, например, они могут выражать связь между x и y, которые могут рассматриваться как население отправляющей и принимающей сторон, где $d(x, y)$ выступает как физическое расстояние между ними.

Убывающая кривая масса-расстояние – график убывания "массы" при увеличении расстояния до центра "гравитации". Подобные кривые используются для нахождения *места укрытия преступника* (исходной точки; см. **Расстояния в криминологии**), массы галактики в пределах заданного радиуса от ее центра (с использованием *кривых вращения-расстояния*) и т.п.

Зависимость большой дальности

Стохастический (стационарный второго порядка) процесс X_k, $k \in \mathbb{Z}$, называется **зависимым большой дальности** (или *долгой памяти*), если существуют такие числа α, $0 < \alpha < 1$ и $c_\rho > 0$, что $\lim_{k\to\infty} c_\rho k^\alpha \rho_k = 1$, где $\rho(k)$ – автокорреляционная функция. Следовательно, корреляции убывают очень медленно (по асимптотически гиперболическому типу) до нуля, что влечет за собой $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\rho_k| = \infty$ и корреляцию далеко отстоящих друг от друга событий (долгая память). Если вышеприведенная сумма конечна и убывание идет экспоненциально, то процесс называется процессом *малой дальности.* Примерами таких процессов являются экспоненциальный, нормальный и пуассоновский процессы, которые не имеют памяти и, говоря физическим языком, являются системами в термодинамическом равновесии. Указанное выше убывание степенной зависимости для корреляций как функции времени преобразуется в убывание степенной зависимости спектра Фурье как функция частоты f и называется $\frac{1}{f}$ *шумом*.

Процесс обладает *экспонентой самоподобия* (или *параметром Хаста*) H, если X_k и $t^{-H}X_{tk}$ имеют одинаковые конечномерные распределения для любого положительного t. Случаи $H = \frac{1}{2}$ и $H = 1$ относятся соответственно к чисто случайному процессу и точному самоподобию одинаковое поведение на всех шкалах (см. **Фрактал**, гл. 1 и **Сети, независимые от шкал**, гл. 22). Процессы с $\frac{1}{2} < H < 1$ являются зависимыми большой дальности с $\alpha = 2(1 - H)$.

Зависимость большой дальности соответствует распределениям с *тяжелым "хвостом"* (или со *степенным законом*). *Функция распределения* и "*хвост*" неотрицательной случайной переменной X равны $F(x) = P(X \le x)$ и $\overline{F(x)} = P(X > x)$. Распределение $F(X)$ имеет *тяжелый "хвост"*, если существует такое число α, $0 < \alpha < 1$, что $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \overline{F(x)} = 1$. Многие такие распределения имеют место в реальной действительности (например, в физике, экономике, в Интернете), а также в пространстве (расстояния) и во времени (продолжительности). Типовым примером является распределение Парето $\overline{F(x)} = x^{-\alpha}$, $x \ge 1$, где $\alpha > 0$ – параметр (см. **Убывание расстояния**).

Расстояния в медицине

Расстояние внутреннего прикуса: в стоматологии межокклюзионная щель между поверхностями верхнечелюстных и нижнечелюстных зубов в момент нахождения челюсти в состоянии покоя.

Межокклюзионная высота: в стоматологии расстояние по вертикали между верхнечелюстной и нижнечелюстной дугами. **Расстояние между альвеолярными отростками** – расстояние по вертикали между верхнечелюстным и нижнечелюстным альвеолярными отростками.

Межзубной промежуток – **расстояние зазора** между соседними зубами; *пассивное смещение* – медленное движение зубов к передней части рта по мере сокращения межзубного промежутка с возрастом.

Расстояние между стебельками – расстояние между вертебральными стебельками, измеренное по рентгеновскому снимку.

Расстояние источник-кожа – расстояние от фокусного пятна на объекте рентгеновской трубки до кожи пациента, измеренное по центральному лучу.

Междуушное расстояние – расстояние между ушами. **Межокулярное расстояние** – расстояние между глазами.

Аногенитальное расстояние – длина *промежности*, т.е. анатомической области между анусом и областью половых органов (передним основанием мужского пениса). У мужчин это расстояние обычно в два раза больше, чем у женщин; таким образом, это расстояние является мерой физического маскулинизма. Другими подобными расстояниями являются отношение второго к четвертому (указательного к безымянному) пальцу, которое меньше у мужчин одной и той же популяции, и пространственное мышление, которое выше у мужчин.

Расстояние оседания (или РОЭ, *реакция оседания эритроцитов*) – расстояние, которое проходят красные кровяные тельца за один час при осаждении на дно пробирки с взятой на анализ кровью. РОЭ указывает на воспалительные процессы и в случае заболевания повышается.

Основными расстояниями, применяемыми в ультразвуковой биомикроскопии (особенно при лечении глаукомы) являются **расстояние раскрытия угла** (от роговичного эндотелия до предстоящей радужной оболочки глаза) и **расстояние трабекулярного и цилиарного процессов** (от конкретной точки на *трабекулярной сети* до *цилиарного процесса*).

Примерами расстояний, рассматриваемых при снятии изображений мозга по методике МРТ (магнитно-резонансной томографии) и получении кортикальных карт (т.е. визуализированных областей внешней корки полушарий головного мозга, отображающих входные сигналы от датчика или моторные отклики) являются: **карта расстояний** МРТ от границы раздела серого/белого вещества, **кортикальное расстояние** (скажем, между участками активации пространственно смежных стимулов), *кортикальная толщина* и *метрики латерализации*.

Дистальность

Прилагательное **дистальный** (или *периферийный*) используется как анатомический термин местоположения (на теле и отдельных его частях).

Как противоположность **проксимальному** (или *центральному*) оно означает расположение далеко от, на удалении от точки ориентирования (начала, центра, точки прикрепления, торса). Как противоположность *срединному* оно означает расположение или направление от средней линии или медиальной плоскости тела.

Иногда термин *дистальный* используется в более абстрактном смысле. Так, например, проект Т-Вижн (визуальное отображение Земли) предполагает формирование восприятия Земли как отдаленного объекта, что ранее было понятно только космонавтам.

Расстояния измерения тела

В соответствии с Европейским единым стандартом размеров одежды EN 13402 в разделе EN 13402-1 определен перечень 13 элементов измерений и методика этих измерений на человеке. В перечень включены: масса тела, рост, длина ноги, длина руки, длина ноги с внутренней стороны, объем головы, шеи, груди, бюста, объем под грудью, обхват талии, бедер, кисти руки. Ниже следуют примеры этих определений.

Длина стопы – горизонтальное расстояние между перпендикулярами, касающимися конца самого длинного пальца ноги и наиболее выступающей части пятки.

Длина руки – расстояние измеренное мерной лентой от плечевого сустава (акромиона) по локтю до оконечности запястья (локтевой кости), при этом правая рука должна быть сжата в кулак и лежать на бедре в наполовину согнутом положении.

Длина внутренней части ноги – расстояние между пахом и подошвой ноги, измеренное по вертикали, при этом человек должен стоять прямо, слегка расставив ноги и распределив на них поровну вес тела.

Последний раздел EN 13402-4, касающийся кодирования размеров одежды, должен стать обязательным в Европе после 2007 г. Ожидается, что с выходом в свет этой части будет устранена ситуация, когда средний типовой размер (34–28–37 дюймов, т.е. 88–72–96 см бюст–талия–бедра) в США проходит под номером 10, в Великобритании – 12, в Норвегии, Швеции и Финляндии – С38, в Германии и Нидерландах – 38, в Бельгии и Франции – 40, в Италии – 44, в Португалии и Испании – 44/46.

Аналогичные множества расстояний используются также (например, для скелетных измерений) в судебной медицине, антропологии и т.п.

Расстояния в криминологии

Составление **географического профиля** (или *анализ географической привязки*) имеет целью связать пространственное поведение (выбор жертв и особенно наиболее вероятную *исходную точку*, т.е. место проживания или работы) серийного преступника с пространственным распределением мест его преступлений.

Буферная зона преступника (или *эффект угольного мешка*) – район, окружающий место *пребывания преступника* (исходную точку), в пределах которого отмечается незначительная или вообще не отмечается преступная деятельность; в обычных случаях такая зона характерна для преступников, заранее обдумывающих свои действия. Основные улицы и магистрали, ведущие в эту зону, чаще всего пересекаются вблизи убежища преступника. Для серийных насильников в Великобритании выявлена буферная зона, составляющая порядка 1 км. При этом большинство преступлений против личности происходят на удалении около 2 км от убежища преступника, тогда как для краж имущества характерно большее удаление.

Убывающая функция пути к месту преступления представляет собой графическую **кривую расстояния**, показывающую, как число совершенных преступлений постепенно сокращается по мере удаления от места проживания преступника. Подробные функции являются разновидностями функций центра тяжести, основанных на законе Ньютона о взаимном притяжении двух тел.

Если имеется число n мест преступления (x_i, y_i), $1 \le i \le n$ (где x_i и y_i являются широтой и долготой i-го места), то с помощью *модели Ньютона–Свопа* место убежища преступника определяется в пределах круга с центром в точке $\left(\frac{\sum_i x_i}{n} \cdot \frac{\sum_i y_i}{n} \right)$

с радиусом поиска равным

$$\sqrt{\frac{\max\left| x_{i1} - x_{i2} \right| \cdot \max\left| y_{i1} - y_{i2} \right|}{\pi (n-1)^2}},$$

где максимумы представлены как (i_1, i_2), $1 \le i_1 < i_2 \le n$. *Круговая модель Гантера–Грегори* позволяет предполагать место убежища преступника в пределах круга,

центром которого является место первого преступления, а диаметром – максимальное расстояние между двумя местами преступлений.

Центрографические модели рассматривают место убежища преступника как *центр*, т.е. точку, от которой конкретная функция расстояния пути до любых мест преступления имеет минимальную величину; расстояниями в этом случае будут евклидово расстояние, расстояние Манхэттена, **колесное расстояние** (т.е. реальный путь пробега), воспринимаемое время пути и т.п. Многие из этих моделей являются действующими в обратную сторону моделями теории местоположения, (целью которой является максимальное наращивание распределительной сети в интересах сокращения путевых расходов. Эти модели (*многоугольники Вороного* и др.) базируются на **принципе близости** (*принципе минимального усилия*).

Для выявления криминальных, террористических и других скрытых сетей используются также многие другие средства сбора данных, с помощью которых получают сведения о латентных взаимосвязях (расстояниях и **почти метриках** между людьми), исследуя графы приближения их совместных появлений в соответствующих документах, событиях и т.п.

Расстояния в мире животных

Индивидуальное расстояние – удаление, на котором одно животное стремится держаться от другого.

Групповое расстояние – расстояние, на котором одна группа животных держится от другой.

Расстояние реагирования – расстояние, на котором животное реагирует на появление добычи; *расстояние атаки*: расстояние, в пределах которого хищник может напасть на свою жертву.

Расстояние бегства – расстояние, на котором животное реагирует на появление хищника или доминирующего животного того же вида.

Расстояние ближайшего соседа – более или менее постоянное расстояние, которого придерживаются животные между собой при движении в одном направлении в составе больших групп (таких, как косяки рыб, стаи птиц). Механизм аллеломиметического поведения ("делай так, как сосед") способствует сохранению целостности структуры группы и позволяет осуществлять кажущиеся разумными групповые маневры уклонения при появлении хищников.

Расстояние связи с использованием звуков (включая человеческую речь) – максимальное расстояние, на котором принимающий может услышать сигнал; животные могут менять амплитуду сигнала в зависимости от *удаления принимающего* для обеспечения передачи сигнала

Расстояние до берега – расстояние до побережья, используемое, например, для изучения сосредоточений мест выбрасывания китов на мель из-за искаженной эхолокации, аномалий магнитного поля и т.п.

Дистанционный феромон – растворимое (например, в моче) и/или испаряемое вещество, испускаемое животным в качестве ольфакторного химического раздражителя (метки) для подачи сигналов (тревоги, сексуальных намерений, приманки жертвы, узнавания и т.п.) другим особям этого же вида. В отличие от него *контактный феромон* является веществом нерастворимым и неиспаряющимся; он покрывает тело животного и является контактной меткой.

Расстояние на лошадиных скачках

На лошадиных скачках **корпус** является условной единицей длины для обозначения расстояния между соперниками (на лодочных гонках мерой длины является корпус лодки).

Расстояния на скачках измеряются в длинах корпуса лошади, т.е. около 8 футов (2,44 м). Преимущество на финише измеряется в **корпусах**, начиная от половины корпуса до 20 корпусов; корпус обычно приравнивают к временному интервалу в 0,2 с. Более мелкими длинами являются *короткая голова, голова* или *шея*. Применяется также мера *рука*, т.е. 4 дюйма (10,2 см), которую используют для измерения высоты лошадей.

Дистанции в триатлоне

Соревнования на **железную дистанцию** (впервые проведены на Гавайях в 1978 г.) включают 3,86 км плавания по открытой воде, 180 км велогонки и 42,2 км бега (марафонская дистанция).

Международная **олимпийская дистанция** (первые соревнования состоялись на Олимпийских Играх в Сиднее в 2000 г.) включает 1,5 км плавания (метрическая миля), 40 км велогонки и 10 км бега.

Существует также *спринтерская дистанция* (750 м плавания, 20 км велогонки и 5 км бега) и *длинная дистанция* (3 км плавания, 80 км велогонки и 20 км бега).

Расстояние шабата

Расстоянием шабата (или *раввинской милей*) называется дальность в 2000 талмудических кубитов (1120,4 м), разрешенное расстояние, за пределы которого верующему еврею запрещается выходить в день шабата.

Другими талмудическими мерами длины являются: суточный переход, парса и стадия (40, 4 и 0,8 раввинской мили соответственно), а также пядь, хасит, ладонь, большой палец, средний палец, мизинец ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{36}$ от талмудического кубита соотвтественно).

Галактоцентрическое расстояние

Галактоцентрическое расстояние звезды – ее удаленность от галактического центра. Галактоцентрическое расстояние Солнца составляет около 8,5 кпк, т.е. 27 700 св. лет.

Космический световой горизонт

Космический световой горизонт (или **расстояние Хаббла**, *возраст вселенной*) есть постоянно увеличивающееся **расстояние дальности**: максимальное расстояние, которое свет прошел с момента Большого взрыва, начала существования вселенной. В настоящее время он составляет 13–14 св. лет, т.е. около 46×10^{60} длин Планка.

Литература

[Abel91] Abels H. *The Gallery Distance of Flags*, Order, Vol. 8, pp. 77–92, 1991.

[AAH00] Aichholzer O., Aurenhammer F. and Hurtado F. *Edge Operations on Non-crossing Spanning Trees*, Proc. 16-th European Workshop on Computational Geometry CG'2000, pp. 121–125, 2000.

[AACL98] Aichholzer O., Aurenhammer F., Chen D.Z., Lee D.T., Mukhopadhyay A. and Papadopoulou E. *Voronoi Diagrams for Direction-sensitive Distances*, Proc. 13-th Symposium on Computational Geometry, ACM Press, New York, 1997.

[Aker97] Akerlof G.A. *Social Distance and Social Decisions*, Econometrica, Vol. 65, Nr. 5, pp. 1005–1027, 1997.

[Amar85] Amari S. *Differential-geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, 1985.

[Amba76] Ambartzumian R. *A Note on Pseudo-metrics on the Plane*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, Vol. 37, pp. 145–155, 1976.

[ArWe92] Arnold R. and Wellerding A. *On the Sobolev Distance of Convex Bodies*, Aeq. Mathematicae, Vol. 44, pp. 72–83, 1992.

[Badd92] Baddeley A.J. *Errors in Binary Images and an L^p Version of the Hausdorff Metric*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Vol. 10, pp. 157–183, 1992.

[Bara01] Barabasi A.L. *The Physics of the Web*, Physics World, July 2001.

[Barb35] Barbilian D. *Einordnung von Lobayschewskys Massenbestimmung in either Gewissen Allgemeinen Metrik der Jordansche Bereiche*, Casopis Mathematiky a Fysiky, Vol. 64, pp. 182–183, 1935.

[BLV05] Barcelo C., Liberati S. and Visser M. *Analogue Gravity*, **arXiv: gr-qc/0505065**, Vol. 2, 2005.

[BLMN05] Bartal Y., Linial N., Mendel M. and Naor A. *Some Low Distorsion Metric Ramsey Problems*, Discrete and Computational Geometry, Vol. 33, pp. 27–41, 2005.

[Bata95] Batagelj V. *Norms and Distances over Finite Groups*, J. of Combinatorics, Information and System Sci., Vol. 20, pp. 243–252, 1995.

[Beer99] Beer G. *On Metric Boundeness Structures*, Set-Valued Analysis, Vol. 7, pp. 195–208, 1999.

[BGLVZ98] Bennet C.H., Gacs P., Li M., Vitanai P.M.B. and Zurek W. *Information Distance*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 44, Nr. 4, pp. 1407–1423, 1998.

[BGT93] Berrou C., Glavieux A. and Thitimajshima P. *Near Shannon Limit Error-correcting Coding and Decoding: Turbo-codes*, Proc. of IEEE Int. Conf. on Communication, pp. 1064–1070, 1993.

[BFK99] Blanchard F., Formenti E. and Kurka P. *Cellular Automata in the Cantor, Besicovitch and Weyl Topological Spaces*, Complex Systems, Vol. 11, pp. 107–123, 1999.

[Bloc99] Bloch I. *On fuzzy distances and their use in image processing under unprecision*, Pattern Recognition, Vol. 32 pp. 1873–1895, 1999.

[BCFS97] Block H.W., Chhetry D., Fang Z. and Sampson A.R. *Metrics on Permutations Useful for Positive Dependence*, J. of Statistical Planning and Inference, Vol. 62, pp. 219–234, 1997.

[Blum70] Blumenthal L.M. *Theory and Applications of Distance Geometry*, Chelsea Publ., New York, 1970.

[Borg86] Borgefors G. *Distance Transformations in Digital Images*, Comp. Vision, Graphic and Image Processing, Vol. 34, pp. 344–371, 1986.

[BrLi04] Bramble D.M. and Lieberman D.E. *Endurance Running and the Evolution of Homo*, Nature, Vol. 432, pp. 345–352, 2004.

[BKMR00] Broder A.Z., Kumar S.R., Maaghoul F., Raghavan P., Rajagopalan S., Stata R., Tomkins A. and Wiener G. *Graph Structure in the Web: Experiments and Models*, Proc. 9-th WWW Conf., Amsterdam, 2000.

[BGL95] Brualdi R.A., Graves J.S. and Lawrence K.M. *Codes with a Poset Metric*, Discrete Math., Vol. 147, pp. 57–72, 1995.

[Brya85] Bryant V. *Metric Spaces: Iteration and Application*, Cambridge Univ. Press, 1985.

[Bull12] Bullough E. *"Psychical Distance" as a Factor in Art and as an Aestetic Principle*, British J. of Psychology, Vol. 5, pp. 87–117, 1912.

[BuIv01] Burago D., Burago Y. and Ivanov S. *A Course in Metric Geometry*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Math., Vol. 33, 2001.

[BuKe53] Busemann H. and Kelly P.J. *Projective Geometry and Projective Metrics*, Academic Press, New York, 1953.

[Buse55] Busemann H. *The Geometry of Geodesics*, Academic Press, New York, 1955.

[BuPh87] Busemann H. and Phadke B.B. *Spaces with Distinguished Geodesics*, Marcel Dekker, New York, 1987.

[Cair01] Cairncross F. *The Death of Distance 2.0: How the Communication Revolution will Change our Lives*, Harvard Business School Press, 2-nd edition, 2001.

[CSY01] Calude C.S., Salomaa K. and Yu S. *Metric Lexical Analysis*, Springer-Verlag, 2001.

[CJT93] Chartrand G., Johns G.L. and Tian S. *Detour Distance in Graphs*, Ann. of Discrete Math., Vol. 55, pp. 127–136, 1993.

[ChLu85] Cheng Y.C. and Lu S.Y. *Waveform Correlation by Tree Matching*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. 7, pp. 299–305, 1985.

[Chen72] Chentsov N.N. *Statistical Decision Rules and Optimal Inferences*, Nauka, Moscow, 1972.

[ChFi98] Chepoi V. and Fichet B. *A Note on Circular Decomposable Metrics*, Geom. Dedicata, Vol. 69, pp. 237–240, 1998.

[ChSe00] Choi S.W. and Seidel H.-P. *Hyperbolic Hausdorff Distance for Medial Axis Transform*, Research Report MPI-I-2000-4-003 of Max-Planck-Institute fur Infor-matik, 2000.

[COR05] Collado M.D., Ortuno-Ortin I. and Romeu A. *Vertical Transmission of Consumption Behavior and the Distribution of Surnames*, http://www.econ.upf.es/docs/ seminars/collado.pdf

[Cops68] Copson E.T. *Metric Spaces*, Cambridge Univ. Press, 1968.

[Corm03] Cormode G. *Sequence Distance Embedding*, PhD Thesis, Univ. of Warwick, 2003.

[CPQ96] Critchlow D.E., Pearl D.K. and Qian C *The Triples Distance for Rooted Bifurcating Phylogenetic Trees*, Syst. Biology, Vol. 45, pp. 323–334, 1996.

[CCL01] Croft W.B., Cronon-Townsend S. and Lavrenko V. *Relevance Feedback and Personalization: A Language Modeling Perspective*, in DELOS-NSF Workshop on Personalization and Recommender Systems in Digital Libraries, pp. 49–54, 2001.

[DaCh88] Das P.P. and Chatterji B.N. *Knight's Distance in Digital Geometry*, Pattern Recognition Letters, Vol. 7, pp. 215–226, 1988.

[Das90] Das P.P. *Lattice of Octagonal Distances in Digital Geometry*, Pattern Recognition Letters, Vol. 11, pp. 663–667, 1990.

[DaMu90] Das P.P. and Mukherjee J. *Metricity of Super-knight's Distance in Digital Geometry*, Pattern Recognition Letters, Vol. 11, pp. 601–604, 1990.

[Dau05] Dauphas N. *The U/Th Production Ratio and the Age of the Milky Way from Meteorites and Galactic Halo Stars*, Nature, Vol. 435, pp. 1203–1205, 2005.

[Day81] Day W.H.E. *The Complexity of Computing Metric Distances between Partitions*, Math. Social Sci., Vol. 1, pp. 269–287, 1981.

[DeDu03] Deza M.M. and Dutour M. *Cones of Metrics, Hemi-metrics and Super-metrics*, Ann. of European Academy of Sci., pp. 141–162, 2003.

[DeHu98] Deza M. and Huang T. *Metrics on Permutations, a Survey*, J. of Combinatorics, Information and System Sci., Vol. 23, Nrs. 1–4, pp. 173–185, 1998.

[DeLa97] Deza M.M. and Laurent M. *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer-Verlag, 1997.

[Dzha01] Dzhafarov E.N. *Multidimensional Fechnerian Scaling: Probability-Distance Hypothesis*, J. of Math. Psychology, Vol. 46, pp. 352–374, 2001.

[EhHa88] Ehrenfeucht A. and Haussler D. *A New Distance Metric on Strings Computable in Linear Time*, Discrete Applied Math., Vol. 20, pp. 191–203, 1988.

[EM98] *Encyclopedia of Mathematics*, Hazewinkel M. (ed.), Kluwer Academic Publ., 1998. Online edition: http://eom.springer.de/default.htm

[Ernv85] Ernvall S. *On the Modular Distance*, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. IT-31, Nr. 4, pp. 521–522, 1985.

[EMM85] Estabrook G.F., McMorris F.R. and Meacham C.A. *Comparison of Undirected Phylogenetic Trees Based on Subtrees of Four Evolutionary Units*, Syst. Zool, Vol. 34, pp. 193–200, 1985.

[FaMu03] Farran J.N. and Munuera C. *Goppa-like Bounds for the Generalized Feng-Rao Distances*, Discrete Applied Math., Vol. 128, pp. 145–156, 2003.

[Faze99] Fazekas A. *Lattice of Distances Based on 3D-neighborhood Sequences*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis, Vol. 15, pp. 55–60, 1999.

[Ferg03] Ferguson N. *Empire: The Rise and Demise of the British World Order and Lessons for Global Power*, Basic Books, 2003.

[FoSC06] Foertsch T. and Schroeder V. *Hyperbolicity, C AT (–1)-spaces and the Ptolemy Inequality*, arXiv:math.MG/0605418 v2 13 July 2006.

[Frie98] Frieden B.R. *Physics from Fisher information*, Cambrige Univ. Press, 1998.

[Gabi85] Gabidulin E.M. *Theory of Codes with Maximum Rank Distance*, Probl. Peredachi Inform., Vol. 21, Nr. 1, pp. 1–12, 1985.

[GaSi98] Gabidulin E.M. and Simonis J. *Metrics Generated by Families of Subspaces*, IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 44, Nr. 3, pp. 1136–1141, 1998.

[GiOn96] Gilbert E.G. and Ong C.J. *Growth distances: New Measures for Object Separation and Penetration*, IEEE Transactions in Robotics, Vol. 12, Nr. 6, 1996.

[Gile87] Giles J.R. *Introduction to the Analysis of Metric Spaces*, Australian Math. Soc. Lecture Series, Cambridge Univ. Press, 1987.

[GoMc80] Godsil C.D. and McKay B.D. *The Dimension of a Graph*, Quart. J. Math. Oxford Series (2), Vol. 31, Nr. 124, pp. 423–427, 1980.

[GOJKK02] Goh K.I., Oh E.S., Jeong H., Kahng B. and Kim D. *Classification of Scale Free Networks*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 99, pp. 12583–12588, 2002.

[Gopp71] Goppa V.D. *Rational Representation of Codes and (L,g)-codes*, Probl. Peredachi Inform., Vol. 7, Nr. 3, pp. 41–49, 1971.

[Goto82] Gotoh O. *An Improved Algorithm for Matching Biological Sequences*, J. of Molecular Biology, Vol. 162, pp. 705–708, 1982.

[GKC04] Grabowski R., Khosa P. and Choset H. *Development and Deployment of a Line of Sight Virtual Sensor for Heterogeneous Teams*, Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, New Orlean, 2004.

[Grub93] Gruber P.M. *The space of Convex Bodies in Handbook of Convex Geometry*, Gruber P.M. and Wills J.M. (eds.), Elsevier Sci. Publ., 1993.

[HSEFN95] Hafner J., Sawhney H.S., Equitz W., Flickner M. and Niblack W. *Efficient Color Histogram Indexing for Quadratic Form Distance Functions*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. 17, Nr. 7, pp. 729–736, 1995.

[Hall69] Hall E.T. *The Hidden Dimension*, Anchor Books, New York, 1969.

[Hami66] Hamilton W.R. *Elements of Quaternions*, 2-nd edition 1899–1901 enlarged by C.J. Joly, reprinted by Chelsea Publ., New York, 1969.

[HeMa02] Head K. and Mayer T. *Illusory Border Effects: Distance mismeasurement inflates estimates of home bias in trade*, CEPII Working Paper No 2002-01, 2002.

[Hemm02] Hemmerling A. *Effective Metric Spaces and Representations of the Reals*, Theoretical Comp. Sci., Vol. 284, Nr. 2, pp. 347–372, 2002.

[Hofs80] Hofstede G. *Culture's Consequences: International Differences in Work-related Values*, Sage Publ., California, 1980.

[Hube94] Huber K. *Codes over Gaussian Integers*, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 40, Nr. 1, pp. 207–216, 1994.

[Hube93] Huber K. *Codes over Eisenstein-Jacobi Integers*, Contemporary Math., Vol. 168, pp. 165–179, 1994.

[HFPMC02] Huffaker B., Fomenkov M., Plummer D.J., Moore D. and Claffy K. *Distance Metrics in the Internet*, IEEE Int. Telecommunication Symposium (ITS-2002), September 2002, http://www.caida.org/outreach/papers/2002/Distance

[InVe00] Indyk P. and Venkatasubramanian S. *Approximate Congruence in Nearly Linear Time*, http://www.research.att.com/~suresh/papers/hallj/hallj.pdf

[Isbe64] Isbell J. *Six Theorems about Metric Spaces*, Comment. Math. Helv., Vol. 39, pp. 65–74, 1964.

[IsKuPe90] Isham C.J., Kubyshin Y. and Penteln P. *Quantum Norm Teory and the Quantization of Metric Topology*, Class. Quantum Gravity, Vol. 7, pp. 1053–1074, 1990.

[IvSt95] Ivanova R. and Stanilov G. *A Skew-symmetric Curvature Operator in Rieman-nian Geometry*, in Symposia Gaussiana, Conf. A, Behara M., Fritsch R. and Lintz R. (eds.), pp. 391–395, 1995.

[JWZ94] Jiang T., Wang L. and Zhang K. *Alignment of Trees – an Alternative to Tree Edit, in Combinatorial Pattern Matching, Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 807, Crochemore M. and Gusfield D. (eds.), Springer-Verlag, 1994.

[Klei88] Klein R. *Voronoi Diagrams in the Moscow Metric*, Graph Theoretic Concepts in Comp. Sci., Vol. 6, 1988.

[Klei89] Klein R. *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*, Lecture Notes in Comp. Sci., Springer-Verlag, 1989.

[KlRa93] Klein D.J. and Randic M. *Resistance distance*, J. of Math. Chemistry, Vol. 12, pp. 81–95, 1993.

[Koel00] Koella J.C. *The Spatial Spread of Altruism Versus the Evolutionary Response of Egoists*, Proc. Royal Soc. London, Series B, Vol. 267, pp. 1979–1985, 2000.

[KoSi88] Kogut B. and Singh H. *The Effect of National Culture on the Choice of Entry Mode*, J. of Int. Business Studies, Vol. 19, Nr. 3, pp. 411–432, 1988.

[KKN02] Kosheleva O., Kreinovich V. and Nguyen H.T. *On the Optimal Choice of Quality Metric in Image Compression*, Fifth IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation, 7–9 April 2002, Santa Fe. IEEE Comp. Soc. Digital Library, Electronic Edition, pp. 116–120, 2002.

[LaLi81] Larson R.C. and Li V.O.K. *Finding Minimum Rectilinear Distance Paths in the Presence of Bariers*, Networks, Vol. 11, pp. 285–304, 1981.

[LCLM04] Li M., Chen X., Li X., Ma B. and Vitanyi P. *The Similarity Metric*, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 50–12, pp. 3250–3264, 2004.

[LuRo76] Luczak E. and Rosenfeld A. *Distance on a Hexagonal Grid*, IEEE Trans. on Computers, Vol. 25, Nr. 5, pp. 532–533, 1976.

[MaMo95] Mak King-Tim and Morton A.J. *Distances between Traveling Salesman Tours*, Discrete Applied Math., Vol. 58, pp. 281–291, 1995.

[MaSt99] Martin W.J. and Stinson D.R. *Association Schemes for Ordered Orthogonal Arrays and (T, M, S)-nets*, Canad. J. Math., Vol. 51, pp. 326–346, 1999.

[McCa97] McCanna J.E. *Multiply-sure Distances in Graphs*, Congressus Numerantium, Vol. 97, pp. 71–81, 1997.

[Melt91] Melter R.A. *A Survey of Digital Metrics*, Contemporary Math., Vol. 119, 1991.

[Monj98] Monjardet B. *On the Comparaison of the Spearman and Kendall Metrics between Linear Orders*, Discrete Math., Vol. 192, pp. 281–292, 1998.

[Mura85] Murakami H. *Some Metrics on Classical Knots*, Math. Ann., Vol. 270, pp. 35–45, 1985.

[NeWu70] Needleman S.B. and Wunsh S.D. *A general Method Applicable to the Search of the Similarities in the Amino Acids Sequences of Two Proteins*, J. of Molecular Biology, Vol. 48, pp. 443–453, 1970.

[NiSu03] Nishida T. and Sugihara K. *FEM-like Fast Marching Method for the Computation of the Boat-Sail Distance and the Associated Voronoi Diagram*, http://www. keisu.t.u-tokyo.ac.jp/Research/METR/2003/METR03–45.pdf

[OBS92] Okabe A., Boots B. and Sugihara K. *Spatial Tesselation: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, Wiley, 1992.

[OSLM04] Oliva D., Samengo I., Leutgeb S. and Mizumori S. *A Subgective Distance between Stimuli: Quantifying the Metric Structure of Represantations*, Neural Computation, Vol.17, Nr. 4, pp. 969–990, 2005.

[Orli32] Orlicz W. *Uber eine Gewisse Klasse von Raumen vom Typus B'*, Bull. Int. Acad. Pol. Series A, Vol. 8–9, pp. 207–220, 1932.

[OASM03] Ozer H., Avcibas I., Sankur B. and Memon N.D. *Steganalysis of Audio Based on Audio Quality Metrics*, Security and Watermarking of Multimedia Contents V (Proc. of SPIEIS and T), Vol. 5020, pp. 55–66, 2003.

[Page65] Page E.S. *On Monte-Carlo Methods in Congestion Problem. 1. Searching for an Optimum in Discrete Situations*, J. Oper. Res., Vol. 13, Nr. 2, pp. 291–299, 1965.

[Petz96] Petz D. *Monotone Metrics on Matrix Spaces*, Linear Algebra Appl., Vol. 244, 1996.

[PM] PlanetMath.org, http://planetmath.org/encyclopedia/

[Rach91] Rachev S.T. *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*, Wiley, New York, 1991.

[ReRo01] Requardt M. and Roy S. *(Quantum) Spacetime as a Statistical Geometry of Fuzzy Lumps and the Connection with Random Metric Spaces*, Class. Quantum Gravity, Vol. 18, pp. 3039–3057, 2001.

[RoTs96] Rosenbloom M.Y. and Tsfasman M.A. *Codes for the m-metric*, Problems of information transmission, Vol. 33, Nr. 1, pp. 45–52, 1997.

[RoPf68] Rosenfeld A. and Pfaltz J. *Distance Functions on Digital Pictures*, Pattern Recognation, Vol. 1, pp. 33–61, 1968.

[RTG00] Rubner Y., Tomasi C. and Guibas L.J. *The Earth Mover's Distance as a Metric for Image Retrieval*, Int. J. of Comp. Vision, Vol. 40, Nr. 2, pp. 99–121, 2000.

[Rumm76] Rummel R.J. *Understanding Conflict and War*, Sage Publ., California, 1976. [ScSk83] Schweizer B. and Sklar A. Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, 1983.

[Selk77] Selkow S.M. *The Tree-to-tree Editing Problem*, Inform. Process. Lett., Vol. 6, Nr. 6, pp. 184–186, 1977.

[ShKa97] Sharma B.D. and Kaushik M.L. *Error-correcting Codes through a New Metric*, 41-st Annual Conf. Int. Stat. Inst., New Delhi, 1997.

[Tai79] Tai K.-C. *The Tree-to-tree Correction Problem*, J. of the Association for Comp. Machinery, Vol. 26, pp. 422–433, 1979.

[Tail04] Tailor B. *Introduction: How Far, How Near: Distance and Proximity in the Historical Imagination*, History Workshop J., Vol. 57, pp. 117–122, 2004.

[Tymo06] Tymoczko D. *The Geometry of Musical Chords*, Science, Vol. 313, Nr. 5783, pp.72–74, 2006.

[ToSa73] Tomimatsu A. and Sato H. *New Exact Solution for the Gravitational Field of a Spinning Mass*, Phys. Rev. Letters, Vol. 29, pp. 1344–1345, 1972.

[Var04] Vardi Y. *Metrics Useful in Network Tomography Studies*, Signal Processing Letters, Vol. 11, Nr. 3, pp. 353–355, 2004.

[VeHa01] Veltkamp R.C. and Hagendoorn M. *State-of-the-Art in Shape Matching*, in Principles of Visual Information Retrieval, Lew M. (ed.), pp. 87–119, Springer-Verlag, 2001.

[Watt99] Watts D.J. *Small Worlds: The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton Univ. Press, 1999.

[Wein72] Weinberg S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York, 1972.

[Weis99] Weisstein E.W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999.

[Well86] Wellens R.A. *Use of a Psychological Model to Assess Differences in Telecommunication Media*, in *Teleconferencing and Electronic Communication*, Parker L.A. and Olgren O.H. (eds.), pp. 347–361, Univ. of Wisconsin Extension, 1986.

[WFE] Wikipedia, the Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org

[WiMa97] Wilson D.R. and Martinez T.R. *Improved Heterogeneous Distance Functions*, J. of Artificial Intelligence Research, Vol. 6, p. 134, 1997.

[WoPi99] Wolf S. and Pinson M.H. *Spatial-Temporal Distortion Metrics for In-Service Quality Monitoring of Any Digital Video System*, Proc. of SPIE Int. Symp. on Voice, Video, and Data Commun., September 1999.

[Yian91] Yianilos P.N. *Normalized Forms for Two Common Metrics*, NEC Research Institute, Report 91-082-9027-1, 1991.

[Youn98] Young N. *Some Function-Theoretic Issues in Feedback Stabilisation*, Holomor-phic Spaces, MSRI Publication, Vol. 33, 1998.

[YOI03] Yutaka M., Ohsawa Y. and Ishizuka M. *Average-Clicks: A New Measure of Distance on the World Wide Web*, Journal of Intelligent Information Systems, Vol. 20, No. 1, pp. 51–62, 2003.

[Zeli75] Zelinka B. *On a Certain Distance between Isomorphism Classes of Graphs*, Ca-sopus. Pest. Mat., Vol. 100, pp. 371–373, 1975.

Предметный указатель

#-Гордиево расстояние, 156
(1, 2)-B-метрика, 43
(2k + 1)-гональное расстояние, 18
2k-гональное расстояние, 18
2-Метрика, 61
2-Параметрическое расстояние Кимуры, 337
3-Параметрическое расстояние Тамуры, 338
AS метрика Интернета, 326
c-Изоморфизм метрических пространств, 40
c-Равномерно совершенное метрическое пространство, 45
CAT(k) пространство, 91
C-Метрика, 171
$\overline{d}$-Метрика Орнштейна, 224
f-Расхождение Чизара, 218
F^*-Метрика, 78
G-Инвариантная метрика, 119
G-Пространство, 89
G-Пространство эллиптического типа, 91
G-Расстояние, 150
(h, Δ)-Метрика, 150
IP метрика Интернета, 326
J-Метрика, 63
k-Ориентированное расстояние, 163
k-Степень графа, 231
K Метрика Ки Фана, 213
K^* Метрика Ки Фана, 213
l_p-Метрика, 80
L_p-Метрика, 82
L_p-Метрика между величинами, 212
L_p-Метрика между плотностями, 213
L_p-Метрика сжатия изображения, 303
m-Хемиметрика, 61
(m, s)-Суперметрика, 61
M-Относительная метрика, 277
p-адическая метрика, 190
p-Метрика Бергмана, 202
p-Расстояние, 336
(p, q)-Относительная метрика, 277
P-Метрика, 19
Q-Метрика, 150
Q Подобность Юле, 263
Q_0-Разность, 263
SO(3)-Инвариантная метрика, 138
t-Неприводимое множество, 233
t-Остов, 233
T_0-Пространство, 56
T_1-Пространство, 56
T_2-Пространство, 56
T_3-Пространство, 56
T_4-Пространство, 57
T_5-Пространство, 57
Web квазирасстояние среднего числа кликов, 327
WebX квазирасстояние Доджа–Шиоде, 327
Y Подобность взаимосвязанности Юле, 263
γ-Метрика, 228
δ-Гиперболическая метрика, 21
Λ-Метрика, 149
ρ-Расстояние Спирмана, 186
τ-Расстояние Кендалла, 187
φ Подобность Пирсона, 263
χ^2-Расстояние, 219
χ^2-Расстояние Сангви, 335

Аддитивно взвешенное расстояние, 292
Аддитивно взвешенное степенное расстояние, 292
Азимут, 363
Акустическая метрика, 351
Акустические расстояния, 319
Амино γ-расстояние, 339
Амино расстояние коррекции Пуассона, 339
Амино p-расстояние, 339
Аналитическая метрика, 148
Антидискретная полуметрика, 43

Антидискретное пространство, 60
Антиномия расстояния, 406
Аполлонова метрика, 108
Асимптотическая размерность, 29
Астрономические единицы длины, 396
Атомный радиус, 353
Аффинная метрика, 102
Аффинное псевдорасстояние, 101
Аффинное расстояние, 101

Баллистические расстояния, 347
Банахово пространство, 79
Барицентрическое метрическое пространство, 51
Белковое расстояние Джукеса–Кантора, 340
Белковое расстояние Кимуры, 340
Биинвариантная метрика, 168
Билипшицево отображение, 39
Блоковый граф, 232
Буземанова метрика, 98
Буземанова метрика множеств, 75
Булево метрическое пространство, 67
Бумажные форматы МОС, 395

Вероятностное метрическое пространство, 66
Вероятностное расстояние, 213
Вертикальное эшелонирование, 417
Взвешенная метрика пути, 227
Взвешенная метрика Робинзона–Фоулдса, 241
Взвешенная словарная метрика, 170
Взвешенное евклидово расстояние, 268
Взвешенное расстояние Манхэттена, 269
Взвешенное расстояние Минковского, 268
Взвешенное расстояние Хэмминга, 183
Внутренняя метрика, 71
Вполне нормальное пространство, 57
Вполне ограниченное метрическое пространство, 44
Вполне ограниченное пространство, 58
Вполне регулярное пространство, 56
Вращающаяся C-метрика, 389
Вторая метрика Ферранда, 110
Вторично-счетное пространство, 57
Выпуклая функция расстояния, 34
Выпуклость Буземана, 24
Выпуклость по Менгеру, 24
Выпуклость по Такахаши, 26
Высота, 362

Галактоцентрическое расстояние, 424
Галилеево расстояние, 376
Гамма-расстояние Джина–Нея, 337
Географическое расстояние, 326
Геодезическая, 23
Геодезическая выпуклость, 24
Геодезическое метрическое пространство, 89
Геодезическое расстояние, 89
Геодетический граф, 231
Гидродинамический радиус, 354
Гильбертова проективная метрика, 97
Гильбертова проективная полуметрика, 163
Гильбертово пространство, 84
Гиперболическая метрика, 104
Гиперболическое хаусдорфово расстояние, 311
Гипервыпуклость, 26
Гиперкехлерова метрика, 137
Гиперметрика, 19
Гиперпространство, 59
Гипотеза вероятности расстояния, 344
Гирорадиус, 348
Глубина проникновения, 350
Гомеоморфные метрические пространства, 38
Гордиево расстояние, 156
Горизонтальное расстояние, 357
Граница метрического пространства, 93
Граф D-расстояния, 233
Грубое вложение, 40

Дальний порядок, 349
Дальность действия молекулярных сил, 354
Дальность действия фундаментальных сил, 349
Дальность передачи, 416
Дальность распознавания радара, 282
Датчики ближней локации, 415
Двойственное расстояние, 246
Двойственные метрики, 83
Дезаргово пространство, 90
Действительное дерево, 42
Диагональная метрика, 116

Дискретная динамическая система, 35
Дискретная метрика, 43
Дискретная метрика переноса, 169
Дискретное пространство, 59
Дистальность, 421
Дистанции в триатлоне, 424
Дистанционная беговая модель, 345
Дистанционная модель альтруизма, 345
Дистанционная модель Малекота, 344
Дистанционное действие (в вычислительных процессах), 329
Дистанционное действие (в физике), 349
Дистанционный взрыватель, 415
Дистанцирование, связанное с технологией, 406
Дистанция выноса, 414
Дистанция распыления, 417
Длина метрического пространства, 30
Длина пространственной когерентности, 350
Длина смыкания, 350
Долгота, 361
Доминирующая метрика, 43
Допускаемое расстояние, 357
Древовидная метрика, 228

Евклидова метрика, 81
Евклидово двоичное расстояние, 259
Евклидово среднее цензурированное расстояние, 260

Жесткое перемещение метрического пространства, 37

Зависимость большой дальности, 420
Закон Титиуса–Боде, 364
Законы обратной пропорциональности квадрату расстояния, 348
Замкнутый метрический интервал, 22
Зенитный угол, 363

Изоляция расстоянием, 344
Изометрический подграф, 231
Изометрия, 37
Изречения с использованием "ближнего-дальнего" расстояний, 409
Имперские меры длины, 394
Инверсивное расстояние, 283
Индикаторная метрика, 213
Индуцированная метрика, 43
Инженерная полуметрика, 214
Инструментальные расстояния, 416
Интегральная метрика, 200
Интервальное расстояние, 252
Интернальная метрика, 89
Информационная метрика Фишера, 128
Инъективная оболочка, 41
Инъективное метрическое пространство, 41
Истинная аномалия, 363

Касательное расстояние, 308
Категория метрических пространств, 41
Квадратичное расстояние гистограммы, 302
Квазигиперболическая метрика, 108
Квазиизометрия, 40
Квазиконформное метрическое отображение, 38
Квазиметрика, 18
Квазиметрика кольцевой железной дороги, 283
Квазиметрика пути в орграфах, 227
Квазиметрика Web-гиперссылки, 327
Квазиполуметрика, 17
Квазиполуметрика действительной полупрямой, 190
Квазиполуметрика ориентированного мультиразреза, 231
Квазиполуметрика ориентированного разреза, 231
Квазирасстояние, 17
Квазирасстояние Брегмана, 206
Квазирасстояние Итакуры–Саито, 315
Квазирасстояние коэффициента качества, 309
Квазирасстояние логарифма отношения правдоподобия, 316
Квазирасстояние пересечений гистограмм, 302
Квазирасстояния контакта, 282
Квантальные расстояния, 352
Квантовые метрики, 352
Кватернионная метрика, 192
Кепстральное расстояние, 316
Кинематическая метрика, 375
Кинематическое расстояние, 371
Киносъемки, связанные с расстоянием, 412
Ковариационная подобность, 264
Колатитьюда, 361

Комбинированно взвешенное расстояние, 292
Компакт Банаха–Мазура, 85
Компактное квантовое метрическое пространство, 52
Компактное пространство, 58
Комплексная финслерова метрика, 139
Конечная l_p-полуметрика, 230
Коническое расстояние, 298
Конструктивное метрическое пространство, 54
Контактное расстояние Ван-дер-Ваальса, 354
Конформная метрика, 117
Конформно инвариантная метрика, 150
Конформно стационарная метрика, 384
Конформное метрическое отображение, 38
Конформное пространство, 117
Корреляционная подобность, 264
Космический световой горизонт, 424
Косое расхождение, 220
Кривая расстояния, 419
Культурное расстояние, 403

Лексикографическая метрика, 188
Лестница космологических расстояний, 371
Лингвистическое расстояние, 318
Липшицево отображение, 39
Липшицево расстояние, 51
Липшицево расстояние между мерами, 51
Логарифмическое расстояние, 291
Локально выпуклое пространство, 59
Локально компактное пространство, 58
Локсодромическое расстояние, 356
Лоренцева метрика, 121
Лоренцевское расстояние, 259
Лунное расстояние, 363

Максимальное расстояние многоугольника, 161
Масштабированное евклидово расстояние, 268
Матрица Грамма, 37
Матрица Кэли–Менгера, 36
Матрица расстояний, 36
Машинное обучение на базе расстояний, 266
Международная метрическая система, 392
Межионное расстояние, 354
Метаболическое расстояние, 343
Метризация, 393
Метризуемое пространство, 60
Метрика, 17
Метрика F-нормы, 77
Метрика GCSS, 381
Метрика G-нормы, 172
Метрика Азукавы, 141
Метрика Алкубьерра, 388
Метрика Асплунда, 160
Метрика Атья–Хитчина, 138
Метрика Банаха–Мазура, 160
Метрика Бервальда, 125
Метрика Бергера, 120
Метрика Бергмана, 137
Метрика Бертотти–Робинсона, 387
Метрика Бесова, 203
Метрика Блоха, 203
Метрика Бляшке, 122
Метрика Боголюбова–Кубо–Мори, 131
Метрика Бомбьери, 193
Метрика Бора, 201
Метрика Бохнера, 202
Метрика Брайанта, 126
Метрика британской железной дороги, 278
Метрика Бурагро–Иванова, 279
Метрика Буреса, 131
Метрика Бушеля, 163
Метрика быстрейшего пути, 281
Метрика Бэра, 185
Метрика валюации, 85
Метрика валюации решетки, 177
Метрика Ван Стокума, 382
Метрика Вейерштрасса, 107
Метрика Вейля, 383
Метрика Вейля–Папапетру, 382
Метрика Вейля–Петерсона, 143
Метрика взвеси, 164
Метрика взвешенного разреза, 289
Метрика Видьясагара, 273
Метрика Вилса, 386
Метрика Винникомбе, 273
Метрика винтовой поверхности, 154
Метрика вставки-удаления, 181
Метрика Ву, 141
Метрика Вуоринена, 109

Метрика Габидулина–Симониса, 251
Метрика галереи, 46
Метрика Гёделя, 384
Метрика Гейзенберга, 174
Метрика Гельдера, 205
Метрика Геринга, 109
Метрика Гиббонса–Мантона, 143
Метрика гибридизации Гарсона и др., 338
Метрика гильбертова куба, 74
Метрика гиперболоида, 153
Метрика городского квартала, 276
Метрика гриды, 284
Метрика Громова–Хаусдорфа, 49
Метрика Грушина, 122
Метрика Дадли, 215
Метрика движений, 173
Метрика де Ситтера, 377
Метрика Джаниса–Ньюмана–Винкура, 379
Метрика доверия, 328
Метрика Дугласа, 126
Метрика Дункана, 185
Метрика единичных кватернионов, 269
Метрика естественной нормы, 195
Метрика Замолодчикова, 143
Метрика Зипой–Вурхиза, 383
Метрика Золла, 119
Метрика Иванова–Петровой, 119
Метрика излучения Бонди, 386
Метрика инволютивного преобразования, 71
Метрика интервальной нормы, 170
Метрика Кавагучи, 126
Метрика Калаби, 137
Метрика Калаби–Яо, 135
Метрика Калузы–Клейна, 389
Метрика Кантовского–Сахса, 381
Метрика Кантора, 271
Метрика Канторовича–Мэллоуза–Монжа–Вассерштейна, 223
Метрика Каратеодори, 140
Метрика Карно–Каратеодори, 120
Метрика Картана, 145
Метрика Каснера, 380
Метрика квадрики, 152
Метрика Керра, 378
Метрика Керра–Ньюмана, 379
Метрика Кехлера, 135
Метрика Кехлера–Эйнштейна, 136
Метрика Клейна, 125
Метрика Кобайаши, 139
Метрика Кобайаши–Буземана, 140
Метрика ковра Рикмана, 279
Метрика Колмогорова–Смирнова, 214
Метрика комплексного модуля, 191
Метрика конечной ядерной нормы, 208
Метрика конечных подгрупп, 177
Метрика Конна, 132
Метрика коня, 287
Метрика косого произведения, 74
Метрика Коттлера, 378
Метрика Кропиной, 124
Метрика Крускала–Чекереса, 377
Метрика Кутраса–Макинтоша, 386
Метрика Кэли, 187
Метрика Кэли–Клейна–Гильберта, 107
Метрика ладьи, 288
Метрика Левенштейна, 181
Метрика Леви, 215
Метрика Леви–Чивита, 382
Метрика Ли, 47
Метрика лифта, 278
Метрика Лоренца, 375
Метрика луча Боннора, 385
Метрика Льюиса, 381
Метрика Майерса–Перри, 389
Метрика Макбета, 160
Метрика МакКлюра–Витале, 158
Метрика маркировки, 182
Метрика Мартина, 185
Метрика между интервалами, 174
Метрика между направлениями, 283
Метрика между углами, 283
Метрика Минковского, 97, 374
Метрика Миснера, 388
Метрика модулюса, 110
Метрика монополей Барриолы–Виленкина, 387
Метрика Морриса–Торна, 387
Метрика мультимножества, 181
Метрика неотрицательной кривизны, 149
Метрика непересекающегося объединения, 72
Метрика неположительной кривизны, 148
Метрика неравенства четырех точек, 20
Метрика несходства, 216

Метрика нечетко определенного полинуклеотида, 341
Метрика Нидлмана–Вунша–Селлерса, 184
Метрика Никодима, 159
Метрика нормы, 46, 78
Метрика нормы Гильберта–Шмидта, 209
Метрика нормы группы, 77
Метрика нормы Ки Фана, 197
Метрика нормы матрицы, 194
Метрика нормы многочлена, 193
Метрика нормы мономорфизма, 171
Метрика нормы операторов со следом, 209
Метрика нормы перестановок, 173
Метрика нормы порядка, 171
Метрика нормы произведения, 171
Метрика нормы Рисса, 84
Метрика нормы p-класса Шатена, 209
Метрика нормы Фробениуса, 196
Метрика нормы Шатена, 197
Метрика (c, p)-нормы, 196
Метрика p-нормы матрицы, 195
Метрика нулевого отклонения, 190
Метрика обезьяньего седла, 155
Метрика обмена ближайшими соседями, 241
Метрика обратного образа, 71
Метрика ограничения потери порядка m, 214
Метрика ограниченного блока, 270
Метрика ограниченной кривизны, 149
Метрика окружности, 283
Метрика операторной нормы, 207
Метрика Орлича, 204
Метрика Орлича–Лоренца, 204
Метрика ослабленного неравенства четырех точек, 21
Метрика Оссермана, 119
Метрика Оссермана–Лоренца, 122
Метрика отрицательной кривизны, 148
Метрика перемещения робота, 269
Метрика перестановок Фреше, 188
Метрика плоской волны, 385
Метрика поверхности вращения, 154
Метрика поверхности Каталана, 155
Метрика поверхности Фреше, 151
Метрика полиэдральных цепей, 165
Метрика положительной кривизны, 148
Метрика Помпейю–Хаусдорфа–Бляшке, 158
Метрика Помпейю–Эгглестона, 158
Метрика Понсе де Леона, 390
Метрика, порожденная путем, 287
Метрика последовательности соседства, 285
Метрика последовательности nD-соседства, 286
Метрика потерянности, 328
Метрика правой логарифмической производной, 131
Метрика преобразования, 69
Метрика преобразования Фарриса, 71
Метрика преобразования Шенберга, 70
Метрика префикс-Хэмминга, 183
Метрика произведения, 47, 73
Метрика произведения Фреше, 73
Метрика пропуска, 272
Метрика пространства переменной экспоненты, 206
Метрика Прохорова, 215
Метрика прямой вращающейся струны, 383
Метрика псевдосферы, 154
Метрика Пуанкаре, 106
Метрика пути, 46, 227
Метрика Райсснера–Нордстрома, 378
Метрика Рандерса, 124
Метрика рассечения-восстановления дерева, 242
Метрика расслоения, 134
Метрика реверсии, 187
Метрика реверсии со знаком, 187
Метрика редактирования, 46
Метрика редактирования с перемещениями, 181
Метрика решетки, 285
Метрика Робертсона–Уолкера, 379
Метрика Робинзона–Фоулдса, 241
Метрика Розенблюма–Цфасмана, 198
Метрика pp-волны, 385
Метрика с альтернативной кривизной, 149
Метрика Сасакьяна, 145
Метрика свертки, 216
Метрика свопа, 181
Метрика Сейтенранта, 110
Метрика Сибони, 141

Метрика симметрической разности, 47
Метрика Скорохода, 217
Метрика Скорохода–Билингсли, 217
Метрика скругления, 288
Метрика следовой нормы, 197
Метрика Соболева, 205
Метрика сопротивления, 228
Метрика средней ширины, 157
Метрика Стензеля, 138
Метрика степенного преобразования, 70
Метрика степенного ряда, 86
Метрика супер-коня, 288
Метрика сфероида, 153
Метрика сферы, 152
Метрика Тауба–НУТ, 138
Метрика Тауба–НУТ–де Ситтера, 386
Метрика Тейхмюллера, 142
Метрика тензорной нормы, 85
Метрика Томиматсу–Сато, 383
Метрика тора, 154
Метрика углов Эйлера, 269
Метрика $2n$-угольника, 279
Метрика Улама, 187
Метрика уплотненного редактирования, 181
Метрика упрощенного пути, 17
Метрика фактор-нормы, 171
Метрика Фано, 252
Метрика Ферранда, 109
Метрика Фишера–Рао, 129
Метрика Флориана, 158
Метрика французского метро, 278
Метрика Фреше, 49
Метрика Фубини–Штуди, 136
Метрика Функа, 125
Метрика функционального преобразования, 70
Метрика Харди, 203
Метрика Хеллинджера, 219
Метрика Хессе, 135
Метрика Ходжа, 136
Метрика Хофера, 144
Метрика цветочного магазина, 278
Метрика центра массы, 270
Метрика центрального парка, 279
Метрика цепочки, 188
Метрика цифрового объема, 289
Метрика части, 203
Метрика Чебышева, 276
Метрика Шварца, 206
Метрика Шварцчайльда, 377
Метрика Шена, 125
Метрика Шепарда, 159
Метрика Штейнгауза, 159
Метрика Шульги, 215
Метрика Эгучи–Хансона–де Ситтера, 387
Метрика Эдгара–Людвига, 386
Метрика Эддингтона–Робертсона, 379
Метрика Эйнштейна, 376
Метрика экрана радара, 279
Метрика эллипсоида, 153
Метрика эллиптической плоскости, 104
Метрика Эномото–Катона, 47
Метрика Эугучи–Хэнсона, 138
Метрика ядерной нормы, 208
Метрики DRP, 326
Метрики Web подобности, 327
Метрики атрибутивного дерева, 243
Метрики Бианки, 380
Метрики Вигнера–Янасе–Дайсона, 131
Метрики Габидулина–Симониса, 251
Метрики качества, 418
Метрики качества видеоизображения, 311
Метрики конуса, 164
Метрики локальности, 328
Метрики между разбиениями, 175
Метрики миллиботов, 270
Метрики на детерминантных прямых, 143
Метрики на натуральных числах, 189
Метрики на пространстве Рисса, 178
Метрики преобразования без пересечений, 237
Метрики программного обеспечения, 328
Метрики томографии сети, 326
Метрическая борнология, 65
Метрическая выпуклость, 25
Метрическая кривая, 23
Метрическая размерность, 26
Метрическая рекурсия MAP декодирования, 254
Метрическая схема, 17
Метрическая теория гравитации, 351
Метрическая топология, 22
Метрическая энтропия, 26
Метрические меры длины, 394

Метрический базис, 34
Метрический диаметр, 33
Метрический компакт, 45
Метрический конус, 36
Метрический тензор, 115
Метрический треугольник, 22
Метрический функционал, 31
Метрический четырехугольник, 23
Метрический шар, 21
Метрическое преобразование, 38, 69
Метрическое пространство, 17
Метрическое пространство, гиперболическое по Громову, 91
Метрическое пространство, монотонное относительно расстояния, 22
Метрическое расслоение, 36
Метрическое число Рамсея, 40
Механическое расстояние, 346
Минимальное генетическое расстояние Нея, 335
Минимальное расстояние, 245
Многогранная метрика, 165
Многократно выверенное расстояние, 229
Модель фамильного расстояния, 345
Модифицированное расстояние Минковского, 269
Модифицированное хаусдорфово расстояние, 310
Модулюс расстояния, 370
Модулярное метрическое пространство, 23
Модулярное расстояние, 172
Молекулярный RMS радиус, 355
Монотонная метрика, 129
Моральная дистанция, 405
Морские единицы длины, 395
Московская метрика, 277
Мультипликативно взвешенное расстояние, 291

Наклонное расстояние, 358
Натуральная метрика, 190
Натянутая линейная оболочка, 42
Натянутое расширение, 42
Небесные расстояния Сведенборга, 408
Невырожденная метрика, 116
Нелинейная хаусдорфова метрика, 311
Неметрическое пространство Кристевой, 407
Неопределенная метрика, 62
Непрерывное двойственное пространство, 210
Нестягивающее отображение, 40
Нечеткое расстояние Хэмминга, 184
Нормализированная метрика информации, 223
Нормальное пространство, 57
Нормированное l_p-расстояние, 260
Нуклеотидное расстояние Джукеса–Кантора, 337

Обобщенная метрика, 66
Обобщенная метрика Кантора, 185
Обобщенная метрика преобразования биотопа, 70
Обобщенная хаусдорфова G-метрика, 49
Обобщенные римановы пространства, 118
Ограниченная метрика, 44
Однородное метрическое пространство, 38
Опережающее квазирасстояние, 321
Оптическое расстояние, 350
Ориентиры для оценки расстояния, 411
Основной граф метрического пространства, 22
Остановочное расстояние, 346
Отклонение периметра, 157
Отклонение площади, 157
Отношение подобности, 265
Отношение Штейнера, 33
Очень малые единицы длины, 395

Параболическое расстояние, 111
Паракомпактное пространство, 58
Первично-счетное пространство, 57
Периодическая метрика, 281
Плоская метрика, 149
Подграф-суперграф расстояния, 234
Подобности Леска, 323
Подобность, 16
Подобность 1 Кульчинского, 258
Подобность 1 Сокала–Сниса, 261
Подобность 2 Говера, 263
Подобность 2 Кульчинского, 258
Подобность 2 Сокала–Сниса, 261
Подобность 3 Сокала–Сниса, 262
Подобность Амана, 261

Подобность Андерберга, 263
Подобность Барони–Урбани–Бусера, 259
Подобность Брауна–Бланке, 262
Подобность Брэя–Куртиса, 258
Подобность Ву–Палмера, 323
Подобность Глисона, 257
Подобность Говера–Лежандра, 262
Подробность q-граммы, 183
Подобность Джаро, 183
Подобность Джаро–Уинклера, 183
Подобность дисперсии, 263
Подобность достоверности, 219
Подобность косинуса, 264
Подобность Ликока–Чодороу, 323
Подобность Лина, 323
Подобность Мориситы–Хорна, 265
Подобность Мотыки, 258
Подобность произведения Громова, 21
Подобность пути, 323
Подобность Рассела–Рао, 262
Подобность Резника, 323
Подобность Робертса, 257
Подобность Роджера–Танимото, 262
Подобность Ружечки, 256
Подобность Рэнда, 261
Подобность Симпсона, 262
Подобность среднего гармонического, 219
Подобность Тверского, 262
Подобность Фэйса, 262
Подобность Херста–Сент–Онджа, 324
Подобность Элленберга, 257
Подобность Энтони–Хаммера, 183
Подобность ясности, 222
Полиграфические единицы длины, 395
Полная метрика, 44
Полная риманова метрика, 119
Положительно однородная метрика, 169
Полуаполлонова метрика, 109
Полуметрика, 16
Полуметрика Бесиковича, 271
Полуметрика Вейля, 271
Полуметрика двойного несходства, 216
Полуметрика Дэниельса–Гильбо, 187
Полуметрика Золотарева, 216
Полуметрика Калмансона, 230
Полуметрика кольца, 174
Полуметрика Махаланобиса, 214
Полуметрика мультиразреза, 230
Полуметрика обобщенного тора, 174
Полуметрика общей линейной группы, 173
Полуметрика полунормы, 79
Полуметрика разреза, 229
Полуметрика Эренфёхта–Хауслера, 282
Полуметрика, уменьшающая расстояния, 139
Полуметрики на сходствах, 199
Полупсевдориманова метрика, 122
Полуриманова метрика, 122
Польское пространство, 45
Полярное расстояние, 362
Пополнение Коши, 44
Порядок конгруэнтности, 32
Постоянная расстояния операторной алгебры, 210
Почти-метрика, 17
Пошаговое расстояние Шрайвера–Бурвинкля, 336
Правильная метрика, 281
Приблизительные расстояния по шкале человека, 401
Проективная метрика, 46, 96
Проективная метрика полосы, 96
Проективная метрика полуплоскости, 97
Проективно плоское метрическое пространство, 94
Проективное определение метрики, 98
Прокрустово расстояние, 307
Пространство τ-расстояния, 63
Пространство близости, 64
Пространство Бэра, 58
Пространство Линделефа, 57
Пространство Мура, 57
Пространство над алгеброй, 67
Пространство постоянной кривизны, 117
Пространство приближений, 65
Пространство приближенности, 64
Пространство расстояний, 16
Пространство со скалярным произведением, 83
Прямое G-пространство, 91
Прямое восхождение, 362
Прямоугольное расстояние с барьерами, 280
Псевдогиперболическое расстояние, 107

Псевдориманова метрика, 120
Псевдоэллиптическое расстояние, 104
Птолемеев граф, 233
Птолемеева метрика, 19
Пылевая метрика Боннора, 382

Равномерная метрика, 201
Равномерное метрическое отображение, 39
Равномерное пространство, 64
Радиоизмерение расстояния, 415
Радиус метрического пространства, 32
Разделяющее расстояние, 160
Разложимая полуметрика, 230
Размерность Ассуада–Нагаты, 29
Размерность Вольберга–Конягина, 29
Размерность Годсил–Маккея, 29
Размерность удвоения, 29
Размерность Хаусдорфа, 28
Разность Минковского, 161
Разность образов, 263
Ранг метрического пространства, 27
Ранговая корреляция Спирмана, 265
Расположение с промежутками, 274
Распределение расстояний, 248
Расстояние, 16
Расстояние 1 Бхаттачарья, 219
Расстояние 1-суммы, 72
Расстояние 2 Бхаттачарья, 219
Расстояние 2-степени, 241
Расстояние bar-произведения, 246
Расстояние Dps, 334
Расстояние F-статистики, 335
Расстояние k-мера Эдгара, 340
Расстояние RTT, 326
Расстояние абсолютного суммирования, 248
Расстояние административных расходов, 326
Расстояние Али-Силвея, 221
Расстояние апоапсиды, 363
Расстояние арифметического кода, 248
Расстояние ACME, 252
Расстояние аффинного пространства-времени, 375
Расстояние Банаха–Мазура, 50
Расстояние Бесиковича, 202
Расстояние бинарного отношения, 237
Расстояние биотопа, 343
Расстояние Бирнбаума–Орлича, 217
Расстояние большого круга, 356
Расстояние Брегмана, 218
Расстояние Брэя–Куртиса, 258
Расстояние бульдозера, 304
Расстояние Бурби–Рао, 218
Расстояние бутылочного горлышка, 310
Расстояние взаимодействия, 348
Расстояние взаимообмена, 252
Расстояние видимого кратчайшего пути, 293
Расстояние Виктора–Пурпуры, 343
Расстояние воздушных перевозок, 294
Расстояние Вороного для дуг, 297
Расстояние Вороного для областей, 297
Расстояние Вороного для окружностей, 297
Расстояние Вороного для отрезков, 296
Расстояние Вороного порядка m, 298
Расстояние восприятия Оливы и др., 343
Расстояние вращения дерева, 236
Расстояние вращения ребра, 236
Расстояние F-вращения, 236
Расстояние вставки-удаления, 252
Расстояние выравнивания, 240
Расстояние галереи для флагов, 179
Расстояние Гендрона и др., 343
Расстояние генома, 342
Расстояние глубины проникновения, 160
Расстояние Гольдштейна и др., 336
Расстояние города, 294
Расстояние Гренандера, 161
Расстояние Гришина, 340
Расстояние далекого близкого, 408
Расстояние движения по дороге, 358
Расстояние действия, 406
Расстояние дизайна, 246
Расстояние до ближайшего целого, 75
Расстояние дрейфа, 321
Расстояние дуги Кавальи–Сфорза, 334
Расстояние зазора, 417
Расстояние защитных мероприятий, 417
Расстояние исключения столкновений, 279
Расстояние Кадетса, 50
Расстояние Канберры, 258
Расстояние квартета, 242
Расстояние Кемени, 175

Расстояние Кларка, 260
Расстояние коммутирования, 172
Расстояние континентального шельфа, 356
Расстояние Крамера–фон Мизеса, 215
Расстояние кратчайшего пути с препятствиями, 293
Расстояние Круглова, 218
Расстояние Кука, 266
Расстояние Куллбака–Лейблера, 220
Расстояние Ласкера, 344
Расстояние Ле Кама, 216
Расстояние Лоренца–Минковского, 376
Расстояние Манхейма, 249
Расстояние масштабной линейки Спирмана, 186
Расстояние Махаланобиса, 261
Расстояние между множествами, 48
Расстояние между простыми числами, 75
Расстояние между прямыми, 74
Расстояние между точкой и множеством, 48
Расстояние между точкой и плоскостью, 75
Расстояние между точкой и прямой, 75
Расстояние Мила, 260
Расстояние Мохо, 358
Расстояние на генетической карте, 342
Расстояние на карте, 357
Расстояние на лошадиных скачках, 423
Расстояние на построении, 67
Расстояние на реке, 294
Расстояние нечеткого множества, 335
Расстояние Нея–Таджимы–Татено, 335
Расстояние нормализированной информации, 182
Расстояние обхода, 227
Расстояние общих аллелей Стефенса и др., 334
Расстояние однозначности, 248
Расстояние окаймления, 415
Расстояние Орлочи, 265
Расстояние отражения, 306
Расстояние отрицательного типа, 18
Расстояние параллакса, 370
Расстояние параметризованных прямых, 305
Расстояние парусника, 295
Расстояние перемещения ребра, 235
Расстояние переноса растворителя, 417
Расстояние пересечения, 258
Расстояние периапсиды, 363
Расстояние пикселя, 308
Расстояние поддерева наибольшего сходства, 243
Расстояние подсматривающего, 295
Расстояние позы, 270
Расстояние поколений, 273
Расстояние полутонового изображения, 303
Расстояние порядка роста, 161
Расстояние Превости–Оканы–Алонсо, 334
Расстояние преобразования, 182
Расстояние прыжка, 350
Расстояние радара, 371
Расстояние разбиений-совмещений, 241
Расстояние разделения, 220
Расстояние размера Пенроуза, 259
Расстояние РАМ, 339
Расстояние ранга, 250
Расстояние редактирования дерева, 239
Расстояние редактирования единичной цены, 240
Расстояние редактирования с ограничением, 240
Расстояние Рейнольдса–Вейра–Кокерхэма, 335
Расстояние Реньи, 222
Расстояние Роджера, 334
Расстояние родства, 335
Расстояние Розенблюма–Цфасмана, 251
Расстояние светового пути, 370
Расстояние связи, 280
Расстояние Селкоу, 240
Расстояние сети, 293
Расстояние Симоны Вейль, 408
Расстояние скачка ребра, 235
Расстояние скольжения, 295
Расстояние смещения ребра, 236
Расстояние снегохода, 295
Расстояние соавторства, 320
Расстояние собаковода, 201
Расстояние Соболева, 159
Расстояние собственного движения, 369
Расстояние совершенного паросочетания, 242
Расстояние совместного движения, 367

Расстояние со-звездности, 321
Расстояние среднего квадрата, 336
Расстояние среднего сопротивления, 221
Расстояние Степанова, 202
Расстояние структуры РНК, 340
Расстояние стягивания, 235
Расстояние Таджимы–Нея, 337
Расстояние Тамуры–Нея, 338
Расстояние тона, 318
Расстояние триплета, 242
Расстояние углового диаметра, 370
Расстояние удаленности, 414
Расстояние упорядоченного множества, 250
Расстояние упрощения и пересадки поддерева, 242
Расстояние утечки, 416
Расстояние Фенга–Рао, 247
Расстояние формы Пенроуза, 259
Расстояние функции вращения, 306
Расстояние функции размера, 306
Расстояние Хаббла, 367
Расстояние Хеллинджера, 260
Расстояние химической связи, 353
Расстояние хорды Кавальи–Сфорза–Эдвардса, 334
Расстояние Цзяня–Конрата, 323
Расстояние чатоста-взвешенного кепстра, 317
Расстояние Чернова, 222
Расстояние шабата, 424
Расстояние Шармы–Кошика, 248
Расстояние Штейнгауза, 48
Расстояние Штейнера, 234
Расстояние Шэннона, 222
Расстояние Эгглестона, 160
Расстояние эллиптической орбиты, 363
Расстояние эффективной торговли, 404
Расстояния в криминологии, 422
Расстояния в медицине, 420
Расстояния в мире животных, 423
Расстояния в сейсмологии, 359
Расстояния в системах обнаружения, 414
Расстояния в стереоскопии, 412
Расстояния видимости, 409
Расстяния временных рядов видео, 311
Расстояния дальности, 417
Расстояния дорожной видимости, 413
Расстояния зубчатых передач, 416
Расстояния измерения тела, 421
Расстояния маршрутов коммивояжера, 237
Расстояния между доминирующим телом и спутником, 364
Расстояния между людьми, 401
Расстояния между подграфами, 238
Расстояния между ритмами, 318
Расстояния нелинейного гибкого согласования, 306
Расстояния перестройки генома, 341
Расстояния планировки сооружений, 280
Расстояния радиосвязи, 357
Расстояния расширения, 72
Расстояния скругления, 304
Расстояния цветовых компонент, 302
Расстояния, связанные с транспортными средствами, 413
Расстоянная выпуклость, 25
Расстоянное отображение, 35
Расстоянное преобразование, 307
Расстоянно-наследственный граф, 232
Расстоянно-полиномиальный граф, 232
Расстоянно-регулярный граф, 232
Растяжение, 38
Расхождение Дженсена–Шэннона, 221
Расхождение Джеффри, 221
Расчетное минимальное расстояние Гоппы, 247
Расширенная метрика, 17
Расширенная метрика действительной прямой, 191
Реберное расстояние, 235
Регулярная G-метрика, 62
Регулярная метрика, 148
Регулярное пространство, 56
Ретракт подграф, 231
Риманова метрика, 46, 116
Риччи-плоская метрика, 119
РН метрическое пространство, 45
Родственные метру термины, 393

Свободное расстояние, 247
Связное метрическое пространство, 23
Связное пространство, 58
Сегментированное отношение сигнал/шум, 314
Семантическая близость, 322

Сепарабельное метрическое пространство, 45
Сепарабельное пространство, 57
Сжимающее отображение, 40
Сила метрического пространства, 31
Симметричная χ^2-мера, 260
Симметричное метрическое пространство, 37
Симметричное χ^2-расстояние, 260
Симплициальная метрика, 165
Синтеничное расстояние, 342
Скалярная и векторная метрики, 177
Склонение, 362
Слабая ультраметрика, 20
Словарная метрика, 169
Смерть расстояния, 405
Собственное метрическое пространство, 45
Собственное расстояние, 368
Социальная дистанция, 402
Социо-культурные дистанции Руммеля, 403
Спектральное искажение интенсивность–фаза, 314
Спектральное расстояние Барка, 315
Срединная выпуклость, 25
Срединная ось и скелет, 307
Срединное множество, 34
Среднее хаусдорфово расстояние p-го порядка, 309
Среднее цветовое расстояние, 301
Среднеквадратическое логарифмическое спектральное расстояние, 315
Средний молекулярный радиус, 355
Стандартное генетическое расстояние Нея, 335
Статичная изотропная метрика, 379
Степенное (p, r)-расстояние, 259
Степенное расстояние, 291
Структура метрического конуса, 36
Субъективное расстояние, 411
Суммарное недоминированное отношение векторов, 274
Суперметрика Де Витта, 127
Суперметрика Кехлера, 144
Суперметрика Лунда–Реджи, 127
Суперметрики в доказательстве Перельмана, 127
Супружеское расстояние, 344
Сферическая метрика, 102
Схема индексирования расстояний, 234
Сходство, 63
Счетно-нормированное пространство, 59

Технологические расстояния, 404
Тип метрического пространства, 30
Томсоновская метрика частей, 162
Топологическая размерность, 28
Тороидальная метрика, 283
Точное измерение расстояния, 415
Трансакционная дистанция, 406

Убывание расстояния, 419
Угловая полуметрика, 264
Угловое расстояние, 283
Угловое расстояние между подпространствами, 198
Укорачивающее отображение, 41
Ультраметрика, 20
Универсальное метрическое пространство, 53
Унитарная метрика, 82
Усеченная метрика, 229

Фактор-метрика, 85
Фактор-полуметрика, 75
Феномены размера-расстояния, 410
Финслерова метрика, 123
Флаговая метрика, 98
Фокусные расстояния, 410
Фонетическое словарное расстояние, 317
Фоновые расстояния, 317
Фотометрическое расстояние, 369
Фрактал, 28
Функция масса-расстояние, 419
Функция расстояния, 34

Хаусдорфова метрика, 48
Хаусдорфово L_p-расстояние, 49
Хаусдорфово расстояние с точностью до G, 311
Химическое расстояние, 354
Хордальная метрика, 191
Хроматические числа метрического пространства, 33
Хэммингова метрика, 47
Хэммингова метрика на перестановках, 186

Цветовые расстояния, 301
Центральность промежуточности, 321
Циклическая метрика в орграфах, 228
Циклоидальная метрика, 120
Цилиндрическое расстояние, 298

Часовой угол, 362
Частично упорядоченное расстояние, 68
Частичное метрическое пространство, 63
Частичное хаусдорфово квазирасстояние, 310
Число белковых различий, 339
Число встречи, 31
Число различий, 336

Шаровая выпуклость, 25
Шестиугольная метрика, 285
Шестиугольная хаусдорфова метрика, 289
Широта, 361

Эгоцентрическое расстояние, 411
Эквивалентные метрики, 43
Эквидистантная метрика, 43
Эклиптическая долгота, 362
Эклиптическая широта, 362
Экспоненциальное расстояние, 291
Экстремальная метрика, 151
Эксцентриситет, 32
Элемент наилучшего приближения, 35
Эллиптическая метрика, 103
Эмоциональное расстояние, 402
Эрмитова G-метрика, 62
Эрмитова гиперболическая метрика, 105
Эрмитова метрика, 134
Эрмитова эллиптическая метрика, 104
Эффект символической дистанции, 411
Эффективное метрическое пространство, 54
Эффективное свободное расстояние, 247

Научное издание

Деза Елена Ивановна
Деза Мишель Мари

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ РАССТОЯНИЙ

Перевод с английского языка

Зав. редакцией *М.В. Грачева*
Редактор *Л.В. Филиппова*
Художник *В.Ю. Яковлев*
Художественный редактор *Ю.И. Духовская*
Технический редактор *В.В. Лебедева*
Корректоры
З.Д. Алексеева, Г.В. Дубовицкая, Т.А. Печко

Подписано к печати 20.06.2008
Формат $70 \times 100^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс
Печать офсетная
Усл.печ.л. 36,4. Усл.кр.-отт. 36,8
Уч.-изд.л. 38,0. Тип. зак. 457

Издательство "Наука"
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
E-mail: secret@naukaran.ru
www.naukaran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ РАССТОЯНИЙ

Елена ДЕЗА
Мишель Мари ДЕЗА

НАУКА

Елена ДЕЗА
Мишель Мари ДЕЗА
ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ РАССТОЯНИЙ

DICTIONARY OF DISTANCES

Elena DEZA
Michel Marie DEZA

ISBN 978-5-02-036043-3

NAUKA